УДК 004.932.2, 517.968

СЕМЕЙСТВО ВЕЙВЛЕТОВ НА ОСНОВЕ ВОЛНОВОЙ ВЫТЯНУТОЙ СФЕРОИДАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА

Катулев А.Н.*, Малевинский М.Ф.**

* Научно-исследовательский центр Центрального научно-исследовательского института войск ВКО Минобороны России, г. Тверь

** Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 20.08.2016, после переработки 20.10.2016.

Синтезировано семейство вейвлетов на основе ВВСФ нулевого порядка как вейвлето-образующей-материнской функции, доминирующей по энергии на заданном носителе каждый из известных материнских вейвлетов.

Ключевые слова: вейвлет, волновая вытянутая сфероидальная функция, масштабирующая функция.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 1. С. 71–84.

Введение

К настоящему времени вейвлет-анализ широко применяется для обнаружения и обработки сигналов в различных областях науки, техники и медицины.

Основу вейвлет-анализа составляют [1, 2] две функции: масштабирующая – $\varphi(t)$ и вейвлет-функция – $\psi(t)$, $t \in [-T, T]$ – носитель. Масштабирующая функция обладает свойствами принадлежности пространству L_2, компактности, образовывать ортонормированный базис при сдвигах на целочисленные значения аргумента в пределах отрезка $[-T, T]$, иметь на отрезке $[-T, T]$ неравный нулю интеграл и удовлетворять уравнению масштабирования. Вейвлет-функция должна принадлежать пространству L_2, быть ограниченной, бесконечно дифференцируемой, быть заданной на конечном отрезке $[-T, T]$ и иметь на нем максимальную концентрацию энергии, быть оптимально локализованной во времени и по частоте, иметь нулевое среднее, обладать самоподобием при масштабных преобразованиях и сдвигах, удовлетворять требованиям представимости в ортогональном базисе сдвинутой масштабирующей функции, ортогональности с масштабирующей функцией при всех целочисленных ее сдвигах и требуемой степени локализации, иметь экспоненциальное убывание.

К настоящему времени предложены и проанализированы различные вейвлетообразующие функции [1-2], но каждая из них имеет ряд принципиальных недостатков. Так, вейвлетообразующая функция Хаара является разрывной и плохо аппроксимирует непрерывные функции, вейвлетообразующая функция

Котельникова-Шеннона медленно убывает с ростом временного аргумента, материнские вейвлеты Добеши не имеют явных аналитических выражений и имеют ограниченное число непрерывных производных, вейвлетообразующая функция «Maxhat» не финитна по времени и частоте и не имеет масштабирующей функции, вейвлетообразующая функция Мейера не имеет аналитических выражений для масштабирующей функции и вейвлета.

Каждая из этих вейвлетообразующих функций имеет меньшую энергию на конечном носителе – отрезке времени $[-T, T]$ по сравнению с вейвлетом, синтезированным на основе волновых вытянутых сфероидальных функций (ВВСФ) на таком же носителе [3].

В связи с этими фактами постановка и решение задачи разработки семейства вейвлетов на основе ВВСФ нулевого порядка является актуальной.

1. Цель статьи

Доказательство свойств нормированной ВВСФ нулевого порядка как масштабирующей функции, разработка вейвлета на основе ВВСФ нулевого порядка и установление его свойств, разработка алгоритма вычисления вейвлет-коэффициентов для вейвлет-преобразования.

Оценка показателей эффективности вейвлета ВВСФ нулевого порядка и сравнение с другими вейвлетами.

2. Аналитическое выражение для ВВСФ нулевого порядка

Аналитическое выражение устанавливается из решения однородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода с ядром вида «синус x на x»:

$$\lambda_i w_i(t) = \int_{-T}^{T} \frac{\sin C\pi(\tau - t)}{\pi(\tau - t)} w_i(\tau) d\tau,\ i = 0, 1, 2, \ldots, -\infty < t < \infty, \tag{1}$$

где $w_i(t)$ – искомая ВВСФ i-го порядка, $i = 0, 1, \ldots$, на интервале времени $-T \leqslant t \leqslant T$, C – верхняя граничная частота финитного спектра ВВСФ, T – правая граница интервала аргумента задания – носителя ВВСФ, λ_i – собственное число, соответствующее функции $w_i(t)$, как собственной интегрального уравнения.

Для решения уравнения (1) воспользуемся предложенным в [4] методом, основанным на аппроксимации искомых ВВСФ конечным рядом Котельникова и при котором интеграл в уравнении сводится к табличному, снимается проблема быстрой осцилляции ядра для значений $CT \geqslant 8$ и обеспечивается вычисление ВВСФ в реальном масштабе времени на современных ПЭВМ.

Сущность метода заключается в следующем:

1. Составить расчетное выражение вида

$$w(\tau) = \sum_{k=-N}^{N} w_k [\sin\ \pi(\tau - k\Delta)/\Delta]/[\pi(\tau - k\Delta)/\Delta], \tag{2}$$

где $-w_k = w(k\Delta)$, $k \in [-N, N]$, $0 < \Delta \leqslant \pi/C$, $C_1 = \pi/\Delta$, Δ – шаг дискретности на отрезке $[-T, T]$, $N = [T/\Delta]$ – целая часть числа T/Δ.

2. Подставить выражение (2) в уравнение (1), которое должно выполняться на дискретном множестве точек $t_l = \Delta l$, $l \in -\overline{N, N}$.

В результате имеем задачу полной проблемы собственных значений

$$\lambda_i w_l = \sum_{k=-N}^{N} w_k a_{lk},\ l = -\overline{N, N}, \tag{3}$$

где $a_{lk} = \int\limits_{-T}^{T} \frac{\sin\ C(\tau - l\Delta)\quad \sin\quad \pi(\tau - k\Delta)/\Delta}{\pi(\tau - l\Delta)\pi(\tau - k\Delta)/\Delta} d\tau =$

$$= \frac{\cos\ (l-k)\pi}{2\pi^2(l-k)}[-S_1(P_1T_2) + S_1(P_1T_1) + S_1(P_2T_2) - S_1(P_2T_1)]-$$

$$-\frac{1}{2\pi^2(l-k)}[\cos\ C\Delta(k-l)\ \ (S_1(P_3T_3) - S_1(P_3T_4) + S_1(P_4T_4) - S_1(P_4T_3))+$$

$$+\sin C\Delta(k-l)(Si(P_3T_4) - Si(P_3T_3) + Si(P_4T_4) - Si(P_4T_3))], \tag{4}$$

для $l \neq k; l, k = -\overline{N, N}$,

$$a_{kk} = \frac{1}{\Delta}\int\limits_{-T}^{T} \frac{\sin\ C(\tau - k\Delta)\ \ \sin\ \ (\pi(\tau - k\Delta)/\Delta)}{(\pi\tau/\Delta - k\pi)^2} d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi}[\frac{1-\cos\ (P_3T_4)}{T_4} - \frac{1-\cos\ (P_3T_3)}{T_3} - P_3(S_i(P_3T_4)-$$

$$-S_i(P_3T_3)) - \frac{1-\cos\ (P_4T_4)}{T_4} + \frac{1-\cos(P_4T_3)}{T_3} + P_4(Si(P_4T_4) - Si(P_4T_3))], \tag{5}$$

для $l = k, k = -\overline{N, N}$,

$$S_i(x) = \int\limits_0^x [(\sin y)/y]dy,\ S_1(x) = \int\limits_0^x [(1-\cos y)/y]dy = \ln x + 0{,}577216 - Ci(x),$$

$Ci(x)$ – интегральный косинус, $Si(x)$ – интегральный синус;

$$P_1 = 1 - \pi/\Delta C, \quad P_2 = 1 + \pi/\Delta C, \quad P_3 = 1 - C\Delta/\pi, \quad \mathrm{P}_4 = 1 + C\Delta/\pi,$$

$$T_1 = -C(T + \Delta l), \quad T_2 = C(T - \Delta l), \quad T_3 = -\pi(T/\Delta + K), \quad T_4 = \pi(T/\Delta - K).$$

3. Найти искомые w_k, $k \in -\overline{N, N}$, как решение задачи (3) QR-алгоритмом (или другим численным методом) и восстановить ВВСФ – w(τ).

3. Свойства ВВСФ

ВВСФ нулевого порядка $w(\tau) \in L_2$(-∞,∞) [7], компактна – определена на конечном отрезке $[-T, T]$, локализуема, ограничена по норме пространства $L_2(-\infty, \infty)$, четная, самоподобна по преобразованию Фурье, допускает конструирование ортогонального базиса в $L_2(-\infty, \infty)$, обладает аппроксимационными свойствами, адекватными предполагаемым приложениям в задаче анализа выборок сигналов и изображений, допускает сжатие и растяжение во временной и частотной областях, имеет, как установлено в [5] и моделированием в [6], экспоненциальное убывание с показателем CT, бесконечно дифференцируема, имеет максимальную концентрацию энергии на отрезке $[-T, T]$ [7]. Очевидно, эти свойства ВВСФ тождественны свойствам вейвлетообразующих функций [1], и поэтому становится обоснованным рассматривать ВВСФ как вейвлетообразующую функцию.

4. Доказательства свойств ВВСФ нулевого порядка как масштабирующей функции и свойств системы вейвлетов

Докажем, что ВВСФ нулевого порядка удовлетворяет требованиям, предъявляемым к масштабирующей функции вейвлет-анализа, образовывать при ее сдвигах ортонормированный базис в L_2, иметь не равный нулю интеграл на носителе $[-T, T]$ и образовывать ортогональную систему вейвлетов.

Теорема 1. *Последовательность ВВСФ нулевого порядка $w(t-b_n)$ образует ортогональный базис в пространстве L_2 по переменной сдвига $b_n = n\Delta$ для всех целых $n = 0, \pm 1 \pm 2, \ldots$.*

Доказательство. Воспользуемся выражением скалярного произведения в пространстве L_2 для функций $w(t)$ и $w(t-b_n)$, представимых выражением (2). Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(t)w(t-n\Delta)dt =$$

$$= \sum_{l=-N}^{N}\sum_{k=-N}^{N} w_k w_l \int_{-\infty}^{\infty} \sin c(\pi(t-l\Delta)/\Delta))(\mathrm{sinc}(\pi(t-(n+k)\Delta)/\Delta)dt, \qquad (6)$$

где интеграл в (6) равен [7]

$$\sin((l-k)\pi)(-1)^n\Delta/((l-k)\pi - \pi n), sinc(t) = sin(t)/t. \qquad (7)$$

Подставив (7) в (6), имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(t)w(t-n\Delta)dt = \sum_{l=-N}^{N}\sum_{k=-N}^{N} w_k w_l(\sin(l-k)\pi))(-1)^n\Delta/((l-k)\pi) - n\pi). \quad (8)$$

Из (8) непосредственно следует выражение-доказательство ортогональности

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(t)w(t-n\Delta)dt = A, \text{ если } n = 0,\ k = l,$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(t)w(t-n\Delta)dt = 0, \text{ если } n = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

где

$$A = \Delta \sum_{l=-N}^{N} w_l^2. \tag{9}$$

□

Теорема 2. *Интеграл от ВВСФ нулевого порядка не равен нулю на интервале* (-∞, ∞).

Доказательство. Вычислим с учетом (2) интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(t)dt = \sum_{k=-N}^{N} w_k \int_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{sinc}(C_1 t - k\pi)dt = \Delta \cdot \sum_{k=-N}^{N} w_k \neq 0.$$

Неравенство нулю справедливо, поскольку значения $w(k\Delta) = w_k$, $-N \leqslant k \leqslant N$ на интервале $[-T, T]$ положительны [7]. □

Из теорем 1 и 2 имеем принципиально важный результат: нормированная по норме пространства L_2 ВВСФ нулевого порядка является масштабирующей функцией вейвлет-анализа, записывается в виде

$$\varphi(t) = (1/\sqrt{A}) \sum_{r=-N}^{N} w_r \cdot \mathrm{sinc}(C_1 t - r\pi) \tag{10}$$

и на ее основе можно формировать вейвлет-функцию $\psi(t)$, $-T \leqslant t \leqslant T$. Последняя, как вейвлет-ВВСФ нулевого порядка, в общем случае [2] представляется выражением вида

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=-N}^{N} g_k \varphi(2t - \Delta k),\ -\infty < t < \infty, \tag{11}$$

где $g_k \in R$ – коэффициенты, вычисляемые по формуле [2]

$$g_k = (-1)^k h_{-k},\ -N \leqslant k \leqslant N. \tag{12}$$

Здесь

$$h_k = \sqrt{2} \int_{-T}^{T} \varphi(t)\varphi(2t - \Delta k)dt \tag{13}$$

и входят в масштабирующее уравнение [2]

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \cdot \sum_{k=-N}^{N} h_k \cdot \varphi(2t - \Delta k).$$

Итак, вейвлет на основе ВВСФ нулевого порядка (11) может использоваться в вейвлет-преобразовании в качестве его представления в виде двухпараметрического семейства вейвлетов

$$\psi_{mn}(t) = |m|^{-1/2} \psi\left(\frac{t - b_n}{m}\right) = \sqrt{\frac{2}{m}} \sum_{k=-N}^{N} g_k \varphi\left(2(t - b_n)/m - \Delta k\right) - \infty < t < \infty, \tag{14}$$

где $b_n = \Delta n$, $n = 0, +1, +2, ...$ – переменная сдвига, m – параметр масштаба.

Примечание 1. Сделаем в (10) замены переменных t и r:

$$t = -T + \tau,\ 0 \leqslant \tau \leqslant 2T \text{ и } r = -N + p,\ p = 0, 1, 2, \ldots, 2N.$$

От этих переменных функция φ(t) примет вид

$\varphi(\tau) = \frac{1}{\sqrt{A}} \sum\limits_{p=0}^{2N} w_{-N+p} sinc(C_1(-T+\tau) - (-N+p)\pi),\ 0 \leqslant \tau \leqslant 2T,\ p = 0, 1, 2, \ldots, 2N.$

Дальнейшие вычисления для определения параметров вейвлета производятся с новой масштабирующей функцией $\varphi(\tau)$.

Теорема 3. *Интеграл от вейвлет-ВВСФ нулевого порядка на интервале* ($-\infty$,∞) *равен нулю.*

Доказательство. Составим выражение (с учетом (2))

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = \sqrt{2} \sum_{k=-N}^{N} g_k \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(2t - \Delta k)dt =$$

$$= (1/\sqrt{2A}) \sum_{k=-N}^{N} g_k \sum_{l=-N}^{N} w_l \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(C_1\tau - k\pi - l\pi)d\tau =$$

$$= (\Delta/\sqrt{2A}) \sum_{k=-N}^{N} g_k \sum_{l=-N}^{N} w_l = 0.$$

Равенство нулю получаем в силу равенства $\sum\limits_{k=-N}^{N} g_k = 0$ [8], что и требовалось доказать. □

Теорема 4. *Система вейвлет-ВВСФ* $\Psi(t - \Delta n)$, *n*= *0*,$\pm1, \pm2, \ldots$ *образует ортонормированную систему в* L_2.

Доказательство. Воспользуемся выражением скалярного произведения в L_2

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t)\Psi(t - \Delta n)dt =$$

$$= (\Delta/A) \sum_{k,l=-N}^{N} g_k g_l \sum_{m,p=-N}^{N} w_m w_p \sin(\pi(m - p + k - 1))/(\pi(m - p + k - 1 + 2n)) =$$

$= (\Delta/A) \sum\limits_{k=-N}^{N} w_k^2 \sum\limits_{m=-N}^{N} g_m^2 = 1$, если $p = 0$, и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\psi(t - \Delta n)dt = 0$, в других случаях, а так как $\sum\limits_{m=-N}^{N} g_m^2 = 1$ [2], то доказательство ортогональности завершено. □

Теорема 5. *Каждая функция системы вейвлет-ВВСФ* Ψ(*t*-Δ*n*), $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ *ортогональна масштабирующей функции* $\varphi(t)$.

Доказательство. Воспользуемся скалярным произведением (φ(t),ψ (t-Δn)). Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\psi(t-\Delta n)dt =$$

$$= (1/\sum_{l=-N}^{N} w_l^2) \cdot \sum_{k,m=-N}^{N} h_k g_m \cdot \sum_{r,p=-N}^{N} w_r w_p \mathrm{sinc}(\pi[(k-m)+(r-p)-2n]) =$$

$$= \sum_{k=-N}^{N} h_k g_k = 0, n = 0, \pm 1, \pm 2.$$

Равенство нулю справедливо в силу $\sum_{k=-N}^{N} h_k g_k = 0$ [8]. Требуемое доказано. □

Вейвлет-коэффициенты вейвлет-преобразования [2], по определению, представляются выражением скалярного произведения

$$C_{m,b} = (f(t), \psi_{m,b}(t)) = \frac{1}{\sqrt{m}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi\left(\frac{t-b}{m}\right) dt, \tag{15}$$

где f(t) – заданная или выборочная функция, n, m – переменные сдвига и масштаба, или после дискретизации b, $b_n = n\Delta$, n=0, ±1, ±2, ..., $m = m_1, m_2, ...$ будет иметь место поле вейвлет-коэффициентов.

С учетом, что носитель вейвлет-ВВСФ есть отрезок $[b-mT, b+mT]$, выражение для $C_{m,b}$ запишем в виде

$$C_{m,b} = \frac{1}{\sqrt{m}} \int_{b-mT}^{b+mT} f(t)\,\Psi\left(\frac{t-b}{m}\right) dt. \tag{16}$$

Заменив в (16) непрерывную функцию $f(t)$ ее значениями в дискретных точках $f(k\Delta t) = f_k$, $k = -N, -N+1, \ldots$, коэффициенты (16) будут вычисляться по формуле

$$C_{m,b_n} = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{k=n-[mN]}^{k=n+[mN]} f_k \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \Psi\left(\frac{t-b_n}{m}\right) dt, \tag{17}$$

где Δt – шаг дискретности входных данных функции $f(t)$.

В подробной записи (17) запишется в виде

$$C_{m,b_n} = (1/\sqrt{m}) \sum_{k=n-[mN]}^{n+[mN]} f_{k+[mN]+1} \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} \Psi\left(\frac{t-n\Delta}{m}\right) dt = (m/2/A)^{1/2} \times$$

$$\times C_1 \times \sum_{k=n-[mN]}^{n+[mN]} f_{k+[mN]+1} \sum_{p,r=-N}^{N} g_p w_r \Big(Si\left(\frac{2C_1\left((k+1)\Delta t - n\Delta\right)}{m}\right) -$$

$$-(p+r)\pi - Si\left(\frac{2C_1\,(k\Delta t - n\Delta)}{m} - (p+r)\pi\right)\Bigg). \tag{18}$$

Создадим на основе функций $\varphi(t)$ и $\Psi(t)$ системы ортонормированных функций $\varphi_{an}(t) = 2^{a/2}\varphi(2^a t - \Delta n)$, $a, n = 0, \pm 1, \ldots$, аналогично для $\Psi(t)$.

При такой записи этих систем из теорем 1-5 следует, что функции φ(t) и Ψ(t) образуют кратномасштабный анализ [2].

Теорема 6. *Масштабирующая функция Хаара есть (частный) предельный случай ВВСФ нулевого порядка.*

Доказательство. Известно, что дельта-функция есть предел функции отсчетов при С$\to\infty$

$$\delta(\tau - t) = \lim_{C\to\infty} \sin C(\tau - t)/[\pi(\tau - t)].$$

Подставим дельта-функцию в интегральное уравнение (1) для $T = 0.5$:

$$\lambda w(t) = \int\limits_{-0.5}^{0.5} \delta((\tau - t))w(\tau)d\tau = w(t),\ -0.5 \leqslant t < 0.5. \tag{19}$$

Из (19) следует, что $\lambda = 1$. Уравнение (19) запишем в виде:

$$w(t) = \int\limits_{-0.5}^{0} \delta((\tau - t))w(\tau)d\tau + \int\limits_{0}^{0.5} \delta((\tau - t))w(\tau)d\tau. \tag{20}$$

Уравнение (20) представим в виде двух уравнений:

$$w(t) = \int\limits_{-0.5}^{0} \delta((\tau - t))w(\tau)d\tau,\ -0.5 \leqslant t < 0, \tag{21}$$

$$w(t) = \int\limits_{0}^{0.5} \delta((\tau - t))w(\tau)d\tau,\ 0 \leqslant t < 0.5. \tag{22}$$

Продифференцируем уравнение (21) по переменной t:

$$w^{'}(t) = \int\limits_{-05.}^{0} \delta^{'}(\tau - t)w(\tau)d\tau = -w^{'}(t),\ -0.5 \leqslant t < 0. \tag{23}$$

Из (23) следует, что w(t) на промежутке $-0.5 \leqslant t < 0$, постоянная функция, то есть $w(t) \equiv C_0$, $-0.5 \leqslant t < 0$.

Аналогично для уравнения (22) получим, что $w(t) \equiv C_2$, $0 \leqslant t < 0.5$.

Учитывая четность ВВСФ нулевого порядка, получим, что $C_2 = C_0$. Поскольку ВВСФ определяются с точностью до постоянного множителя, примем $C_0 = 1$.

Сделав замену переменной $t = -0.5 + \tau$ для ВВСФ нулевого порядка, получим окончательное выражение

$$\mathrm{w}(\tau) \quad = \begin{cases} 1, \ 0 \leqslant \tau < 0.5, \\ 1, \ 0.5 \leqslant \tau < 1, \\ 0, \ \text{ в других случаях}, \end{cases}$$

то есть получим масштабирующую функцию Хаара.

Теперь докажем, что в пределе при $C \to \infty$ интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt = 1$.

Действительно, при $C \to \infty$, $\Delta \to 0$, $N \to \infty$ получим

$$\lim_{\Delta \to 0} \Delta \sum_{k=-N}^{N} w_k = \int_{-T}^{T} w(t)dt,$$

$$\lim_{\Delta \to 0} \Delta \sum_{k=-N}^{N} w_k^2 = \int_{-T}^{T} w(t)^2 dt.$$

При $C \to \infty$, аналогично приведенному выше доказательству о масштабирующей функции Хаара, получим, что $w(t) \equiv 1$ при $-T \leqslant t \leqslant T$, и, окончательно, имеем

$$\int_{-T}^{T} w(t)dt / \int_{-T}^{T} w(t)^2 dt = \frac{2T}{2T} = 1.$$

□

В [9] доказано, что спектры ВВСФ любого порядка финитны и подобны исходным функциям. И, согласно [9], имеем формульные соотношения для прямого и обратного преобразований Фурье для ВВСФ нулевого порядка:

$$\int_{-T}^{T} w(t) exp(-j\omega t)dt = \sqrt{\frac{2\pi\lambda T}{C}} w\left(\frac{T\omega}{C}\right), -\infty < \omega < \infty,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(t) exp(j\omega t)dt = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\pi T}{\lambda C}} w\left(\frac{T\omega}{C}\right), & |\omega| \leqslant C, \\ 0, \quad |\omega| > C, \end{cases}$$

где λ – собственное число ВВСФ нулевого порядка.

В заключение теорем дополнительно отметим два вытекающих из них результата:

1. Так как ВВСФ нулевого порядка – четная функция, то область задания ее аргумента можно ограничить отрезком $[0, T]$, а сумму (2) в конечном ряде Котельникова изменять от 0 до N.

2. Согласно свойствам ВВСФ нулевого порядка относительная доля ее энергии равна ее собственному числу, что при $CT \geqslant 4$ – близка к единице (0.999) и практически равна единице (0.9999) при $CT \geqslant 6$ [7], поэтому замена конечного отрезка $[-T, T]$ интервалом $(-\infty, \infty)$ не приводит к погрешности по норме пространства L_2 в доказательствах теорем 1-5 и погрешности вычисления нормировочного коэффициента A (выражение (9)).

5. Алгоритм вычисления вейвлет-коэффициентов

Включает следующие операции:

1. Вычисление коэффициентов a_{lk}, l, $k = -N, \ldots, N$ по выражениям (4),(5) при заданных значениях параметров C, Δ, T.

2. Вычисление собственных чисел и собственных векторов из решения системы уравнений (3).

3. Вычисление нормировочного коэффициента A по выражению (9).

4. Вычисление коэффициентов h_k, $k = -N, \ldots, N$ по выражению (13).

5. Вычисление коэффициентов g_k, $k = -N, \ldots, N$ по выражению (12).

6. Вычисление вейвлет-коэффициентов по выражению (18).

6. Показатели эффективности вейвлет ВВСФ нулевого порядка

В качестве показателей эффективности приняты свойства предложенного вейвлета ВВСФ нулевого порядка и других вейвлетов.

В Таблице 1 для сравнения вейвлет ВВСФ нулевого порядка с другими вейвлетами приведены свойства и результаты их оценивания; совокупность показателей – полная в смысле их соответствия требованиям, предъявляемым к вейвлетам [1,2].

В Таблице 1 приведены вейвлеты, наиболее широко применяемые в практических приложениях.

Свойства известных вейвлетов установлены по данным [1,2,10], а свойства вейвлета ВВСФ нулевого порядка установлены изложенными теоремами.

Разрешающие способности вейвлетов оценены моделированием с использованием критерия Рэлея [7] по объектам на изображении, обнаруживаемых оптико-электронным прибором.

Моделирование выполнено при задании следующих исходных данных: верхняя граничная частота $C = 2\pi$, шаг дискретности $\Delta = 0.5$, $N = 4$.

Для вычисления интеграла в выражении (18) применена формула трапеций.

При вычислении вейвлет-коэффициентов для всех вейвлетов, исключая вейвлет ВВСФ нулевого порядка, использовалась функция dwt системы MatLab.

Из результатов Таблицы 1 оценивания показателей эффективности вейвлетов следует вывод: семейство вейвлетов на основе ВВСФ нулевого порядка обладает по сравнению с другими вейвлетами всеми свойствами, предъявляемыми к вейвлетам, и лучшей разрешающей способностью.

Заключение

Построено ортогональное семейство вейвлетов на основе ВВСФ-волновой вытянутой сфероидальной функции нулевого порядка – оценены показатели эффективности. Доказано, что нормированная ВВСФ нулевого порядка является масштабирующей функцией (вейвлетообразующей) и что семейство вейвлетов ВВСФ нулевого порядка удовлетворяет всем требованиям по ограниченности, локализуемости во временной и частотной области, самоподобию, нулевому среднему, обладает лучшей разрешающей способностью по сравнению с другими вейвлетами.

Таблица 1: Оценка показателей эффективности вейвлетов

Свойства	Вейвлеты										
	ВВСФ	Хаара	Гаусса	Добеши 2-45	Симмлеты 1-10	Койфлеты 1-5	Шеннона	B-сплайн	Мейера	Морле	Кравченко
Ограниченность	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Непрерывность	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Дифференцируемость	Беск. диф.	-	Беск. диф.	Огр. диф.	Огр. диф.	Огр. диф.	Беск. диф.	Огр. диф.	Огр. диф.	Беск. диф.	Беск. диф.
Финитность спектра	+	-	-	-	-	-	+	-	+	-	-
Самоподобие спектра	+	-	+	-	-	-	-	-	-	-	-
Самоподобие по сдвигу и сжатию	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-
Компактность во временной области	+	+	-	+	+	+	-	-	-	-	+
Масштабирующая функция	+	+	-	+	+	+	+	+	+	-	+
Ортогональность системы вейвлетов	+	+	-	+	+	+	+	+	+	-	+
Аналитическое выражение для вейвлета	+	+	+	-	-	-	+	+	-	+	+
Разрешающая способность (в пикселях)	2	4	4	4-20	6	6	6	7	7	5	4

Разработан и промоделирован на ПЭВМ алгоритм вычисления вейвлет-коэффициентов.

Предложенное семейство вейвлетов применимо: для анализа спектральных характеристик функций с конечной энергией (принадлежащих пространству L_2), для ограниченных функций на интервалах задания аргумента, для функций с финитным спектром, ширина полосы которых не превосходит ширины полосы вейвлета.

Список литературы

[1] Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 464 с.

[2] Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в Matlab. М.: ДМК Пресс, 2005. 304 с.

[3] Катулев А.Н., Малевинкий М.Ф. Вейвлет-нечетные волновые сфероидальные функции в задаче сегментации двумерного изображения // Автометрия. 2016. Т. 52, № 3. С. 10–19.

[4] Виленчик Л.С., Катулев А.Н., Малевинский М.Ф. Метод вычисления вытянутых волновых сфероидальных функций на основе ряда Котельникова // Электромагнитные волны и электронные системы. 1997. Т. 2, № 4. С. 5–9.

[5] Комаров И.В., Пономарев Л.И., Славянов С.Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. М.: ФМЛ, 1976. 320 с.

[6] Кудинов А.Н., Катулев А.Н., Малевинский М.Ф. Математические методы оценки показателей безопасности состояний динамических систем. М.: Изд. МГУ им. М.В. Ломоносова, 2005. 375 с.

[7] Хургин Я.И., Яковлев В.П. Финитные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971. 408 с.

[8] Фрейзер М. Введение в вэйвлеты в свете линейной алгебры. М.: Бином, 2008. 487 с.

[9] Аблеков В.К., Колядин С.А., Фролов А.В. Высокоразрешающие оптические системы. М.: Машиностроение, 1985. 176 с.

[10] Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л. Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях. М.: Физматлит, 2006. 416 с.

Библиографическая ссылка

Катулев А.Н., Малевинский М.Ф. Семейство вейвлетов на основе волновой вытянутой сфероидальной функции нулевого порядка // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 1. С. 71–84.

Сведения об авторах

1. **Катулев Александр Николаевич**
ведущий научный сотрудник научно-исследовательского центра Центрального научно-исследовательского института войск ВКО Минобороны России.

Россия, 170042, г. Тверь, наб. Афанасия Никитина, д. 32.

2. **Малевинский Михаил Федорович**
профессор кафедры математического моделирования Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

A FAMILY OF WAVELETS BASED ON A PROLATE SPHEROIDAL WAVE FUNCTION OF ZERO ORDER

Katulev Aleksandr Nikolaevich
Leading researcher at Research Center, Central Scientific Research Institute of the Aerospace Defense of the Russian Ministry of Defense, Tver.
Russia, 170042, Tver, 32 Afanasii Nikitin quay.

Malevinskii Mikhail Fedorovich
Professor at Mathematical Modeling department, Tver State University.
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU.

Received 20.08.2016, revised 20.10.2016.

In this article class of wavelets on the basis of zero order prolate spheroidal wave function is synthesized. Prolate spheroidal wave function is mother wavelet. This function dominates by energy each of well-known mother wavelets on given support. This article is contribution to the theory and practice of wavelet-analysis.

Keywords: wavelet, prolate spheroidal wave function, scaling function.

Bibliographic citation

Katulev A.N., Malevinskiy M.F. A family of wavelets based on a prolate spheroidal wave function of zero order. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2017, no. 1, pp. 71–84. (in Russian)

References

[1] Dobeshi I. *Desyat Lektsii po Veivletam* [Ten Lectures on Wavelets]. NITs «Regulyarnaya i Khaoticheskaya Dinamika» Publ., Izhevsk, 2001. 464 p. (in Russian)

[2] Smolentsev N.K. *Osnovy Teorii Veivletov. Veivlety v Matlab* [Fundamentals of the Theory of Wavelets. Wavelets in Matlab]. DMK Press, Moscow, 2005. 304 p. (in Russian)

[3] Katulev A.N., Malevinkii M.F. Wavelet-odd wave spheroidal functions in the problem of two-dimensional image segmentation. *Avtometriya* [Autometry], 2016, vol. 52(3), pp. 10–19. (in Russian)

[4] Vilenchik L.S., Katulev A.N., Malevinskii M.F. Method for calculating prolate wave spheroidal functions on the basis of Kotelnikov series. *Elektromagnitnye Volny i Elektronnye Sistemy* [Electromagnetic Waves and Electronic Systems], 1997, vol. 2(4), pp. 5–9. (in Russian)

[5] Komarov I.V., Ponomarev L.I., Slavyanov S.Yu. *Sferoidalnye i Kulonovskie Sferoidalnye Funktsii* [Spheroidal and Coulomb Spheroidal Functions]. Fizmatlit Publ., Moscow, 1976. 320 p. (in Russian)

[6] Kudinov A.N., Katulev A.N., Malevinskii M.F. *Matematicheskie Metody Otsenki Pokazatelei Bezopasnosti Sostoyanii Dinamicheskikh Sistem* [Mathematical Methods for Estimating the Safety Indicators of States of Dynamical Systems]. Lomonosov MSU Publ., Moscow, 2005. 375 p. (in Russian)

[7] Khurgin Ya.I., Yakovlev V.P. *Finitnye Funktsii v Fizike i Tekhnike* [Finite Functions in Physics and Engineering]. Nauka Publ., Moscow, 1971. 408 p. (in Russian)

[8] Freizer M. *Vvedenie v Veivlety v Svete Lineinoi Algebry* [Introduction to Wavelets in the Light of Linear Algebra]. Binom Publ., Moscow, 2008. 487 p. (in Russian)

[9] Ablekov V.K., Kolyadin S.A., Frolov A.V. *Vysokorazreshayushchie Opticheskie Sistemy* [High-Resolution Optical Systems]. Mashinostroenie Publ., Moscow, 1985. 176 p. (in Russian)

[10] Kravchenko V.F., Rvachev V.L. *Algebra Logiki, Atomarnye Funktsii i Veivlety v Fizicheskikh Prilozheniyakh* [Algebra of Logic, Atomic Functions and Wavelets in Physical Applications]. Fizmatlit Publ., Moscow, 2006. 416 p. (in Russian)