УДК 519.2

НОВЫЕ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Казанчян Д.Х.
МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва

Поступила в редакцию 21.10.2017, после переработки 11.02.2018.

В статье доказаны новые характеризации броуновского движения. Они обобщают и дополняют знаменитую теорему Леви о характеризации процесса броуновского движения среди квадратично интегрируемых непрерывных мартингалов. Первая характеризация (теорема 1) обобщает теорему Леви. Две другие характеризации (теоремы 2 и 3) представляют собой аналоги теоремы Леви, в которых условие непрерывности заменено другими условиями.

Ключевые слова: теорема Леви, процессы с независимыми приращениями, бесконечно делимые распределения, броуновское движение, мартингалы.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 1. С. 43–54.
https://doi.org/10.26456/vtpmk493

Введение

Пусть даны вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и фильтрация $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, t \geq 0\}$. Напомним, что фильтрацией называется возрастающее семейство сигма-алгебр $\mathcal{F}_t, t \geq 0$, каждая из которых является подсемейством основной сигма-алгебры $\mathcal{F}$.

Вещественный случайный процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$ называется мартингалом относительно фильтрации $\mathbb{F}$, если $\mathbb{E}|X_t| < \infty$, случайная величина X_t измерима относительно $\mathcal{F}_t$, для любого $t \geq 0$, и для любых $0 \leq s < t$ выполняется равенство $X_s = \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)$ п.н. (почти всюду относительно вероятности $\mathbb{P}$.)

Вещественный случайный процесс $B = \{B_t, t \geq 0\}$ называется броуновским движением, если $B_0 = 0$ п.н.; почти все траектории непрерывны; для любых $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n, n \geq 2$, случайные величины $B_{t_k} - B_{t_{k-1}}, k = 1, \ldots, n$, независимы; для любых $0 \leq s < t$ случайная величина $B_t - B_s$ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $\mathbb{E}(B_t - B_s) = 0$ и дисперсией $\mathbb{E}(B_t - B_s)^2 = t - s$.

Случайный процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$ называется непрерывным справа (непрерывным), если почти все его траектории непрерывны справа (непрерывны).

Характеризация Леви. *Пусть дан непрерывный мартингал $X = \{X_t, t \geq 0\}$ относительно фильтрации $\mathbb{F}$. Если $X_0 = 0$ п.н, $\mathbb{E}|X_t|^2 < \infty$, и $\mathbb{E}((X_t - X_s)^2|\mathcal{F}_s) = t - s$ п.н. для любых $0 \leq s < t$, то X является броуновским движением.*

1. Новые характеризации

Начнем с теоремы, которая обобщает теорему Леви. Разделим отрезок $[s,t], 0 \le s < t$, точками $t_{n,k} = s + k(t-s)/n, k = 0,\dots,n$. В теореме 1 рассматриваются случайные процессы $X = \{X_t, t \ge 0\}$, удовлетворяющие следующему условию

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le n} |X_{t_{n,k}} - X_{t_{b,k-1}}| = 0 \text{ по вероятности.} \tag{1}$$

Заметим, что все непрерывные случайные процессы, в частности, броуновское движение удовлетворяют этому условию.

Теорема 1. *Пусть дан мартингал $X = \{X_t, t \ge 0\}$ относительно фильтрации $\mathbb{F}$. Предположим, что условие (1) выполнено для любых $0 \le s < t$, $X_0 = 0$ п.н., $\mathbb{E}|X_t|^2 < \infty$, и $\mathbb{E}((X_t - X_s)^2|\mathcal{F}_s) = t - s$ п.н при $0 \le s < t$. Тогда X является броуновским движением.*

Доказательство. Разделим отрезок $[s,t], 0 \le s < t$, точками $t_{n,k}$ как в (1). Обозначим $\xi_{n,k} = X_{t_{n,k}} - X_{t_{n,k-1}}, k = 1,\dots,n$, и заметим, что $X_t - X_s = \sum_{k=1}^n \xi_{n,k}$. Докажем, что справедливо неравенство

$$\mathbb{E}(|X_t - X_s|^4|\mathcal{F}_s) \le 3|t-s|^2 \text{ п.н.} \tag{2}$$

Для этого заметим, что

$$\begin{aligned}|X_t - X_s|^4 = \Big|\sum_{k=1}^n \xi_{n,k}\Big|^4 = \sum_{k=1}^n \xi_{n,k}^4 + 4\sum_{1\le i\ne j\le n} \xi_{n,i}^3\xi_{n,j} + 4\sum_{1\le i\ne j\ne k\le n} \xi_{n,i}^2\xi_{n,j}\xi_{n,k} +\\ + 6\sum_{1\le i<j\le n} \xi_{n,i}^2\xi_{n,j}^2 + 24\sum_{1\le i\ne j\ne k\ne m\le n} \xi_{n,i}\xi_{n,j}\xi_{n,k}\xi_{n,m}.\end{aligned} \tag{3}$$

Покажем, что первые две суммы в правой части равенства сходятся к нулю по вероятности. Так как X является мартингалом и $\mathbb{E}\xi_{n,k}^2 = t_{n,k} - t_{n,k-1} = (t-s)/n$, то справедливы следующие соотношения

$$\mathbb{E}\sum_{k=1}^n \xi_{n,k}^2 = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\xi_{n,k}^2 = \sum_{k=1}^n (t_{n,k} - t_{n,k-1}) = t - s,$$

$$\sup_{n\ge1} \mathbb{P}\{\sum_{k=1}^n \xi_{n,k}^2 > \lambda\} \le \frac{t-s}{\lambda} \to 0 \text{ при } \lambda \to \infty.$$

Второе соотношение является следствием неравенства Маркова. Из этих двух соотношений и (1) следует, что

$$\sum_{k=1}^n |\xi_{n,k}|^4 \le \max_{1\le k\le n} |\xi_{n,k}|^2 \sum_{k=1}^n |\xi_{n,k}|^2 \to 0 \text{ по вероятности при } n \to \infty. \tag{4}$$

Запишем вторую сумму в правой части равенства (3) в следующем виде

$$4\sum_{1\le i\ne j\le n} \xi_{n,i}^3\xi_{n,j} = 4\sum_{k=1}^n \xi_{n,k}^3 \sum_{k=1}^n \xi_{n,k} - 4\sum_{k=1}^n \xi_{n,k}^4.$$

Напомним, что $\xi_{n,1} + \dots + \xi_{n,k} = X_t - X_s$. Отсюда и из условия (1) вытекает, что

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} \xi_{n,k}^3 \sum_{k=1}^{n} \xi_{n,k}\Big| = |X_t - X_s| \Big|\sum_{k=1}^{n} \xi_{n,k}^3\Big| \le \max_{1\le k\le n} |\xi_{n,k}| \sum_{k=1}^{n} \xi_{n,k}^2 \to 0$$

по вероятности при $n \to \infty$. С учетом (4) мы получим, что

$$4 \lim_{n\to\infty} \sum_{1\le i\ne j\le n} \xi_{n,i}^3 \xi_{n,j} = 0 \text{ по вероятности.} \tag{5}$$

В силу (3)–(5) случайная величина $|X_t - X_s|^4$ является пределом по вероятности

$$|X_t - X_s|^4 = \lim_{n\to\infty} \Big(4 \sum_{1\le i\ne j\ne k\le n} \xi_{n,i}^2 \xi_{n,j} \xi_{n,k} + 6 \sum_{1\le i<j\le n} \xi_{n,i}^2 \xi_{n,j}^2 + \\ +24 \sum_{1\le i\ne j\ne k\ne m\le n} \xi_{n,i} \xi_{n,j} \xi_{n,k} \xi_{n,m}\Big).$$

Обозначим выражение под знаком предела символом T_n. В силу известных свойств (см., например, [1], теорема 2.5.7) мы имеем

$$\mathbb{E}(|X_t - X_s|^4 | \mathcal{F}_s) \le \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}(T_n | \mathcal{F}_s) \text{ п.н.} \tag{6}$$

Оценим условное математическое ожидание $\mathbb{E}(T_n|\mathcal{F}_s)$. Если $i < j < k$, то

$$\mathbb{E}(\xi_{n,i}^2 \xi_{n,j} \xi_{n,k} | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\xi_{n,i}^2 \xi_{n,j} \mathbb{E}(\xi_{n,k} | \mathcal{F}_{t_{n,k-1}}) | \mathcal{F}_s) = 0 \text{ п.н.},$$

так как $E(\xi_{n,k}|\mathcal{F}_{t_{n,k-1}}) = 0$ п.н. Если $j < k < i$, то

$$\mathbb{E}(\xi_{n,i}^2 \xi_{n,j} \xi_{n,k} | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\xi_{n,j} \xi_{n,k} \mathbb{E}(\xi_{n,i}^2 | \mathcal{F}_{t_{n,i-1}}) | \mathcal{F}_s) = \\ = (t_{n,i} - t_{n,i-1}) \mathbb{E}(\xi_{n,j} \xi_{n,k} | \mathcal{F}_s) = 0 \text{ п.н.}$$

Таким же образом можно доказать равенство $\mathbb{E}(\xi_{n,i}\xi_{n,j}\xi_{n,k}\xi_{n,m}|\mathcal{F}_s) = 0$ для любых $i \ne j \ne k \ne m$. Если $i < j$, то

$$\mathbb{E}(\xi_{n,i}^2 \xi_{n,j}^2 | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi_{n,i}^2 \xi_{n,j}^2 | \mathcal{F}_{t_{n,j-1}}) | \mathcal{F}_s) = (t_{n,j} - t_{n,j-1}) \mathbb{E}(\xi_{n,i}^2 | \mathcal{F}_s) = \\ = (t_{n,j} - t_{n,j-1})(t_{n,i} - t_{n,i-1}) = \frac{(t-s)^2}{n^2} \text{ п.н.}$$

После суммирования мы получим следующее неравенство

$$\mathbb{E}(T_n|\mathcal{F}_s) = 6 \sum_{1\le i<j\le n} \frac{(t-s)^2}{n^2} = 6 \frac{n(n-1)}{2} \frac{(t-s)^2}{n^2} < 3(t-s)^2 \text{ п.н.}$$

Требуемое неравенство (2) следует из (6) и приведенных оценок.

Подставив $t = t_{n,k}$ и $s = t_{n,k-1}$ в неравенстве (2), мы получим $\mathbb{E}(\xi_{n,k}^4|\mathcal{F}_{t_{n,k-1}}) \le 3(t_{n,k} - t_{n,k-1})^2$ п.н. и

$$\mathbb{E}(|\xi_{n,k}|^3 | \mathcal{F}_{t_{n,k-1}}) = \mathbb{E}(|\xi_{n,k}| |\xi_{n,k}|^2 | \mathcal{F}_{t_{n,k-1}}) \le \\ \le \sqrt{\mathbb{E}(\xi_{n,k}^2 | \mathcal{F}_{t_{n,k-1}}) \mathbb{E}(\xi_{n,k}^4 | \mathcal{F}_{t_{n,k-1}})} \le \sqrt{3}(t_{n,k} - t_{n,k-1})^{3/2} = \sqrt{3} \frac{(t-s)^{3/2}}{n^{3/2}} \text{ п.н.} \tag{7}$$

Обозначим $A_r = \exp\{iu\sum_{k=1}^r \xi_{n,k} - (n-r)(t-s)u^2/2n\}$ для любых $r = 1,\dots,n$ и для любого $u \in \mathbb{R}$, где $i = \sqrt{-1}$. Нетрудно проверить, что справедливы равенства

$$\exp\{iu(X_t - X_s)\} = \sum_{r=1}^{n-1}(A_{r+1} - A_r) + A_1,$$
$$A_{r+1} - A_r = \Big(e^{iu\sum_{k=1}^{r+1}\xi_{n,k}} - e^{iu\sum_{k=1}^{r}\xi_{n,k} - (t-s)u^2/2n}\Big)e^{-(n-r)(t-s)u^2/2n}.$$

В силу линейного свойства условных математических ожиданий мы получим, что

$$\mathbb{E}(e^{iu(X_t-X_s)}|\mathcal{F}_s) = \\ = \sum_{r=1}^{n-1}\mathbb{E}\Big(e^{iu\sum_{k=1}^{r+1}\xi_{n,k}} - e^{iu\sum_{k=1}^{r}\xi_{n,k}-(t-s)u^2/2n}|\mathcal{F}_s\Big)e^{-(n-r)(t-s)u^2/2n} + \\ +\mathbb{E}\Big(e^{iu\xi_{n,1}-(n-1)(t-s)u^2/2n}|\mathcal{F}_s\Big) \text{ п.н.} \tag{8}$$

Из неравенства $|1 - \exp\{i\alpha\}| \le |\alpha|$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ следует, что

$$\Big|\mathbb{E}\Big(e^{iu\xi_{n,1}-(n-1)(t-s)u^2/2n}|\mathcal{F}_s\Big) - e^{-(n-1)(t-s)u^2/2n}\Big| \le \\ \le e^{-(n-1)(t-s)u^2/2n}\mathbb{E}(|1 - e^{iu\xi_{n,1}}||\mathcal{F}_s) \le |u|\mathbb{E}(|\xi_{n,1}|\mathcal{F}_s) \le |u|\sqrt{\mathbb{E}(|\xi_{n,1}|^2\mathcal{F}_s)} = \\ = |u|\sqrt{\mathbb{E}(\mathbb{E}(|\xi_{n,1}|^2|\mathcal{F}_0)\mathcal{F}_s)} = |u|\sqrt{(t-s)/n} \text{ п.н}$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\Big(e^{iu\xi_{n,1}-(n-1)(t-s)u^2/2n}|\mathcal{F}_s\Big) = e^{-(t-s)u^2/2} \text{ п.н.} \tag{9}$$

Так как $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_{t_{n,r}}$, то

$$\mathbb{E}\Big(e^{iu\sum_{k=1}^{r+1}\xi_{n,k}} - e^{iu\sum_{k=1}^{r}\xi_{n,k}-(t-s)u^2/2n}|\mathcal{F}_s\Big) = \\ = \mathbb{E}\Big(e^{iu\sum_{k=1}^{r}\xi_{n,k}}\mathbb{E}\Big(e^{iu\xi_{n,r+1}} - e^{-(t-s)u^2/2n}|\mathcal{F}_{t_{n,r}}\Big)|\mathcal{F}_s\Big) \text{ п.н.}$$

Напомним, что X является мартингалом. Поэтому выполняется равенство $\mathbb{E}(\xi_{n,r+1}|\mathcal{F}_{t_{n,r}}) = 0$ п.н. Так как $\mathbb{E}(\xi^2_{n,r+1}|\mathcal{F}_{t_{n,r}}) = (t_{n,r+1} - t_{n,r}) = (t-s)/n$ п.н., то

$$\mathbb{E}\Big(e^{iu\xi_{n,r+1}} - e^{-(t-s)u^2/2n}|\mathcal{F}_{t_{n,r}}\Big) = \mathbb{E}\Big(e^{iu\xi_{n,r+1}} - 1 - iu\xi_{n,r+1} + \frac{u^2}{2}\xi^2_{n,r+1}|\mathcal{F}_{t_{n,r}}) - \\ -\Big(e^{-(t-s)u^2/2n} - 1 + \frac{u^2(t-s)}{2n}\Big) \text{ п.н.}$$

Из неравенства $|e^{i\alpha} - 1 - i\alpha + \alpha^2/2| \le |\alpha|^3/6$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ следует, что

$$\Big|\mathbb{E}\Big(e^{iu\xi_{n,r+1}} - 1 - iu\xi_{n,r+1} + \frac{u^2}{2}\xi^2_{n,r+1}|\mathcal{F}_{t_{n,r}}\Big)\Big| \le \frac{|u|^3}{6}\mathbb{E}(|\xi_{n,r+1}|^3|\mathcal{F}_{t_{n,r}}) \le \\ \le |u|^3\sqrt{3}\frac{(t-s)^{3/2}}{n^{3/2}} \text{ п.н}$$

Последнее неравенство следует из (7). Из неравенства $|\exp\{-\beta\} - 1 + \beta| < \beta^2/2$ для $0 \le \beta \le 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$ такого, что $n > (t-s)u^2/2$, следет, что

$$\Big|\mathbb{E}\Big(e^{iu\sum_{k=1}^{r+1}\xi_{n,k}} - e^{iu\sum_{k=1}^{r}\xi_{n,k}-(t-s)u^2/2n}|\mathcal{F}_s\Big)\Big| \le$$
$$\le \Big|\mathbb{E}\Big(e^{iu\sum_{k=1}^{r}\xi_{n,k}}\mathbb{E}\Big(e^{iu\xi_{n,r+1}} - e^{-(t-s)u^2/2n}|\mathcal{F}_{t_{n,r}}\Big)|\mathcal{F}_s\Big)\Big| +$$
$$+\Big|\Big(e^{-(t-s)u^2/2n} - 1 + \frac{u^2(t-s)}{2n}\Big)\Big| \le \sqrt{3}|u|^3\frac{(t-s)^{3/2}}{n^{3/2}} + \frac{u^4(t-s)^2}{4n^2} \text{ п.н.}$$

Далее предполагается, что $n \ge (t-s)u^2/2$. После суммирования мы получим

$$\Big|\sum_{r=1}^{n-1}\mathbb{E}\Big(e^{iu\sum_{k=1}^{r+1}\xi_{n,k}} - e^{iu\sum_{k=1}^{r}\xi_{n,k}-(t-s)u^2/2n}|\mathcal{F}_s\Big)e^{-(n-r)(t-s)u^2/2n}\Big| \le$$
$$\le \sqrt{3}|u|^3\frac{(t-s)^{3/2}}{\sqrt{n}} + \frac{u^4(t-s)}{4n} \text{ п.н.}$$

Из (8) и (9) следует, что

$$\mathbb{E}\Big(e^{iu(X_t-X_s)}|\mathcal{F}_s\Big) = e^{-(t-s)u^2/2} \text{ п.н.}$$

Из этого равенства следует, что $X_t - X_s$ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $\mathbb{E}(X_t - X_s) = 0$ и дисперсией $\mathbb{E}(X_t - X_s)^2 = t - s$. Для любых $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ и для любых действительных чисел $u_1, \ldots, u_n, n \ge 2$, верны следующие равенства

$$\mathbb{E}e^{i\sum_{k=1}^{n}u_k(X_{t_k}-X_{t_{k-1}})} = \mathbb{E}(\mathbb{E}(e^{i\sum_{k=1}^{n}u_k(X_{t_k}-X_{t_{k-1}})}|\mathcal{F}_{t_{n-1}})) =$$
$$= \mathbb{E}(e^{i\sum_{k=1}^{n-1}u_k(X_{t_k}-X_{t_{k-1}})}\mathbb{E}(e^{iu_n(X_{t_n}-X_{t_{n-1}})})|\mathcal{F}_{t_{n-1}})) =$$
$$= \mathbb{E}(e^{i\sum_{k=1}^{n-1}u_k(X_{t_k}-X_{t_{k-1}})})e^{-(t_n-t_{n-1})u_n^2/2} = e^{-\sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})u_k^2/2}.$$

Отсюда, в силу известного критерия, следует, что случайные величины $X_{t_k} - X_{t_{k-1}}, k = 1, \ldots, n$, независимы. Доказано, что случайный процесс X удовлетворяет всем условиям из определения броуновского движения. Теорема доказана. □

Теорема 2. *Мартингал* $X = \{X_t, t \ge 0\}$, *согласованный с фильтрацией* $\mathbb{F}$, *является броуновским движением, если и только если* $X_0 = 0$ *п.н.*, $\mathbb{E}(X_s(X_t - X_s)^3) \ge 0$, $\mathbb{E}((X_t - X_s)^2|\mathcal{F}_s) = t - s$ *п.н. для любых* $0 \le s < t$, *и случайный процесс* $\{X_t^4 - 6X_t^2 t + 3t^2, t \ge 0\}$ *является супермартингалом относительно фильтрации* $\mathbb{F}$.

Доказательство. Пусть X является броуновским движением. Предположим, что оно является мартингалом относительно фильтрации $\mathbb{F}$. Убедимся, что $Y_t = X_t^4 - 6X_t^2 t + 3t^2$ является мартингалом относительно фильтрации $\mathbb{F}$. Требуется только проверить равенство $Y_s = \mathbb{E}(Y_t|\mathcal{F}_s)$ п.н. для любых $0 \le s < t$. Очевидно, выполнено следующее равенство

$$X_t^4 = (X_t - X_s)^4 + 4(X_t - X_s)^3 X_s + 6(X_t - X_s)^2 X_s^2 + 4(X_t - X_s)X_s^3 + X_s^4.$$

Вспомним, что X_s и $X_t - X_s$ независимы. Так как $\mathbb{E}((X_t - X_s)^2|\mathcal{F}_s) = t - s$ п.н., $\mathbb{E}(X_t - X_s|\mathcal{F}_s) = 0$ п.н и $\mathbb{E}(X_t - X_s)^3 = 0$, мы получим, что

$$\mathbb{E}(X_t^4|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X_t - X_s)^4 + 6\mathbb{E}(X_s^2\mathbb{E}((X_t - X_s)^2|\mathcal{F}_s)) + X_s^4 = 3(t-s)^2 + 6(t-s)X_s^2 + X_s^4.$$

Из неравенства

$$\mathbb{E}(X_t^2|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}((X_t - X_s)^2 + 2X_s(X_t - X_s) + X_s^2|\mathcal{F}_s) = (t - s) + X_s^2$$

следуют требуемое равенство $Y_s = \mathbb{E}(Y_t|\mathcal{F}_s)$ п.в. Действительно,

$$\mathbb{E}(Y_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(X_t^4|\mathcal{F}_s) - 6t\mathbb{E}(X_t^2|\mathcal{F}_s) + 3t^2 = X_s^4 - 6X_s + 3s^2 = Y_s \text{ п.н.}$$

Таким образом доказано, что броуновское движение удовлетворяет всем условиям теоремы.

Теперь, предположим, что случайный процесс X_t удовлетворяет всем условиям теоремы. Для любых $0 \leq s < t$ выполняется следующее равенство

$$\mathbb{E}|X_t - X_s|^4 = \mathbb{E}X_t^4 - 4\mathbb{E}(X_t^3 X_s) + 6\mathbb{E}(X_t^2 X_s^2) - 4\mathbb{E}(X_t X_s^3) + \mathbb{E}X_s^4. \tag{10}$$

Так как X является мартингалом, то $\mathbb{E}(X_t - X_s|\mathcal{F}_s) = 0$ п.н. и

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t^3 X_s) &= \mathbb{E}((X_t - X_s)^3 X_s) + 3\mathbb{E}((X_t - X_s)^2 X_s^2) + 3\mathbb{E}((X_t - X_s)X_s^3) + \mathbb{E}X_s^4 = \\ &= \mathbb{E}(X_s(X_t - X_s)^3) + 3\mathbb{E}(X_s^2\mathbb{E}((X_t - X_s)^2|\mathcal{F}_s)) + 3\mathbb{E}(X_s^3\mathbb{E}(X_t - X_s|\mathcal{F}_s)) + \mathbb{E}X_s^4 = \\ &= \mathbb{E}(X_s(X_t - X_s)^3) + 3s(t - s) + \mathbb{E}X_s^4.\end{aligned}$$

Аналогично можно убедиться, что справедливы следующие равенства

$$\mathbb{E}(X_t X_s^3) = \mathbb{E}(X_s^3\mathbb{E}(X_t - X_s|\mathcal{F}_s)) + \mathbb{E}X_s^4 = \mathbb{E}X_s^4,$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t^2 X_s^2) = \mathbb{E}(X_s^2\mathbb{E}((X_t - X_s)^2|\mathcal{F}_s)) + 2\mathbb{E}(X_s^3\mathbb{E}(X_t - X_s|\mathcal{F}_s)) + \mathbb{E}X_s^4 = \\ s(t - s) + \mathbb{E}X_s^4,\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(X_t X_s^3) = \mathbb{E}(X_s^3\mathbb{E}(X_t - X_s|\mathcal{F}_s)) + \mathbb{E}X_s^4 = \mathbb{E}X_s^4.$$

Напомним, что по условию теоремы $\mathbb{E}(X_s(X_t - X_s)^3) \geq 0$. После подстановки указанных выражений в (10) мы получим

$$\mathbb{E}|X_t - X_s|^4 = \mathbb{E}X_t^4 - 4\mathbb{E}(X_s(X_t - X_s)^3) - 6s(t - s) - \mathbb{E}X_s^4 \leq \mathbb{E}X_t^4 - 6s(t - s) - \mathbb{E}X_s^3.$$

Так как $\{X_t^4 - 6X_2 t + 3t^2, t \geq 0\}$ является супермартингалом, то выполняется неравенство

$$\mathbb{E}(X_t^4 - 6X_t^2 t + 3t^2) \leq \mathbb{E}(X_s^4 - 6X_s^2 s + 3s^2).$$

Отсюда следует, что

$$\mathbb{E}X_t^4 = \mathbb{E}(X_t^4 - 6X_t^2 t + 3t^2) + 3t^3 \leq \mathbb{E}(X_s^4 - 6X_s^2 s + 3s^2) + 3t^2 = \mathbb{E}X_s^4 + 3t^2 - 3s^2,$$

$$\mathbb{E}|X_t - X_s|^4 \leq 3t^2 - 3s(t - s) - 3s^2 = 3(t - s)^2.$$

Последнее неравенство влечет условие (1). Действительно,

$$\mathbb{E}(\max_{1\le k\le n}|X_{t_{n,k}}-X_{t_{n,k-1}}|^4)\le\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}|X_{t_{n,k}}-X_{t_{n,k-1}}|^4\le 3\sum_{k=1}^{n}(t_{n,k}-t_{n.k-1})^2=$$
$$=\frac{3(t-s)^2}{n}\to 0$$

при $n\to\infty$. Напомним, что сходимость в среднем влечет сходимость по вероятности. По теореме 1 случайный процесс X_t является броуновским движением. Теорема доказана. □

Чтобы сформулировать следующую характеризацию, нам потребуются некоторые определения. Пусть $X_1,\dots,X_n$ — независимые случайные величины, имеющие общее стандартное нормальное распределение. Говорят, что случайная величина $X_1^2+\dots+X_n^2$ имеет хи-квадрат распределение с n степенями свободы. Такая случайная величина имеет плотность вероятностей

$$p(x)=\frac{x^{n/2-1}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}e^{-x/2}\text{ при }x>0,\ p(x)=0\text{ при }x\le 0.$$

Случайная величина X называется безгранично делимой, если для любого натурального n ее характеристическая функция является n-й степенью некоторой характеристической функции. Известно [2], что случайная величина X является безгранично делимой только и только тогда, когда ее характеристическая функция может быть представлена в следующем виде

$$\mathbb{E}e^{itX}=\exp\Big\{i\gamma t-\frac{\sigma^2t^2}{2}+\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}\Big(e^{itx}-1-\frac{itx}{1+x^2}\Big)dH(x)\Big\},t\in\mathbb{R},$$

где $\gamma,\sigma\in\mathbb{R},\sigma\ge 0$, $H(x),x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, — непрерывная слева функция, неубывающая на $(-\infty,0)$ и $(0,\infty)$, такая, что $H(\pm\infty)=0$, $\int_{(-1,0)\cup(0,1)}x^2dH(x)<\infty$.

В [3, 4] исследованы связи между функцией распределения $\mathbb{P}\{X<x\},\ x\in\mathbb{R}$, и функцией Леви $H(x),\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Позже эти исследования были продолжены в [5–7]. С помощью методов, разработанных в рамках теории бесконечно делимых распределений, могут быть получены новые характеризации броуновского движения и пуассоновского процесса. Например, см. [3, 4, 8]. Для доказательства следующей теоремы нам потребуются две леммы.

Лемма 1. *Безгранично делимая случайная величина X имеет гауссовское распределение, если*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln\mathbb{P}\{|X|>r\}}{r\ln r}=-\infty.$$

Доказательство можно найти, например, в [4] или [8].

Лемма 2. *Пусть случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение. Тогда для любого вещественного числа λ случайная величина $(\xi+\lambda)^2$ имеет следующую производящую функцию*

$$\mathbb{E}e^{t(\xi+\lambda)^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{t(x+\lambda)^2}e^{-x^2/2}dx=\frac{1}{\sqrt{1-2t}}e^{\lambda^2t/(1-2t)},t\in(-\infty,1/2).$$

Доказательство может быть найдено, например, в [9].

Напомним, что случайный процесс $X = \{X_t, t \in T\}, T \subset \mathbb{R}$, называется стохастически непрерывным, если $\lim_{t\to s} \mathbb{P}\{|X_t - X_s| > \varepsilon\} = 0$ для любого $s \in T$ и $\varepsilon > 0$.

Теорема 3. *Стохастически непрерывный случайный процесс $X = \{X_t, t \in [0,1]\}$ с независимыми приращениями является броуновским движением, если и только если $X_0 = 0$ п.н. и для любого натурального $n \geq 1$ случайная величина $n\sum_{k=1}^n (X_{k/n} - X_{(k-1)/n})^2$ имеет хи-квадрат распределение с n степенями свободы.*

Доказательство. Нетрудно проверить, что броуновское движение удовлетворяет всем условиям теоремы. Предположим теперь, что случайный процесс X удовлетворяет условиям теоремы. Тогда $Y_k = \sqrt{n}(X_{k/n} - X_{(k-1)/n}), k = 1, \ldots, n$, являются независимыми безгранично делимыми случайными величинами. Заметим, что для любого $r > 0$ выполняются неравенства

$$\mathbb{P}\{|Y_k| > r\} = \mathbb{P}\{Y_k^2 > r^2\} \leq \mathbb{P}\{Y_1^2 + \cdots + Y_n^2 > r^2\} = \int_{r^2}^{\infty} \frac{x^{n/2-1}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} e^{-x/2} dx.$$

С помощью правила Лопиталя можно проверить, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln \mathbb{P}\{|Y_k| > r\}}{r \ln r} \leq \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r\ln r} \ln \int_{r^2}^{\infty} \frac{x^{n/2-1}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} e^{-x/2} dx =$$
$$= \lim_{r\to\infty} \frac{-2r^{n-1}}{(1+\ln r) e^{r^2/2} \int_{r^2}^{\infty} x^{n/2-1} e^{-x/2} dx} = -\infty.$$

По лемме 1 случайная величина Y_k имеет гауссовское распределение с математическим ожиданием $a_k = \mathbb{E}Y_k$ и дисперсией $\sigma_k^2 = \mathbb{E}(Y_k - \mathbb{E}Y_k)^2$. Отсюда следует (см., например, [7], с. 188), что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln \mathbb{P}\{|X_k| > r\}}{r^2} = -\frac{1}{2\sigma_k^2}.$$

Применяя дважды правило Лопиталя, можно проверить, что

$$-\frac{1}{2\sigma_k^2} = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln \mathbb{P}\{|Y_k| > r\}}{r^2} \leq \lim_{r\to\infty} \frac{\ln \mathbb{P}\{Y_1^2 + \cdots + Y_n^2 > r^2\}}{r^2} =$$
$$= \lim_{r\to\infty} r^{-2} \ln \int_{r^2}^{\infty} \frac{x^{n/2-1}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} e^{-x/2} dx = \lim_{r\to\infty} \frac{(n-2)r^{n-3} - r^{n-1}}{2r^{n-1}} = -\frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что $0 \leq \sigma_k^2 \leq 1$. Равенство $\sigma_k^2 = 0$ невозможно. В противном случае случайная величина $X_t - X_s$ была бы константой, что противоречит условиям теоремы. Без ограничения общности можно считать, что $0 < \sigma_1^2 \leq \cdots \leq \sigma_n^2 \leq 1$. Заметим, что случайная величины $\xi_k = (Y_k - a_k)/\sigma_k$ имеют стандартное нормальное распределение. По лемме 2 мы получим, что

$$\frac{1}{(1-2t)^{n/2}} = \mathbb{E}e^{t(Y_1^2 + \cdots + Y_n^2)} = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}e^{t\sigma_k^2(\xi_k + a_k/\sigma_k)^2} =$$
$$= \prod_{k=1}^n \frac{1}{(1-2\sigma_k^2 t)^{1/2}} e^{a_k^2 t/(1-2\sigma_k^2 t)}, t \in (-\infty, 1/2).$$

Возьмем логарифм от обеих частей равенства

$$-\frac{n}{2}\ln(1-2t)=\sum_{k=1}^{n}\big(\frac{a_k^2 t}{1-2\sigma_k^2 t}-\frac{1}{2}\ln(1-2\sigma_k^2 t)\big),$$

затем вычислим первые производные от обеих частей. В результате мы получим равенство

$$\frac{n}{1-2t}=\sum_{k=1}^{n}\big(\frac{a_k^2}{(1-2\sigma_k^2 t)^2}+\frac{\sigma_k^2}{1-2\sigma_k^2 t}\big), t\in(-\infty,1/2). \qquad (11)$$

Предположим, что $\sigma_n^2<1$. Предельный переход при $t\uparrow 1/2$ приводит к невозможному равенству $\infty=a<\infty$ для некоторого числа a. Поэтому должно выполняться равенство $\sigma_n^2=1$. Перепишем равенство (11) в следующем виде

$$n-1=\sum_{k=1}^{n-1}\big(\frac{a_k^2(1-2t)}{(1-2\sigma_k^2 t)^2}+\frac{\sigma_k^2(1-2t)}{1-2\sigma_k^2 t}\big)+\frac{a_n^2}{1-2t}.$$

Предположим, что $a_n^2\neq 0$. Предельный переход при $t\uparrow 1/2$ приводит к невозможному равенству вида $\infty=a<\infty$. Поэтому должно выполняться равенство $a_n=0$. Равенство (11) выполняется для любого n. Поэтому выполняются равенства $a_k=0$ и $\sigma_k^2=1$ для всех $k=1,\dots,n$. Для любого $0<t<1$ существует такое r , что $(r-1)/n\le t<r/n$. Случайная величина $X_{r/n}=(X_t-X_{(r-1)/n})+(X_{r/n}-X_t)$ является суммой двух независимых случайных величин. По теореме Крамера ([2], p. 283) следует, что $X_t-X_{(r-1)/n}$ и $X_{r/n}-X_t$ имеют нормальное распределение. Так как $X_0=0$ п.н. и $Y_1,\dots,Y_n$ независимые нормально распределенные случайные величины, то $X_k/n, k=1,\dots.n$, имеют нормальное распределение. Следовательно, X_t является нормально распределенной случайной величиной с нулевым средним и дисперсией $\mathbb{E}X_t^2=k/n$ для всех $t=k/n, k=1,\dots,n$. Из стохастической непрерывности случайного процесса X следует непрерывность функции $\mathbb{E}X_t^2, t\in[0,1]$. Учитывая, что $\mathbb{E}X_{k/n}^2=k/n$ при всех $k=1,\dots,n$, мы получим равенство $\mathbb{E}X_t^2=t$ для любого $t\ge 0$. Теорема доказана. $\square$

Заключение

В статье были получены результаты, касающиеся характеризаций процесса броуновского движения. Одна из них обобщает теорему Леви о характеризации винеровского процесса в классе непрерывных квадратично интегрируемых мартингалов, другие две используют свойства супермартингальности и хи-квадрат распределенности преобразований броуновского движения.

Благодарность

Автор выражает благодарность профессору Круглову В.М. за ценные советы и помощь при подготовке статьи к публикации

Список литературы

[1] Круглов В.М. Случайные процессы. Часть 1. Основы общей теории. М.: Юрайт, 2016. 276 с.

[2] Loève M. Probability theory I. Springer-Verlag, 1977. 428 p.

[3] Круглов В.М. Замечание к теории безгранично делимых распределений // Теория вероятностей и ее примененения. 1970. Т. 15, № 2. С. 330–336.

[4] Круглов В.М. Интегралы по безгранично делимым распределениям в гильбертовом пространстве // Математические заметки. 1972. Т. 11, № 6. С. 669–676.

[5] Rossberg H.-J., Jesiak B., Siegel G. Analytical Methods of Probability Theory. Berlin: Akademie-Verlag, 1985. 311 p.

[6] Sato Ken-Iti. Levy Processes and Infinitely Divisible Distributions. Cambridge: University Press, 1999. 486 p.

[7] Якымив А.Л. Вероятностные приложения тауберовых теорем. М.: Физматлит, 2005. 256 с.

[8] Круглов В.М., Антонов А.Н. Об асимптотическом поведении безгранично делимых распределений в банаховом пространстве // Терия вероятностей и ее применения. 1982. Т. 17, № 4. С. 625–642.

[9] Hogg R.V., Craig A.T. Introduction to mathematical statistics. New York: Macmillan, 1970. 415 p.

Образец цитирования

Казанчян Д.Х. Новые характеризации броуновского движения // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 1. С. 43–54. https://doi.org/10.26456/vtpmk493

Сведения об авторах

1. **Казанчян Драстамат Хачатурович**
студент кафедры математической статистики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ.

NEW CHARACTERIZATIONS OF BROWNIAN MOTION

Kazanchyan Drastamat Khachaturovich
Student of Mathematical Statistics department,
Lomonosov Moscow State University
Russia, 119992, Moscow, GSP-1, 1-52, Leninskiye Gory, MSU.

Received 21.10.2017, revised 11.02.2018.

In the paper new characterizations of Brownian motion are proved. They generalize and supplement the famous Levi theorem on the characterization of the process of Brownian motion in the class of square integrable continuous martingales. The first characterization (Theorem 1) generalizes the Levi theorem. Two other characterizations (Theorems 2 and 3) are analogues of the Levi theorem, in which the continuity condition is replaced by other conditions.

Keywords: Levy theorem, process with independent increments, infinitely divisible distributions, Brownian motion, martingales.

Citation

Kazanchyan D.Kh. New characterizations of Brownian motion. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2018, no. 1, pp. 43–54. (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk493

References

[1] Kruglov V.M. *Sluchainye Protsessy. Chast' 1. Osnovy Obshchei Teorii.* [Stochastic Processes. Book 1. Fundamentals of General Theory]. Yurait Publ., Moscow, 2016. 276 p. (in Russian)

[2] Loève M. *Probability theory I.* Springer-Verlag, 1977. 428 p.

[3] Kruglov V.M. A Note on infinitely divisible distributions. *Teoriya veroyatnostei i ee primeneniya* [Theory of Probability and its Applications], 1970, vol. 15(2), pp. 330–336. (in Russian)

[4] Kruglov V.M. Integrals with respect to infinitely divisible distributions in a Hilbert space. *Matematicheskie Zametki* [Mathematical Notes], 1972, vol. 11(6), pp. 669–676. (in Russian)

[5] Rossberg H.-J., Jesiak B., Siegel G. *Analytical Methods of Probability Theory.* Akademie-Verlag, Berlin, 1985. 311 p.

[6] Sato Ken-Iti. *Levy Processes and Infinitely Divisible Distributions.* University Press, Cambridge, 1999. 486 p.

[7] Yakymiv A.L. *Veroyatnostnye Prilozheniya Tauberovykh Teorem* [Probabilistic Applications of Tauberian Theorems]. Fizmatlit Publ., Moscow, 2005. 256 p. (in Russian)

[8] Kruglov V.M., Antonov A.N. Once more on the asymptotic behavior of infinitely divisible distributions in Banach space. *Teoriya Veroyatnostei i ee Primeneniya* [Theory of Probability and its Applications], 1982, vol. 17(4), pp. 625–642. (in Russian)

[9] Hogg R.V., Craig A.T. *Introduction to mathematical statistics.* Macmillan, New York, 1970. 415 p.