

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 51.76, 510.676, 519.7

### О ЗАДАЧЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ МГНОВЕННОГО СЕРДЕЧНОГО РИТМА

Беспалько Е.В., Губин В.А., Михеев С.А., Редчиц В.П., Рыжиков В.Н.  
Тверской государственной университет, г. Тверь

---

*Поступила в редакцию 07.03.2017, после переработки 19.02.2018.*

---

В работе численно решена система нелинейных уравнений, определяющая параметры модели мультифрактальной динамики (МФД) мгновенного сердечного ритма (МСР) одного из пациентов Тверского кардиологического диспансера, методом градиентного спуска с оптимальным выбором шага. Построена зависимость скорости изменения МСР от фрактальной размерности. Из нее следует, что значения фрактальной размерности МСР на временных промежутках перед скачком находятся вблизи значения в точке бифуркации, максимально уклоняясь всего на 0.04. Показано, что необходимым условием скачка МСР является близость к значению в точке бифуркации фрактальной размерности МСР перед скачком. Получена формула для оценки диаметра области скачков МСР и на ее основе проведена его оценка. Показана близость значения фрактальной размерности в точке бифуркации к гауссовскому значению 1.5. Составлена и реализована компьютерная программа по подсчету частоты скачков МСР для исследуемого пациента. Среднее ее значение оказалось равным  $956.526 \text{ час}^{-1}$ .

**Ключевые слова:** мгновенный сердечный ритм, бифуркационные катастрофы, модель мультифрактальной динамики, скачки мгновенного сердечного ритма, метод градиентного спуска, регуляризованный метод Ньютона.

*Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 1. С. 55–67.*  
<https://doi.org/10.26456/vtprm494>

#### Введение

Статистические данные Всемирной Организации Здравоохранения (ВОЗ) глобальных причин всех случаев смерти народонаселения Земли за 2011 год показали, что сердечно-сосудистые заболевания занимают лидирующее положение и составляют 31%.

Эти данные статистики указывают на актуальность разработки новых высокоточных и эффективных математических и компьютерных методов по исследованию сердечных ритмов на основе холтеровского мониторинга (ХМ) и математического моделирования.

Актуальность исследования сердечных ритмов тесно связана с необходимостью выявления новых маркеров неблагоприятных сердечно-сосудистых эпизодов. Одним из вариантов решения этой проблемы является создание новых математических и компьютерных методов анализа мгновенного сердечного ритма (МСР) в модели мультифрактальной динамики (МФД) на основе ХМ [1–6]. Данные методы позволяют прогнозировать возможные сердечно-сосудистые катастрофы.

В работе [7], на основе анализа конкретных данных ХМ, обнаружено явление наличия больших скачков (катастроф) МСР, когда значение МСР изменяется на 2 порядка. В ней, в рамках МФД, выявлена математическая природа данного явления. В частности, показано, что фрактальная размерность МСР  $D$  перед скачком должна достигать близкого к вычисленному в модели МФД значению  $D_b$  в точке бифуркации. Данные наблюдений МСР и результаты расчетов параметров МФД конкретного пациента Тверского кардиологического диспансера приведены в таблицах и сравниваются с состоянием его сердечно-сосудистой системы. При этом показано хорошее согласие данных расчета и параметров состояния.

В работе [7], в отличие от нашей работы, предполагалась реальная изменчивость внешних факторов, влияющих на МСР, и определяемая параметрами  $\eta_i$  на протяжении всех трех периодов наблюдения. Система уравнений, определяющая параметры МФД при  $\eta = const$  на всех трех временных интервалах не всегда будет совместной. В [7] считалось, что в каждом из периодов  $i$  параметр  $\eta$  можно представить в виде суммы постоянной части и малой вариативной части. За счет вариативности  $\eta$  полученная в [7] система будет всегда иметь точное решение. При нахождении постоянной части параметра  $\eta$  и остальных параметров МФД использовался метод градиентного спуска с постоянным шагом.

В данной работе по результатам ХМ другого пациента Тверского кардиологического диспансера вычисляются параметры модели МФД динамики МСР, при этом параметр  $\eta$ , в отличие от [7], считается постоянным. Для решения нелинейной системы уравнений, определяющей значения этих параметров, применяется метод градиентного спуска с оптимальным выбором шага при минимизации невязки  $u$ .

## 1. Основные уравнения МСР в модели МФД

МСР — обобщение понятия сердечного ритма, используемого в медицинской практике. При усреднении МСР по временному интервалу в одну минуту получается значение сердечного ритма. Согласно методике построения кривой МСР получаем ее графики на различных временных промежутках. Выбор исследуемого промежутка был случайным, и по нему строились графики зависимости мгновенного ритма от времени, то есть функции  $y(t)$ . Построение функции  $y(t)$  происходило следующим образом:  $i$  — номер текущего  $RR$ -интервала (временного интервала между  $R$  зубцами на электрокардиограмме пациента),  $i = 1, \dots, n$ ,  $n$  — число сердечных сокращений за время наблюдения  $T$ . Значение МСР на  $i$ -м  $RR$ -интервале имеет вид [1, 2]:

$$y_i = \frac{60}{T_{RR_i}}. \quad (1)$$

На всем промежутке  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$  кривая сердечного ритма  $y(t)$  будет иметь представление

$$y(t) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} (t - t_i). \quad (2)$$

Наряду с  $y(t)$  можно ввести кусочно-линейную функцию  $v(t)$ , которая характеризует скорость изменения МСР и значения  $v_i$  которой представляют собой разностную производную функции  $y(t)$ :

$$v_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i}. \quad (3)$$

Из значений  $v_i$  строится функция  $v(t)$  на всех промежутках  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$  аналогично построению (2) функции  $y(t)$ .

На Рис. 1 представлена функция МСР  $y(t)$  на временном промежутке в 491 секунду.

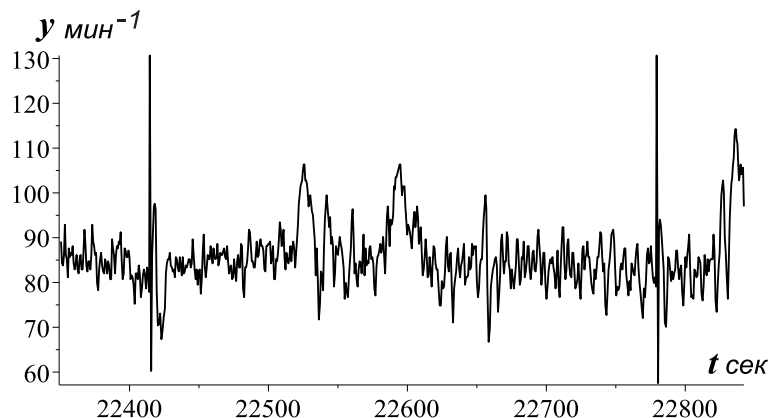


Рис. 1: Зависимость значений МСР  $y$  от времени  $t$

Из Рис. 1 видно, что функция МСР на разных временных промежутках имеет регулярный и скачкообразный виды. Для первого вида модуль функции  $v(t)$  имеет значение порядка 1-3 единиц  $\text{мин}^{-1}\text{сек}^{-1}$  а для второго вида модуль функции  $v(t)$  имеет значение порядка и больше 6 единиц  $\text{мин}^{-1}\text{сек}^{-1}$ . Целью настоящей работы является выяснение математической природы скачков МСР и их свойств.

Для исследования характера скачков МСР выберем временной интервал, содержащий как скачок, так и регулярный вид перед скачком. График функции  $y(t)$  на этом временном интервале представим на Рис. 2.

Исследование в области регулярного МСР будем проводить в рамках модели МФД. Согласно модели МФД динамику мультифрактального процесса на интервале  $T_i$  (в дальнейшем индекс  $i$  будем опускать) разделим на две составляющие, используя понятие кусочно-линейного тренда

$$y(t) = \bar{y}(t) + \tilde{y}(t) = KX(D)(t - t_0) + \tilde{y}(t), \quad (4)$$

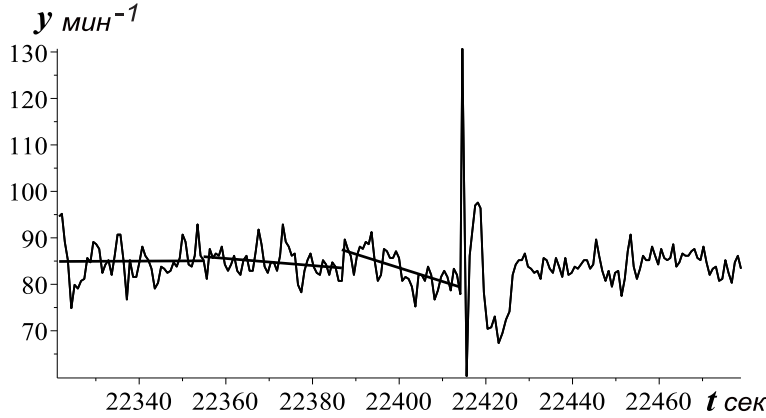


Рис. 2: Зависимость значений МСР  $y$  от времени  $t$  в исследуемом временном интервале, содержащем как скачок, так и регулярный вид перед скачком

$\bar{y}(t)$  — кусочно-линейный тренд,  $\tilde{y}(t)$  — осцилляции относительно кусочно-линейного тренда,  $K$  — размерный коэффициент, который мы возьмем равным  $10^3$  мин<sup>-1</sup>сек<sup>-1</sup>. Фрактальная размерность МСР  $D$  полностью определяется функцией  $\tilde{y}(t)$ .

В модели МФД  $X(D)$  определяется уравнением:

$$A(D)X + B_0X^3 = \eta. \quad (5)$$

В этом уравнении считается  $X \ll 1$ . Параметр  $\eta$  описывает эффективное влияние внешних факторов на МСР.

Для функции  $A(D)$  в (5) будем использовать следующее приближенное аналитическое представление не гладкой функции с параметром регуляризации  $\varepsilon$  [7]:

$$A(D) = \frac{D_0 - D_k + (D - D_k)e^{(D-D_0)/\varepsilon}}{(D_0 - D)(D_0 - D_k)(1 + e^{(D-D_0)/\varepsilon})}, \quad (6)$$

где  $\varepsilon$  — вспомогательный параметр, выбираемый из условия:  $\varepsilon \ll 1$ . Представление (6) функции  $A(D)$  допускает его использование для расчетов по методу градиентного спуска. Этот метод основан на дифференцировании этой функции по искомым параметрам, отсюда вытекает требование ее гладкости.

Параметры модели  $D_0$ ,  $D_k$ ,  $B_0$  и  $\eta$  выбираются из наилучшего согласия с опытными данными.

Точка бифуркации  $D_b$  для нас является важной и определяется из условия

$$\frac{A(D_b)}{B_0\eta^{2/3}} = -\sqrt[3]{\frac{27}{4}}, \quad D_b = D_b(D_0, D_k, B_0, \eta). \quad (7)$$

Из (5) для регулярных областей МСР имеем

$$X = A^{-1}(D)\eta. \quad (8)$$

Для одиночных скачков МСР значение  $X$  в точке скачка  $X_p$  можно оценивать согласно соотношению

$$X_p = \frac{y_p - y_0}{\tau_p/2},$$

где  $y_p$  — значение МСР в точке максимума,  $y_0$  — значение МСР в начале пика и  $\tau_p$  — ширина пика. Тогда параметры МФД в регулярных областях определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} X_i - A^{-1}(D_i, D_0, D_k)\eta &= 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ B_0 = 4\eta X_p^{-3}, \quad D_b &= (X_p D_k + 3\eta D_0(D_k - D_0))(X_p + 3\eta(D_k - D_0))^{-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

В нашем случае количество  $D_i$  и  $X_i$  в (9) равно числу исследуемых перед скачком интервалов (Рис. 2), которое выбирается по числу искомым параметров модели МФД  $D_0, D_k, \eta$ . Чтобы было большее число  $D_i$  и  $X_i$  необходимо выбирать большее число интервалов. При этом интервалы будут все дальше удаляться от момента скачка и, следовательно, их параметры будут все меньше и меньше связаны со скачком. Поэтому, на наш взгляд, достаточно трех ближайших интервалов к моменту скачка.

Для решения системы (9) представим ее в виде

$$f_i = X_i - A^{-1}(D_i, D_0, D_k)\eta = 0. \quad (10)$$

## 2. Метод градиентного спуска для решения уравнений МСР в модели МФД

Для нахождения приближенных значений  $D_0, D_k, \eta$  в системе уравнений (10) минимизируется невязка

$$u = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}.$$

Для удобства обозначения сделаем замену переменных

$$x_1 = D_0, \quad x_2 = D_k, \quad x_3 = \eta, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3).$$

Для минимизации невязки  $u$  применим метод градиентного спуска, который просто программируется на ЭВМ и обладает хорошим быстродействием в задачах с малым числом параметров ( $\lesssim 5$ ), однако становится громоздким и неустойчивым при увеличении их числа [8]:

$$\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{x}^{(n-1)} - \lambda_n \nabla u^{(n-1)}, \quad u^{(n)} = u(\mathbf{x}^{(n)}). \quad (11)$$

Здесь  $\lambda_n$  — шаг процесса.

Точность метода градиентного спуска существенно зависит от рельефа функции  $u$ . Так, в случае, если эта функция имеет овражную структуру, итерации часто почти не двигаются в нужном направлении, что существенно замедляет сходимость и уменьшает точность решения системы уравнений. Покажем, что у нас рельеф функции  $u = u(D_0, D_k, \eta)$  как раз имеет такую сложную овражную структуру. Для этого построим график функции  $u$  при фиксированном значении

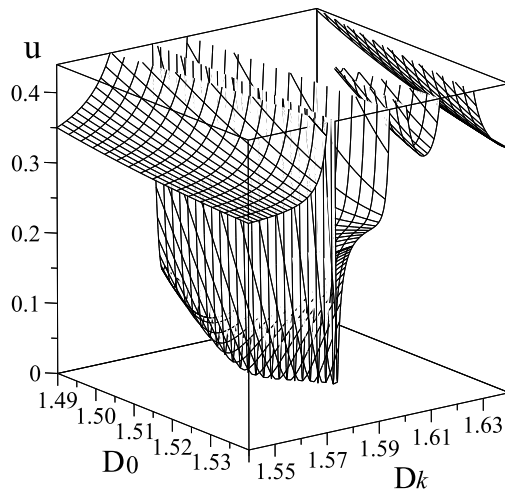


Рис. 3: График функции  $u(D_0, D_k, \eta = 0.3 \cdot 10^{-3})$

$\eta = 0.3 \cdot 10^{-3}$ , который приводится на Рис. 3. Другие значения  $\eta$  дают качественно близкую картину.

Для ускорения итерационного процесса будем использовать оптимальный выбор шага [8].

Согласно итерационной схеме (11) функция  $u^{(n)}$  зависит от шага итерации  $\lambda_n$  следующим образом

$$u^{(n)} = u(\mathbf{x}^{(n-1)} - \lambda_n \nabla u^{(n-1)}). \quad (12)$$

Минимизируя  $u^{(n)}$  в точке  $\lambda_n$ , имеем уравнение

$$F = \nabla u \left( \mathbf{x}^{(n-1)} - \lambda_n \nabla u^{(n-1)} \right) \cdot \nabla u^{(n-1)} = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) будем решать регуляризованным методом Ньютона в связи с тем, что значения функции  $\partial F / \partial \lambda_n$  могут быть близкими к нулю и стандартная схема Ньютона неприменима. Итерационная схема регуляризованного метода Ньютона [9] для решения (13) будет иметь вид

$$\lambda_n^{(k)} = \lambda_n^{(k-1)} - \tau_k \frac{F' \left( \lambda_n^{(k-1)} \right) F \left( \lambda_n^{(k-1)} \right)}{\alpha^2 F^2 \left( \lambda_n^{(k-1)} \right) + F'^2 \left( \lambda_n^{(k-1)} \right)}, \quad (14)$$

где начальное приближение выбирается следующим образом:  $\lambda_n^{(0)} = \lambda_{n-1}$ . Предел последовательности  $\{\lambda_n^{(k)}\}$  представляет собой оптимальный шаг итерационной схемы (11).

При проведении конкретной вычислительной процедуры мы будем использовать следующий подход. Как только вычисляется значение  $\lambda_n$  с нужной нам степенью точности, по нему находим значение  $\mathbf{x}^{(n)}$  и соответственно значение  $u^{(n)}$ . Если значение невязки  $u^{(n)}$  не достаточно мало, то по той же схеме вычисляем  $\mathbf{x}^{(n+1)}$  и  $u^{(n+1)}$ .

### 3. Результаты расчетов и их обсуждение

Для реализации итерационной процедуры (11) нами составлена и реализована программа в системе символьной математики MAPLE. Начальное приближение  $\mathbf{x}^{(0)}$  выбиралось с учетом структуры системы уравнений (10) и конкретных значений  $D_i$  и  $X_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). В результате проведенных вычислений получены значения параметров МСР на исследуемом временном интервале, представленные в таблице 1.

Таблица 1: Значения параметров МСР на исследуемом временном интервале

$i$	1	2	3
$D_i$	1.596	1.619	1.573
$X_i$	$0.088 \cdot 10^{-3}$	$0.024 \cdot 10^{-3}$	$-0.308 \cdot 10^{-3}$
$X_p$	$38.4 \cdot 10^{-3}$		
$\tau_p$	2.5 сек.		
$D_0$	1.5142		
$D_k$	1.5775		
$\eta$	$0.2948 \cdot 10^{-3}$		
$D_b$	1.5774		
$B_0$	20.8254		
$u$	$2.6322 \cdot 10^{-2}$		

При этом число итераций реализованного метода градиентного спуска с оптимальным выбором шага потребовалось на порядок меньше для достижения полученного значения невязки  $u$  (Таблица 1), чем при использовании просто метода градиентного спуска.

Рассчитанные нами параметры МСР в модели МФД, позволяют нам построить наглядную графическую зависимость скорости изменения МСР  $X$  от произвольных значений фрактальной размерности МСР  $D$  для исследуемого пациента. Она приводится на Рис. 4.

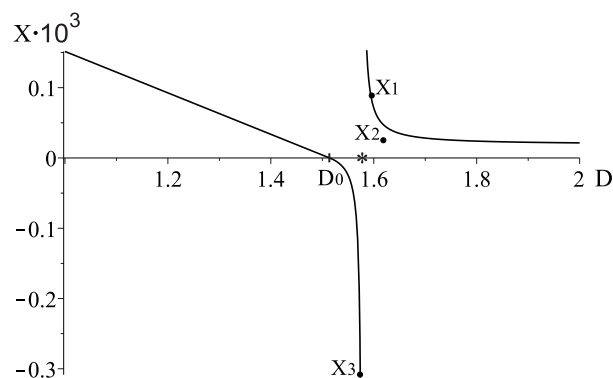


Рис. 4: График функции  $X(D)$

Точками на Рис. 4 обозначены значения  $X_i$ , а окрестность  $C_{D_b}$  точки  $D_b$ , определяемая условием  $D_b - \Delta \leq D \leq D_b + \Delta$ , обозначена \*. Величина  $\Delta$  находится из условия, что значение  $X \geq 6 \cdot 10^{-3}$  должно выполняться в области скачков МСР. Только в этом интервале параметр  $X$  будет достигать значения порядка  $X_p = 38.4 \cdot 10^{-3}$ . Из этого условия вытекает формула

$$\Delta = \left| \frac{\eta(D_0 - D_b)^2}{6 \cdot 10^{-3}} \right|. \quad (15)$$

Из данных таблицы 1 следует, что  $\Delta = 1.96 \cdot 10^{-4}$ .

Если  $D$  принимает значения из области  $C_{D_b}$ , то значения  $X(D)$  становятся большими  $6 \cdot 10^{-3}$ , что соответствует скачкам (катастрофам) МСР. Поэтому область  $C_{D_b}$  естественно назвать областью скачков МСР. Наблюдаемый нами скачок МСР имеет значение  $X_p = 3.84 \cdot 10^{-2}$  и поэтому в области скачка фрактальная размерность МСР  $D$  должна быть очень близкой к значению  $D_b = 1.5774$ , отличающееся от него на значение меньше или равное  $\Delta$ .

В нашем случае диаметр области скачков МСР  $C_{D_b}$  очень мал и равен  $3.92 \cdot 10^{-4}$ . В системе символьной математики MAPLE нами составлена и реализована компьютерная программа по подсчету частоты скачков МСР  $\nu_p$  для исследуемого пациента. Оно оказалось достаточно большим и равным  $\nu_p = 956.526 \text{ час}^{-1}$ . Это говорит о том, что состояние пациента приближается к зоне риска получения сердечно-сосудистой патологии.

При расчете величины  $\Delta$  мы брали  $\eta = 0.2948 \cdot 10^{-3}$ . В случае, если  $\eta \sim 1$  и больше, то величина  $\Delta$  оказывается порядка 0.6. При таких больших размерах диаметра области скачков их частота  $\nu_p$  должна увеличиться не менее чем на порядок. По-видимому, этот случай должен соответствовать состоянию аритмии.

Чтобы понять механизм скачков МСР найдем разность значений фрактальной размерности МСР на временных интервалах перед скачком  $D_i$  и в точке бифуркации  $D_b$ :  $D_b - D_i$ . Для первого временного интервала она будет равна  $-0.0186$ , для второго временного интервала  $-0.0416$ , для третьего  $0.0044$ . Из этих оценок мы видим, что фрактальная размерность  $D_i$  ( $i = 1, 2$ ) в начале временного интервала перед скачком МСР имеет значение несколько большее чем  $D_b$ , а в конце этого временного интервала  $D_i$  ( $i = 3$ ) будет иметь меньшее значение, то есть происходит перескок значения  $D$  через область скачков МСР  $C_{D_b}$ . Далее, следует попадание  $D$  в область скачков МСР  $C_{D_b}$  и соответственно возникновение скачка (катастрофы) МСР. Данный характер поведения фрактальной размерности МСР подтверждает математическую природу скачков МСР, которая была выявлена в [7] для другого пациента.

Из описанного нами характера поведения фрактальной размерности МСР  $D$  следует, что МСР будет регулярным, когда  $|D_b - D| \gg \Delta$ . Поскольку фрактальная размерность МСР  $D$  отражает степень его хаотичности, то для выхода из области скачков МСР в область регулярного МСР, на наш взгляд, необходимо уменьшить  $D$  до ее гауссовского значения 1.5 и ниже за счет приема соответствующих лекарственных препаратов, диеты, недопущения состояния стресса, отказа от курения, спиртных напитков и других профилактических мер рекомендуемых кардиологами.



## Заключение

В работе получена и численно решена система уравнений с использованием метода градиентного спуска с оптимальным выбором шага, позволяющая вычислить параметры МСР в модели МФД одного из пациентов Тверского кардиологического диспансера. Величина невязки при этом составила  $2.6322 \cdot 10^{-2}$ . Рассчитанные значения параметров МСР модели МФД приведены в таблице 1. Из данных этой таблицы следует, что значения фрактальной размерности МСР в точке бифуркации и критической точке практически совпадают, отличаясь на 0.0001. Необходимо отметить, что точка бифуркации  $D_b$  очень мало отличается гауссовского значения 1.5 всего на 0.0774.

Полученным в работе результатам дана наглядная геометрическая интерпретация. С этой целью построена зависимость скорости изменения МСР  $X$  от произвольных значений фрактальной размерности МСР  $D$  для исследуемого пациента. Из нее следует, что значения фрактальной размерности МСР на временных периодах перед скачком находятся вблизи значения  $D_b$  максимально уклоняясь всего на 0.04. Тем самым нами наглядно показано, что необходимым условием скачка МСР является близость фрактальной размерности МСР  $D$  перед скачком к вычисленному в модели МФД значению  $D_b$  в точке бифуркации. Этот результат согласуется с сформулированным ранее необходимым условием скачка МСР в [7].

Получена формула для оценки диаметра области скачков МСР  $C_{D_b}$  (15) и на ее основе проведена оценка для параметра  $\Delta$ , определяющего размеры этой области. Показана близость значения фрактальной размерности в точке бифуркации к гауссовскому значению 1.5, что говорит о возможности возникновения скачков при еще достаточно регулярном ритме МСР.

Составлена и реализована компьютерная программа по подсчету частоты скачков МСР  $\nu_p$  для исследуемого пациента. Среднее ее значение оказалось равным  $956.526 \text{ час}^{-1}$ , что является достаточно большой величиной.

## Список литературы

- [1] Кудинов А.Н., Лебедев Д.Ю., Цветков В.П., Цветков И.В. Математическая модель мультифрактальной динамики и анализ сердечных ритмов // Математическое моделирование. 2014. Т. 26, № 10. С. 127–136.
- [2] Иванов А.П., Кудинов А.Н., Лебедев Д.Ю., Цветков В.П., Цветков И.В. Анализ мгновенного сердечного ритма в модели мультифрактальной динамики на основе холтеровского мониторинга // Математическое моделирование. 2015. Т. 27, № 4. С. 16–30.
- [3] Kudinov A.N., Tsvetkov V.P., Tsvetkov I.V. Catastrophes in the multifractal dynamics of socioeconomic systems // Russian Journal of Mathematical Physics. 2011. Vol. 18, № 2. Pp. 149–155.
- [4] Кудинов А.Н., Лебедев Д.Ю., Иванов А.П., Рыжиков В.Н., Цветков В.П., Цветков И.В. Самоподобие скаттерограммы мгновенного сердечного ритма // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 3. С. 105–115.

- [5] Кудинов А.Н., Лебедев Д.Ю., Рыжиков В.Н., Цветков В.П., Цветков И.В., Иванов А.П. Самоподобие и фрактальная размерность скаттерограммы мгновенного сердечного ритма // Научные технологии. 2015. № 5. С. 57–63.
- [6] Иванов А.П., Кудинов А.Н., Лебедев Д.Ю., Михеев С.А., Цветков В.П., Цветков И.В. Бифуркационные катастрофы мгновенного сердечного ритма в модели мультифрактальной динамики // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 1. С. 63–73.
- [7] Иванов А.П., Кудинов А.Н., Лебедев Д.Ю., Михеев С.А., Цветков В.П., Цветков И.В. Катастрофы мгновенного сердечного ритма в модели мультифрактальной динамики и по данным холтеровского мониторинга // Математическое моделирование. 2017. Т. 29, № 5. С. 73–84.
- [8] Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
- [9] Ермаков В.В., Калиткин Н.Н. Оптимальный шаг и регуляризация метода Ньютона // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1981. Т. 21, № 2. С. 419–497.

#### Образец цитирования

Беспалько Е.В., Губин В.А., Михеев С.А., Редчиц В.П., Рыжиков В.Н. О задаче вычисления параметров модели мультифрактальной динамики мгновенного сердечного ритма // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 1. С. 55–67. <https://doi.org/10.26456/vtprm494>

#### Сведения об авторах

**1. Беспалько Евгений Валерьевич**

доцент кафедры общей математики и математической физики Тверского государственного университета.

*Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.*

*E-mail: [be80@list.ru](mailto:be80@list.ru)*

**2. Губин Виктор Александрович**

магистрант математического факультета Тверского государственного университета.

*Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.*

*E-mail: [icesilence@mail.ru](mailto:icesilence@mail.ru)*

**3. Михеев Сергей Александрович**

доцент кафедры общей математики и математической физики Тверского государственного университета.

*Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.*

*E-mail: [sergjan800@rambler.ru](mailto:sergjan800@rambler.ru)*

**4. Редчиц Валерий Петрович**

доцент кафедры общей математики и математической физики Тверского государственного университета.

*Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.*

*E-mail: [Redchits.VP@tversu.ru](mailto:Redchits.VP@tversu.ru)*

**5. Рыжиков Владимир Николаевич**

доцент кафедры общей математики и математической физики Тверского государственного университета.

*Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.*

*E-mail: [vlnr@mail.ru](mailto:vlnr@mail.ru)*

**GRADIENT DESCENT METHOD  
IN COMPUTATION OF INSTANTANEOUS CARDIAC RHYTHM  
MULTIFRACTAL MODEL PARAMETERS**

**Bespalko Evgeniy Valeryevich**

Associate professor at General Mathematics and Mathematical Physics department,  
Tver State University

*Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TverSU. E-mail: [be80@list.ru](mailto:be80@list.ru)*

**Gubin Viktor Alexandrovich**

Master student at Mathematics faculty, Tver State University

*Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TverSU. E-mail: [icesilence@mail.ru](mailto:icesilence@mail.ru)*

**Mikheev Sergey Alexandrovich**

Associate professor at General Mathematics and Mathematical Physics department,  
Tver State University

*Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TverSU. E-mail: [sergjan800@rambler.ru](mailto:sergjan800@rambler.ru)*

**Redchits Valeriy Petrovich**

Associate professor at General Mathematics and Mathematical Physics department,  
Tver State University

*Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TverSU. E-mail: [Redchits.VP@tversu.ru](mailto:Redchits.VP@tversu.ru)*

**Ryzhikov Vladimir Nikolaevich**

Associate professor at General Mathematics and Mathematical Physics department,  
Tver State University

*Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TverSU. E-mail: [vlnr@mail.ru](mailto:vlnr@mail.ru)*

---

*Received 07.03.2017, revised 19.02.2018.*

---

In this paper we present the numerically solved system of nonlinear equations which determinates the parameters of multifractal dynamics model (MFD) of instantaneous cardiac rhythm (ICR) of one of the patients of Tver cardiology health center using a gradient descent method with step size optimization. We constructed the ICR change rate-fractal dimension relation. It follows that the ICR fractal dimension values in pre-jump time intervals are located in close proximity to the bifurcation point value while maximally deviating by just 0.04. We showed that the ICR jump necessary condition is the proximity to the bifurcation point value of pre-jump ICR fractal dimension. We obtained the formula for evaluation of ICR jump area diameter, and on its basis we evaluated this diameter. We showed the proximity of the fractal dimension value in bifurcation point to the Gaussian value which was 1.5. We wrote and implemented the software program to count the ICR jump frequency for the patient under examination. The average value was found to be  $956.526 \text{ hour}^{-1}$ .

**Keywords:** instantaneous heart rate, bifurcation catastrophes, multifractal dynamics model, instantaneous heart rate jumps, gradient descent method, regularized Newton method.

### Citation

Bespalko E.V., Gubin V.A., Mikheev S.A., Redchits V.P., Ryzhikov V.N. Gradient descent method in computation of instantaneous cardiac rhythm multifractal model parameters. *Vestnik Tvgu. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2018, no. 1, pp. 55–67. (in Russian). <https://doi.org/10.26456/vtpmk494>

### References

- [1] Kudinov A.N., Lebedev D.Yu., Tsvetkov V.P., Tsvetkov I.V. Mathematical model of multifractal dynamics and analysis of heart rhythms. *Matematicheskoe Modelirovanie* [Math Modeling], 2014, vol. 26(10), pp. 127–136. (in Russian)
- [2] Ivanov A.P., Kudinov A.N., Lebedev D.Yu., Tsvetkov V.P., Tsvetkov I.V. Analysis of instantaneous heart rate in the model of multifractal dynamics based on Holter monitoring. *Matematicheskoe Modelirovanie* [Math Modeling], 2015, vol. 27(4), pp. 16–30. (in Russian)
- [3] Kudinov A.N., Tsvetkov V.P., Tsvetkov I.V. Catastrophes in the multifractal dynamics of socioeconomic systems. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 2011, vol. 18(2), pp. 149–155.
- [4] Kudinov A.N., Lebedev D.Yu., Ryzhikov V.N., Tsvetkov V.P., Tsvetkov I.V., Ivanov A.P. Self-similarity of a scatterogram of an instant cardiac rhythm. *Vestnik Tvgu. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2014, no. 3, pp. 105–115. (in Russian)
- [5] Kudinov A.N., Lebedev D.Yu., Ryzhikov V.N., Tsvetkov V.P., Tsvetkov I.V., Ivanov A.P. Self-similarity and fractal dimension of the scatterogram of instantaneous cardiac. *Naukoemkie Tekhnologii* [High Technology], 2015, no. 5, pp. 57–63. (in Russian)
- [6] Ivanov A.P., Kudinov A.N., Lebedev D.Y., Mikheev S.A., Tsvetkov V.P., Tsvetkov I.V. Bifurcation catastrophes of an instant cardiac rhythm in multifractal dynamics model. *Vestnik Tvgu. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2016, no. 1, pp. 63–73. (in Russian)
- [7] Ivanov A.P., Kudinov A.N., Lebedev D.Yu., Mikheev S.A., Tsvetkov V.P., Tsvetkov I.V. Disasters of instantaneous heart rhythm in the model of multifractal dynamics and based on Holter monitoring data. *Matematicheskoe Modelirovanie* [Math Modeling], 2017, vol. 29(5), pp. 73–84. (in Russian)
- [8] Kalitkin N.N. *Chislennye Metody* [Numerical Methods]. Nauka Publ., Moscow, 1978. 512 p. (in Russian)
- [9] Ermakov V.V., Kalitkin N.N. Optimal step and regularization of the Newton method. *Zhurnal Vychislitel'noy Matematiki i Matematicheskoy Fiziki* [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1981, vol. 21(2), pp. 419–497. (in Russian)