УДК 519.6

МНОГОУРОВНЕВОЕ ОБОБЩЕНИЕ МОДЕЛИ «НАПАДЕНИЕ-ОБОРОНА»

Перевозчиков А.Г.*, **Решетов В.Ю.****, **Шаповалов Т.Г.****
* ИнноЦентр высшей школы им. Е.А. Лурье ТвГУ, г. Тверь
** ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва

Поступила в редакцию 15.05.2016, после переработки 20.09.2016.

Рассматривается многоуровневое обобщение модели «нападение-оборона», определенное и изученное Ю.Б. Гермейером. Она является модификацией модели О. Гросса. Сходная модель была предложена В.А. Гореликом для производства бензина. Предлагается простейшее расширение модели «нападение-оборона», состоящее в том, что оборона каждого пункта имеет многоуровневый характер, но эффективность средств обороны не зависит от номера уровня. В этих предположениях игровая модель полностью изучена и получено прямое обобщение результатов одноуровневой модели на многоуровневый случай, которые могут быть использованы для построения многоуровневой обороны.

Ключевые слова: игра «нападение-оборона», максиминная стратегия нападения, гарантированный результат нападения, минимаксная стратегия обороны, гарантированный результат обороны, значение игры, оптимальная смешанная стратегия нападения, оптимальная чистая стратегия защиты.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 1. С. 57–69.

Введение

Рассматривается задача распределения ресурсов в многоуровневой модели «нападение-оборона». В общем случае эта задача может быть сведена к задаче линейного программирования. Однако в простейшем случае, когда эффективность средств обороны не зависит от номера уровня, ее решение может быть найдено при помощи алгоритма последовательного распределения ресурса предложенного в работе [11]. Это приводит к выражению для оптимального значения критерия в форме близкой к использованной в модели «нападение-оборона», определенной и изученной Ю.Б. Гермейером в работе [2]. Она является модификацией модели О. Гросса [1]. Сходная модель была предложена В.А. Гореликом для производства бензина [3]. Таким образом, поставленная задача распределения ресурсов позволяет обобщить модель «нападение-оборона» в части учета многоуровневого характера обороны каждого пункта. Описанная многоуровневая игровая модель «нападение-оборона» изучается в настоящей работе. При этом получено прямое обобщение решения одноуровневой игры «нападение-оборона» [4] на многоуровневый случай, которое может быть использовано для построения многоуровневой обороны.

Непрерывные и дискретные постановки основных задач распределения ресурсов систематически изложены в [5]. В частности принцип уравнивания Ю.Б. Гермейера, на котором основано вычисление гарантированного результата обороны, являющегося значением игры «нападение-оборона». В работе [6] изучалась модель Гросса с непротивоположными интересами сторон, в работах [7,8] – гарантированный результат защиты с произвольными выпуклыми аддитивными функциями выигрыша в условиях целочисленности переменных, в работах [9,10] – динамические расширения модели. В военных моделях пункты интерпретируются обычно как направления и характеризуют пространственное распределение ресурсов защиты по ширине фронта обороны. Однако реально имеет место также пространственное распределение ресурсов защиты по глубине обороны, характеризующейся количеством уровней защиты на данном направлении.

В работе [11] изучалась простейшая модель многоуровневой системы защиты на заданном направлении. В работе [12] дополнительно учитывались вероятности воздействия на каждом уровне защиты, определяемые формулой Эрланга. В работе [13] эти результаты получают дальнейшее развитие в части учета предварительного подавления средств защиты нападением. В работе [14] были определены и изучены различные информационные расширения игры «нападение-оборона», исследованной в [4], на орграфах с одним источником и стоком, которые определяют возможные пути подхода к обороняемому объекту.

1. Многоуровневая модель «нападение-оборона»

Имеется T уровней защиты с номерами $t = 0, 1, ..., T - 1$. Пусть X и U – общее количество средств нападения и обороны, которые считаются однородными и бесконечно-делимыми. Стратегия обороны состоит в распределении своих средств по уровням защиты в соответствии с вектором:

$$u = (u_0, ..., u_{T-1}) \in W = \{\, u | \sum_{t=0}^{T-1} u_t \leqslant U, u_t \geqslant 0, t = 1, ..., T - 1\} \,. \tag{1}$$

Пусть x_t – количество средств нападения противника, прорвавшихся к t-му уровню защиты на заданном направлении, $t = 0, 1, ..., T - 1$. Динамика системы описывается уравнением:

$$x_{t+1} = F_t(x_t, u_t),\ t = 0, 1, ..., T - 1 \tag{2}$$

с начальным условием:

$$x_0 = X. \tag{3}$$

Функции $F_t(.,.)$ в (2) и величина X в (3) считаются известными обороне. Например, в простейшем случае, рассмотренном в [11,12] функции $F_t(.,.)$ имели вид:

$$F_t(x_t, u_t) = \max\{q_t x_t, x_t - p_t r_t u_t\}\,,\ t = 0, 1, ..., T - 1. \tag{4}$$

Здесь r_t – предельное количество воздействий по противнику одним средством обороны, p_t – вероятность поражения средства нападения противника одним воздействием на $t-$м рубеже, $q_t = 1 - p_t$ – соответствующая вероятность непоражения.

Критерий обороны в [11] определялся, как количество x_T средств нападения, преодолевших все рубежи защиты на данном направлении:

$$I(u) = \Phi(x_T) \equiv x_T. \tag{5}$$

Требуется так распределить средства защиты по уровням, чтобы минимизировать количество x_T средств нападения, преодолевших все рубежи защиты на данном направлении:

$$I^* = \min_{u \in W} I(u). \tag{6}$$

Задача (1)-(6) является задачей оптимального дискретного управления (ОПУ) с общими ограничениями на управляющие воздействия u_t, $t = 0, 1, ..., T-1$.

Другие задачи преодоления защиты с использованием функций максимума типа (4) в игровой постановке изучались в [1]. А именно в [1] изучалась задача распределения ресурсов по направлениям $i = 1, ..., n$ на одном уровне защиты, которую в наших обозначениях можно сформулировать следующим образом. Пусть R_i – среднее количество средства нападения, которое может уничтожить одна единица средств обороны на i-м направлении. Требуется решить антагонистическую игру с функцией выигрыша нападения, представляющей собой общее количество прорвавшихся средств нападения:

$$f(X, U) = \sum_{i=1}^{n} \max\{0, X_i - R_i U_i\}. \tag{7}$$

Пусть V и Y – количество средств нападения и защиты. Стратегия обороны состоит в распределении своих средств по направлениям защиты в соответствии с вектором:

$$U = (U_1, ..., U_n) \in A = \{U | \sum_{i=1}^{n} U_i = V, U_i \geqslant 0, i = 1, ..., n\}. \tag{8}$$

Стратегия нападения состоит в распределении своих средств по направлениям в соответствии с вектором:

$$X = (X_1, ..., X_n) \in B = \{X | \sum_{t=1}^{n} X_i = Y, X_i \geqslant 0, i = 1, ..., n\}. \tag{9}$$

Используя выпуклость функции $f(X, U)$ по U, для этой антагонистической игры было доказано, в частности (см., например, [4]), что минимакс:

$$v = \min_{U \in A} \max_{X \in B} f(x, u) = \min_{U \in A} \max_{i=1,...,n} f\left(X^{(i)}, U\right) \tag{10}$$

будет значением игры и минимаксная стратегия обороны оптимальна. Здесь $X^{(i)} = (0, ..., X, ...0)$, где X стоит на i-м месте, а остальные координаты равны нулю. При этом оптимальной стратегией нападения является смешанная стратегия, состоящая в том, чтобы сосредоточить все силы на одном направлении в соответствии с оптимальным распределением вероятностей, которое может быть получено по формулам, также приведенным в [4].

Сопоставляя поставленную в [11,12] задачу (6) управления ресурсами обороны с последним минимаксом в (10), убеждаемся, что можно рассматривать задачу (6) как другой способ определения функции f в (10):

$$f(X^{(i)}, U) = \max\{0, X - P_i U_i\}. \tag{11}$$

Более того, в [11] было показано, что при $p_t \equiv P, q_t \equiv Q, r_t \equiv R$ и отсутствии предварительного подавления средств защиты нападением имеет место формула

$$I^* = \max\left\{Q^T X, X - PRU\right\}, \tag{12}$$

аналогичная (11). Поэтому функцию выигрыша первого игрока в [4] можно было бы определить формулой:

$$f(X, U) = \sum_{i=1}^{n} \max\left\{Q_i^T X_i, X_i - P_i R_i U_i\right\}. \tag{13}$$

Заметим, что $Q_i = 0$ влечет $P_i = 1$ и функция выигрыша (13) превращается в (7). Таким образом, игровая модель (8),(9),(13) обобщает игровую модель (7)-(9) в части учета многоуровневого характера обороны каждого направления (пункта).

Следует отметить, что условие $p_t \equiv P, q_t \equiv Q, r_t \equiv R$ представляется мало реалистичным, но в общем случае $p_t \neq P, q_t \neq Q, r_t \neq R$ не удается выразить оптимальное значение I^* аналитически подобно (12). Хотя соответствующая задача может быть сведена к задаче линейного программирования [15].

Замечание 1. Модель выдерживает случай $T = T_i$, $i = 1, 2, ..., n$, в том смысле, что все дальнейшие результаты сохраняются и для переменного количества рубежей.

Заметим, что функция (13) выпукла по U. По теореме 5.4 в [4] значение v игры (8),(9),(13) совпадает с наилучшей гарантированной оценкой $\overline{v}$ обороны и минимаксная стратегия обороны оптимальна. Займемся исследованием этой игры в чистых и смешанных стратегиях, следуя [4].

2. Исследование многоуровневой игровой модели

2.1 Максиминная стратегия нападения

Зададимся вопросом, когда величины под знаком максимум в i-м слагаемом в (13) совпадают, т.е. когда справедливо равенство:

$$Q_i^T X_i = X_i - P_i R_i U_i.$$

Решая это уравнение относительно U_i, получим формулу:

$$U_i = X_i \frac{1 - Q_i^T}{P_i R_i} = \frac{X_i}{R_i}(1 + Q_i + ... + Q_i^{T-1}).$$

Это минимальное количество средств обороны, при котором все средства нападения получат воздействие на всех рубежах i-го направления. Определим теперь стратегию $\bar{U} = \bar{U}(X)$ равенствами:

$$U_i = \frac{X_i(1 - Q_i^T)}{P_i R_i} \cdot \frac{V}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{X_i(1-Q_i^T)}{P_i R_i}}. \tag{14}$$

Рассмотрим случай, когда справедливо неравенство:

$$V \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i(1-Q_i^T)}{P_i R_i}. \tag{15}$$

Тогда из (14) получим, что

$$U_i \geqslant X_i \frac{1-Q_i^T}{P_i R_i}, i = 1, 2, ..., n$$

и справедлива оценка:

$$\min_{U \in B} F(X,U) \leqslant F(X,\bar{U}) = \sum_{i=1}^{n} Q_i^T X_i \leqslant Y \max_{i=1,2,\dots,n} Q_i^T. \tag{16}$$

В противоположном с (15) случае имеет место оценка:

$$\min_{U \in B} F(X,U) \leqslant F(X,\bar{U}) = \sum_{i=1}^{n} (X_i - P_i R_i U_i) \leqslant Y - V \min_{i=1,2,\dots,n} P_i R_i. \tag{17}$$

Из (16),(17) следует оценка:

$$\min_{U \in B} F(X,U) \leqslant \max(Y \max_{i=1,2,\dots,n} Q_i^T; Y - V \min_{i=1,2,\dots,n} P_i R_i). \tag{18}$$

Покажем, что выражение в правой части (18) представляет собой наилучший гарантированный результат нападения $\underline{v}$ и найдем соответствующую максиминную стратегию.

Разберем два случая в зависимости от того, чему равен максимум в правой части (18). Предположим, что имеет место неравенство:

$$Y \max_{i=1,2,\dots,n} Q_i^T \geqslant Y - V \min_{i=1,2,\dots,n} P_i R_i. \tag{19}$$

Тогда

$$\max(Y \max_{i=1,2,\dots,n} Q_i^T; Y - V \min_{i=1,2,\dots,n} P_i R_i) = Y \max_{i=1,2,\dots,n} Q_i^T = Y Q_{i^*}^T =$$
$$\max(Y Q_{i^*}^T; Y - P_{i^*} R_{i^*} V) == \min_{U \in B} \max(Y Q_{i^*}^T; Y - P_{i^*} R_{i^*} U_{i^*}) = \min_{U \in B} F(X^{(i^*)}, U).$$

Отсюда в силу (18) следует, что стратегия $X^{(i^*)}$ является максиминной при любом $i^* \in Arg \max_{i=1,2,\dots,n} Q_i^T$ и правая часть (18) представляет наилучший гарантированный результат нападения в случае (19).

Предположим, что имеет место противоположное неравенство:

$$Y \max_{i=1,2,\dots,n} Q_i^T < Y - V \min_{i=1,2,\dots,n} P_i R_i. \tag{20}$$

Тогда

$$\max(Y \max_{i=1,2,\dots,n} Q_i^T; Y - V \min_{i=1,2,\dots,n} P_i R_i) =$$
$$= Y - V \min_{i=1,2,\dots,n} P_i R_i = Y - V P_{i^{**}} R_{i^{**}} = \max(Y Q_{i^{**}}^T; Y - P_{i^{**}} R_{i^{**}} V) =$$
$$= \min_{U \in B} \max(Y Q_{i^{**}}^T; Y - P_{i^{**}} R_{i^{**}} U_{i^{**}}) = \min_{U \in B} F(X^{(i^{**})}, U).$$

Отсюда в силу (18) следует, что стратегия $X^{(i^{**})}$ является максиминной при любом $i^{**} \in Arg \min\limits_{i=1,2,...,n} P_i R_i$ и правая часть (18) представляет наилучший гарантированный результат нападения в случае (20).

Замечание 2. В случае $R_i = R = const$ можно положить $i^{**} = i^*$, в противном случае возможно, что $i^{**} \neq i^*$. Таким образом, максиминная стратегия в общем случае зависит от того выполняется неравенство (19) или нет. В этом отличие от классической модели Гермейера, изученной в [4], в которой всегда существует единая максиминная стратегия.

2.2 Минимаксная стратегия обороны

В силу выпуклости функции $F(X,U)$ по X максимум по X достигается в одной из угловых точек $X^{(i)}$, $i = 1, 2, ..., n$ множества B. Поэтому справедлива цепочка равенств:

$$\bar{v} = \min_{U \in B} \max_{X \in A} F(X,U) = \min_{U \in B} \max_{i=1,2,...,n} F(X^{(i)}, U) =$$

$$= \min_{U \in B} \max_{i=1,2,...,n} \max(Q_i^T Y; Y - P_i R_i U_i).$$

Переставляя местами два последних оператора максимума, что возможно в силу независимости соответствующих дискретных переменных, получим:

$$\min_{U \in B} \max_{i=1,2,...,n} \max(Q_i^T Y; Y - P_i R_i U_i) = \min_{U \in B} \max(Y \max_{i=1,2,...,n} Q_i^T; Y - \min_{i=1,2,...,n} P_i R_i U_i).$$

Первое выражение под знаком максимума не зависит от U, поэтому минимум по U достигается при минимуме второго выражения и мы приходим к выражению:

$$\min_{U \in B} \max(Y \max_{i=1,2,...,n} Q_i^T; Y - \min_{i=1,2,...,n} P_i R_i U_i) =$$

$$= \max(Y \max_{i=1,2,...,n} Q_i^T; Y - \max_{U \in B} \min_{i=1,2,...,n} P_i R_i U_i).$$

Согласно принципу уравнивания Гермейера (см. [5], стр. 312) максимум по U достигается в единственной точке, которая определяется из условия $P_i R_i U_i = \lambda = const$. Откуда получаем, что $U_i = \lambda / P_i R_i, i = 1, 2, ..., n$, откуда можно найти $\lambda = V / (\sum\limits_{i=1}^{n} 1/(P_i R_i)$ в силу условия $V = \sum\limits_{i=1}^{n} U_i$. Таким образом, минимаксная стратегия, являющаяся оптимальной чистой стратегией обороны, находится по формуле:

$$U_i* = \frac{V}{P_i R_i \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{P_i R_i}}, i = 1, 2, ..., n, \tag{21}$$

откуда следует равенство:

$$\max(Y \max_{i=1,2,...,n} Q_i^T; Y - \max_{U \in B} \min_{i=1,2,...,n} P_i R_i U_i) =$$

$$= \max(Y \max_{i=1,2,...,n} Q_i^T; Y - V(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P_i R_i})^{-1}), \tag{22}$$

и правая часть (22) представляет наилучший гарантированный результат обороны, являющийся значением игры.

2.3 Смешанная стратегия нападения

Рассмотрим смешанную стратегию вида:

$$\phi_0 = \sum_{i=1}^{n} p_i^0 I_{X^{(i)}}, \sum_{i=1}^{n} p_i^0 = 1, p_i^0 \geqslant 0, i = 1, 2, ..., n,$$

где $I_{X_{(i)}}$ – вероятностная мера, сосредоточенная в точке $X^{(i)}$. Чтобы убедиться, что стратегия ϕ_0 является оптимальной достаточно проверить неравенство $F(\phi_0, U) \geqslant v = \bar{v}$ для любого $U \in B$, поскольку второе неравенство, определяющее седловую точку, вытекает из того, что $U*$ – минимаксная стратегия: $F(X, U*) \leqslant \max\limits_{X \in A} F(X, U*) = \min\limits_{U \in B} \max\limits_{X \in A} = \bar{v} = v$.

Разберем два случая в зависимости от того чему равен максимум в правой части (22). Предположим, что имеет место неравенство:

$$Y \max_{i=1,2,\dots,n} Q_i^T \geqslant Y - V \min_{i=1,2,\dots,n} P_i R_i. \tag{23}$$

Тогда оптимальной является стратегия $\phi_0 = I_{X^{(i^*)}}$ при любом $i^* \in Arg \max\limits_{i=1,2,\dots,n} Q_i^T$, т.е. чистая стратегия $X^{(i^*)}$. Это соответствует случаю $p_i^0 = \begin{cases} 1, i = i^*, \\ 0, i \neq i^*. \end{cases}$ Действительно, в этом случае справедлива цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} &F(\phi_0, U) = \int\limits_A F(X, U) d\phi_0(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i^0 F(X^{(i)}, U) = F(X^{(i^*)}, U) = \\ &= \max(YQ_{i^*}^T, Y - P_{i^*} R_{i^*} U_{i^*}) \geqslant YQ_{i^*}^T = Y \max_{i=1,2,\dots,n} Q_i^T = \bar{v} = v, \end{aligned}$$

откуда и следует оптимальность ϕ_0.

Предположим, что имеет место обратное неравенство:

$$Y \max_{i=1,2,\dots,n} Q_i^T < Y - V \min_{i=1,2,\dots,n} P_i R_i.$$

Тогда оптимальной является стратегия ϕ_0, когда p_i^0 определяются по формулам:

$$p_i^0 = \frac{1}{P_i R_i} (\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P_i R_i})^{-1}, i = 1, 2, ..., n.$$

Действительно, в этом случае справедлива цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} &F(\phi_0, U) = \int\limits_A F(X, U) d\phi_0(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i^0 F(X^{(i)}, U) = \sum_{i=1}^{n} p_i^0 \max(Q_i^T Y, Y - P_i R_i U_i) \geqslant \\ &= \max(\sum_{i=1}^{n} p_i^0 Y Q_i^T, Y - \sum_{i=1}^{n} p_i^0 P_i R_i U_i) = \max(Y \sum_{i=1}^{n} p_i^0 Q_i^T, Y - V(\sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{P_i R_i})^{-1}) = \\ &= Y - V(\sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{P_i R_i})^{-1} = \bar{v} = v, \end{aligned}$$

откуда и следует оптимальность ϕ_0. Мы воспользовались очевидным неравенством:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^0 Q_i^T \leqslant \max_{i=1,2,\ldots,n} Q_i^T.$$

Таким образом, оптимальная смешанная стратегия нападения в общем случае зависит от того, выполняется неравенство (23) или нет. В этом также состоит отличие от классической модели Гермейера, изученной в [4], в которой всегда существует единая оптимальная смешанная стратегия нападения.

3. Числовой пример

Рассмотрим в заключение пример использования полученных формул при $Y = 20$, $V = 15$. В таблице 1 приведены другие данные и расчет основных параметров игровой модели.

Таблица 1: Расчет основных параметров игровой модели

i	P_i	R_i	Q_i	T_i	P_iR_i	$Q_i^{T_i}$	$1/(P_iR_i)$	p_i^0	U_i^*
1	0,7	2	0,3	4	1,4	0,0081	0,7143	0,4036	6,0538
2	0,6	3	0,4	3	1,8	0,0640	0,5556	0,3139	4,7085
3	0,5	4	0,5	4	2	0,0625	0,5000	0,2825	4,2377
$\sum_i$							1,7698		

При этом $i^* = 2, i^{**} = 1$, а значения наилучших гарантированных результатов сторон приведены в таблице 2 вместе с необходимыми промежуточными результатами.

Таблица 2: Значения наилучших гарантированных результатов сторон

$Y \max\limits_i Q_i^{T_i}$	$Y - V \min\limits_i P_iR_i$	$Y - V(\sum\limits_{i=1}^{n} 1/(P_iR_i))^{-1}$
1,28	-1	11,5247
$\underline{v}$	$\bar{v}$	v
1,28	11,5247	11,5247

Из таблицы 2 видно, что справедливо неравенство (19), из которого следует, что максиминной стратегией нападения является $i^* = 2$. Неравенство (23), наоборот, не выполняется, откуда и следует оптимальность смешанной стратегии ϕ_0 нападения, заданной вероятностями p_i^0 в таблице 1. При этом чистой оптимальной стратегией обороны является минимаксная стратегия U^*. Это верно независимо от того, справедливы неравенства (19),(23) или нет.

Заключение

В настоящей работе получено прямое обобщение игровой модели Гермейера «нападение-оборона», состоящее в дополнительном учете уровней защиты на каждом направлении (пункте) и количества воздействий по средствам нападения, которое может осуществить оборона на каждом уровне. Показано, что максиминная и оптимальная смешанная стратегия нападения в общем случае зависит от соотношения исходных экзогенных параметров модели. В этом также состоит отличие от классической модели Гермейера, в которой всегда существует единая максиминная и оптимальная смешанная стратегия нападения.

Список литературы

[1] Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964.

[2] Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

[3] Горелик В.А. Теория игр и исследование операций. М.: Изд-во МИНГП, 1978.

[4] Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики. М.: МАКС Пресс, 2005.

[5] Васин А.А., Краснощеков П.С., Морозов В.В. Исследование операций. М.: Издательский центр «Академия», 2008.

[6] Молодцов Д.А. Модель Гросса в случае непротивоположных интересов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1972. Т. 12, № 2. С. 309–320.

[7] Берзин Е.А. Оптимальное распределение ресурсов и элементы синтеза систем / Под ред. Е.В. Золотова. М.: Радио и связь, 1974.

[8] Берзин Е.А. Оптимальное распределение ресурсов и теория игр / Под ред. Е.В. Золотова. М.: Радио и связь, 1983.

[9] Данильченко Т.Н., Масевич К.К. Многошаговая игра двух лиц при «осторожном» втором игроке и последовательной передаче информации // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1974. Т. 19, № 5. С. 1323–1327.

[10] Крутов Б.П. Динамические квазиинформационные расширения игр с расширяемой коалиционной структурой. М.: ВЦ РАН, 1986.

[11] Перевозчиков А.Г., Лесик И.А. Простейшая модель системы эшелонированной противовоздушной обороны // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2013. № 3(30). С. 83–95.

[12] Перевозчиков А.Г., Лесик И.А., Яночкин И.Е. Модель массового обслуживания для системы эшелонированной противовоздушной обороны // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 4. С. 65–83.

[13] Решетов В.Ю., Перевозчиков А.Г., Лесик И.А. Модель преодоления многоуровневой системы защиты нападением // Прикладная математика и информатика. 2015. № 49. С. 80–96.

[14] Hohzaki R., Tanaka V. The effects of players recognition about the acquisition of his information by his opponent in an attrition game on a network // Proceedings of 27^{th} European conference on Operation Research (EURO2015). Glasgow, UK, University of Strathclyde, 12-15 July 2015.

[15] Решетов В.Ю., Перевозчиков А.Г., Лесик И.А. Модель преодоления многоуровневой системы защиты нападением с несколькими фазовыми ограничениями // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 2017 (в печати).

Библиографическая ссылка

Перевозчиков А.Г., Решетов В.Ю., Шаповалов Т.Г. Многоуровневое обобщение модели «нападение-оборона» // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. №1. С. 57–69.

Сведения об авторах

1. **Перевозчиков Александр Геннадьевич**
старший научный сотрудник ИнноЦентра Высшей школы им. Е.А. Лурье Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ, ИнноЦентр.
E-mail: pere501@yandex.ru.

2. **Решетов Валерий Юрьевич**
доцент кафедры исследования операций факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова.

Россия, 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 52, МГУ, ВМК.
E-mail: kadry@cs.msu.ru.

3. **Шаповалов Тимур Георгиевич**
студент факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова.

Россия, 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 52, МГУ, ВМК.
E-mail: Timur.Shapovalov@gmail.com.

MULTI-LEVEL EXPANSION OF THE MODEL “ATTACK-DEFENSE”

Perevozchikov Aleksandr Gennadievich
Senior Researcher at the Innocentre of TSU named after E.A. Lur'e,
Tver State University.
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU, Innocentre.
E-mail: pere501@yandex.ru

Reshetov Valerii Yurievich
Associate professor at Operations Research department, Computational Mathematics and Cybernetics faculty, Lomonosov Moscow State University.
Russia, 119991, Moscow, GSP-1, 1 Leninskie gory, building 1, CMC, MSU.
E-mail: kadry@cs.msu.ru

Shapovalov Timur Georgievich
Student of Computational Mathematics and Cybernetics faculty,
Lomonosov Moscow State University.
Russia, 119991, Moscow, GSP-1, 1 Leninskie gory, building 1, CMC, MSU.
E-mail: Timur.Shapovalov@gmail.com

Received 15.05.2016, revised 20.09.2016.

Multi-level generalization of the “attack-defense” model defined and worked out by Germayer U.B. is studied in the paper. The model is the modification of O. Gross model. A similar model was suggested by Gorelik V.A. for petrol production. The easiest expansion of the “attack-defense” model is suggested. It consists in the fact that defense of each center has multilevel structure but the efficiency of defense equipment doesn't depend on the level number. In these suggestions the game model is fully explored and the direct generalization of one-level model results on multi-level occasion was found. These results can be used for building up multi-level defense.

Keywords: game “attack-defense”, maximin strategy of attack, guaranteed attack result, minimax defense strategy, guaranteed defense result, game meaning, optimal mixed attack strategy, optimal net protection strategy.

Bibliographic citation

Perevozchikov A.G., Reshetov V.Yu., Shapovalov T.G. Multi-level expansion of the model “attack-defense”. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2017, no. 1, pp. 57–69. (in Russian)

References

[1] Karlin S. *Matematicheskie Metody v Teorii Igr, Programmirovanii i Ekonomike* [Mathematical Methods in Games Theory, Programming and Economics]. Mir Publ., Moscow, 1964. (in Russian)

[2] Germayer U.B. *Vvedenie v Teoriyu Issledovaniya Operatsii* [Introduction to Operations Research]. Nauka Publ., Moscow, 1971. (in Russian)

[3] Gorelik V.A. *Teoriya Igr i Issledovanie Operatsii* [Games Theory and Operations Research]. MINPG Publ., Moscow, 1978. (in Russian)

[4] Vasin A.A., Morozov V.V. *Teoriya Igr i Modeli Matematicheskoi Ekonomiki* [Games Theory and Models of Mathematical Economics]. MAX Press Publ., Moscow, 2005. (in Russian)

[5] Vasin A.A., Krasnoschekov P.S., Morozov V.V. *Issledovanie Operatsii* [Operations Research]. Publishing Centre “Academy”, Moscow, 2008. (in Russian)

[6] Molodtsov D.A. Gross model in case of non-opposite interests. *Zhurnal Vychislitel’noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki* [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1972, vol. 12(2), pp. 309–320. (in Russian)

[7] Berzin E.A. *Optimalnoe Raspredelenie Resursov i Elementy Sinteza Sistem* [The Optimal Distribution of Resources and Elements of Systems Synthesis], ed. by E.V. Zoltov. Radio i Svyaz Publ., Moscow, 1974. (in Russian)

[8] Berzin E.A. *Optimalnoe Raspredelenie Resursov i Teoriya Igr* [The Optimal Distribution of Resources and Games Theory], ed. by E.V. Zoltov. Radio i Svyaz Publ., Moscow, 1983. (in Russian)

[9] Danilchenko T.N., Masevich K.K. Multi-step two-person game with the “cautious” second player and coherent information transfer. *Zhurnal Vychislitelnoi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki* [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1974, vol. 19(5), pp. 1323–1327. (in Russian)

[10] Krutov B.P. *Dinamicheskie Kvaziinformatsionnye Rasshireniya Igr s Rasshiryaemoi Koalitsionnoi Strukturoi* [Quasi Dynamic Information Extensions Games with Expanding Coalition Structures]. CC RAS, Moscow, 1986. (in Russian)

[11] Perevozchikov A.G., Lesik I.A. On a simplest model of the echeloned air defense system. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2013, no. 3 (30), pp. 83–95. (in Russian)

[12] Perevozchikov A.G., Lesik I.A., Yanochkin I.Ye. Model of the echeloned Air Defense queuing system. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2015, no. 4, pp. 65–83. (in Russian)

[13] Reshetov V.Yu., Perevozchikov A.G., Lesik I.A. The model of overcoming the multilevel defense system by attack. *Prikladnaya Matematika i Informatika* [Applied Mathematics and Informatics], 2015, no. 49, pp. 80–96. (in Russian)

[14] Hohzaki R., Tanaka V. The effects of players recognition about the acquisition of his information by his opponent in an attrition game on a network. *Proceedings of 27th European conference on Operation Research (EURO2015).* Glasgow, UK, University of Strathclyde, 12-15 July 2015.

[15] Reshetov V.Yu., Perevozchikov A.G., Lesik I.A. The model of overcoming a multi-level defense system by an attack with several phase constraints. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 15: Vychislitel'naya matematika i kibernetika* [Bulletin of Moscow University. Series 15: Computational Mathematics and Cybernetics], 2017 (in print). (in Russian)