УДК 517.95, 532.5

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ СТАЦИОНАРНЫХ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Шеретов Ю.В.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 10.01.2017, после переработки 20.02.2017.

Построены два новых точных решения стационарных квазигидродинамических уравнений в цилиндрических координатах. Первое решение является общим для систем Эйлера и Навье–Стокса. Второе удовлетворяет системе Навье–Стокса, но не является точным решением уравнений Эйлера. Оба решения описывают вихревые структуры в жидкости.

Ключевые слова: системы Эйлера и Навье–Стокса, квазигидродинамические уравнения, цилиндрические координаты, точные решения.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 1. С. 85–94.

Введение

Вихревые образования в жидкости исследовались главным образом в рамках моделей Эйлера и Навье–Стокса [1, 2]. Постоянная средняя плотность жидкости ρ входит в качестве параметра в обе указанные модели. Система Навье–Стокса включает еще одну физически осмысленную положительную константу – коэффициент вязкости (динамический или кинематический). Экспериментально измеряемая скорость звука c_s не является определяющим параметром в системе Навье–Стокса. Однако скорость распространения возмущений в сплошной среде не может не оказывать влияния на характер ее течения.

В 1993 г. автором данной статьи была предложена еще одна математическая модель течений жидкости, получившая название квазигидродинамической (КГД) [3]. Эта система, содержащая c_s в качестве параметра, стала предметом многочисленных исследований [4, 5]. Были выявлены ее глубокие связи с классическими уравнениями Эйлера и Навье–Стокса. Система КГД использовалась для построения численных методов решения системы Навье–Стокса в естественных переменных, как двумерном, так и в трехмерном случае [6, 7]. В настоящей работе построены два новых точных решения стационарных квазигидродинамических уравнений в цилиндрических координатах. Первое решение является общим для систем Эйлера и Навье–Стокса. Второе удовлетворяет системе Навье–Стокса, но не является точным решением уравнений Эйлера. Оба решения описывают вихревые структуры в жидкости.

1. Общее точное решение стационарных систем Навье–Стокса, Эйлера и квазигидродинамической системы в цилиндрических координатах

Стационарная система Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости без учета влияния внешних сил в цилиндрических координатах может быть записана следующим образом:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(u_\varphi u_r)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(u_z u_r)}{\partial z} - \frac{u_\varphi^2}{r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} =$$
$$= 2\nu\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\sigma_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} - \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{r}\Big), \tag{1.2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r u_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(u_\varphi^2)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(u_z u_\varphi)}{\partial z} + \frac{u_r u_\varphi}{r} + \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} =$$
$$= 2\nu\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\sigma_{r\varphi})}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{z\varphi}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\varphi r}}{r}\Big), \tag{1.3}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r u_z)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(u_\varphi u_z)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(u_z^2)}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} =$$
$$= 2\nu\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\sigma_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}\Big). \tag{1.4}$$

Символом ρ обозначена плотность жидкости, ν – коэффициент кинематической вязкости. Величины ρ и ν считаются заданными положительными постоянными. Компоненты тензора скоростей деформаций определяются с помощью соотношений

$$\sigma_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, \quad \sigma_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$
$$\sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r} = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + r\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{u_\varphi}{r}\Big)\Big],$$
$$\sigma_{\varphi z} = \sigma_{z\varphi} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi}\Big),$$
$$\sigma_{zr} = \sigma_{rz} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\Big). \tag{1.5}$$

Связь декартовых координат $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ с цилиндрическими координатами (r, φ, z) дается равенствами

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$

Неизвестными величинами являются компоненты $u_r = u_r(r,\varphi,z)$, $u_\varphi = u_\varphi(r,\varphi,z)$, $u_z = u_z(r,\varphi,z)$ вектора скорости $\vec{u}$ в ортонормированном локальном базисе ($\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_z$) и давление $p = p(r,\varphi,z)$.

Если в системе Навье–Стокса (1.1) – (1.4) пренебречь вязкими членами, то получим классическую систему Эйлера в динамике идеальной жидкости:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \tag{1.6}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r^2)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(u_\varphi u_r)}{\partial\varphi} + \frac{\partial(u_z u_r)}{\partial z} - \frac{u_\varphi^2}{r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \tag{1.7}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r u_\varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(u_\varphi^2)}{\partial\varphi} + \frac{\partial(u_z u_\varphi)}{\partial z} + \frac{u_r u_\varphi}{r} + \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\varphi} = 0, \tag{1.8}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r u_z)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(u_\varphi u_z)}{\partial\varphi} + \frac{\partial(u_z^2)}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0. \tag{1.9}$$

Для $r > 0$ определим функции

$$u_r = -\frac{ar}{2}, \quad u_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad u_z = az, \tag{1.10}$$

$$p = p(r,z) = p_0 + \frac{\rho a^2}{8}\big((r_0^2 - r^2) + 4(z_0^2 - z^2)\big) + \frac{\rho\Gamma^2}{8\pi^2}\Big(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}\Big). \tag{1.11}$$

Здесь a и Γ – постоянные величины. Символом p_0 обозначено значение давления в точке (r_0, z_0), где $r_0 > 0$. Подставим (1.10) в (1.5). Получим

$$\sigma_{rr} = -\frac{a}{2}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{a}{2}, \quad \sigma_{zz} = a,$$

$$\sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r} = -\frac{\Gamma}{2\pi r^2}, \quad \sigma_{\varphi z} = \sigma_{z\varphi} = 0, \quad \sigma_{zr} = \sigma_{rz} = 0. \tag{1.12}$$

Кроме того,

$$u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} + u_z\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\varphi^2}{r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = 0,$$

$$u_r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + u_z\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{u_r u_\varphi}{r} + \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\varphi} = 0,$$

$$u_r\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0. \tag{1.13}$$

Принимая во внимание равенства (1.12) и (1.13), нетрудно убедиться в том, что набор функций (1.10), (1.11) образует точное решение как системы Навье–Стокса (1.1) – (1.4), так и системы Эйлера (1.6) – (1.10). При $\Gamma \neq 0$ это решение описывает стационарный вихрь в жидкости.

Выпишем квазигидродинамическую систему без учета влияния внешних сил в цилиндрических координатах для случая установившихся течений:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=\frac{1}{r}\frac{\partial(rw_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial w_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial w_z}{\partial z}, \tag{1.14}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r^2)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(u_\varphi u_r)}{\partial\varphi}+\frac{\partial(u_z u_r)}{\partial z}-\frac{u_\varphi^2}{r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}=\\
=2\nu\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\sigma_{rr})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi r}}{\partial\varphi}+\frac{\partial\sigma_{zr}}{\partial z}-\frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{r}\Big)+\\
+\frac{2}{r}\frac{\partial(rw_r u_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(w_\varphi u_r)}{\partial\varphi}+\frac{\partial(w_z u_r)}{\partial z}+\\
+\frac{1}{r}\frac{\partial(u_\varphi w_r)}{\partial\varphi}+\frac{\partial(u_z w_r)}{\partial z}-2\frac{u_\varphi w_\varphi}{r},\end{gathered} \tag{1.15}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r u_\varphi)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(u_\varphi^2)}{\partial\varphi}+\frac{\partial(u_z u_\varphi)}{\partial z}+\frac{u_r u_\varphi}{r}+\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\varphi}=\\
=2\nu\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\sigma_{r\varphi})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{\partial\sigma_{z\varphi}}{\partial z}+\frac{\sigma_{\varphi r}}{r}\Big)+\\
+\frac{1}{r}\frac{\partial(rw_r u_\varphi)}{\partial r}+\frac{2}{r}\frac{\partial(w_\varphi u_\varphi)}{\partial\varphi}+\frac{\partial(w_z u_\varphi)}{\partial z}+\\
+\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r w_\varphi)}{\partial r}+\frac{\partial(u_z w_\varphi)}{\partial z}+\frac{u_r w_\varphi+u_\varphi w_r}{r},\end{gathered} \tag{1.16}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r u_z)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(u_\varphi u_z)}{\partial\varphi}+\frac{\partial(u_z^2)}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=\\
=2\nu\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial(r\sigma_{rz})}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi z}}{\partial\varphi}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\Big)+\\
+\frac{1}{r}\frac{\partial(rw_r u_z)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(w_\varphi u_z)}{\partial\varphi}+2\frac{\partial(w_z u_z)}{\partial z}+\\
+\frac{1}{r}\frac{\partial(ru_r w_z)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(u_\varphi w_z)}{\partial\varphi}.\end{gathered} \tag{1.17}$$

Здесь

$$w_r=\tau\Big(u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{u_\varphi^2}{r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\Big),$$

$$w_\varphi=\tau\Big(u_r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}+\frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+u_z\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}+\frac{u_r u_\varphi}{r}+\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\varphi}\Big),$$

$$w_z = \tau\Big(u_r\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\Big). \tag{1.18}$$

Компоненты тензора скоростей деформаций вычисляются по формулам (1.5).

Система (1.14) – (1.17) отличается от (1.1) – (1.4) слагаемыми, содержащими постоянный положительный множитель τ, имеющий размерность времени. Неизвестными величинами в ней являются проекции вектора скорости $u_r = u_r(r,\varphi,z)$, $u_\varphi = u_\varphi(r,\varphi,z)$, $u_z = u_z(r,\varphi,z)$ и давление $p = p(r,\varphi,z)$. Параметр τ может быть определен с помощью выражения

$$\tau = \frac{\nu}{c_s^2}, \tag{1.19}$$

где c_s – скорость звука в жидкости. Для воды при температуре $T_0 = 293.15$ K и нормальном атмосферном давлении $p_0 = 1.01325 \cdot 10^6$ *дин/см*^{2} плотность $\rho = 1$ *г/см*^{3}, кинематическая вязкость $\nu = 0.01$ *см*^{2}*/с*, скорость звука $c_s = 1.483 \cdot 10^5$ *см/с*. С помощью (1.19) находим $\tau = 4.5469 \cdot 10^{-13}$ с.

Покажем, что набор функций (1.10), (1.11) образует точное решение квазигидродинамической системы (1.14) – (1.17). Подстановка (1.13) в (1.18) приводит к равенствам

$$w_r = 0, \quad w_\varphi = 0, \quad w_z = 0.$$

Таким образом, τ–члены в КГД системе обнуляются и она переходит в систему Навье–Стокса. Найденное решение можно рассматривать как иллюстрирующий пример к теореме, доказанной в [5] на с. 95. В газовой динамике другое вихревое решение, общее для стационарных систем Эйлера, Навье–Стокса и КГД, построено в [8].

2. Общее точное решение системы Навье–Стокса и квазигидродинамической системы в цилиндрических координатах, не удовлетворяющее уравнениям Эйлера

Будем искать точное решение системы Навье–Стокса (1.1) – (1.4) в виде

$$u_r = 0, \quad u_\varphi = \Omega r + \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad u_z = \frac{A}{4\nu\rho}r^2 + B\ln r + C, \tag{2.1}$$

$$p = p(r,z). \tag{2.2}$$

Здесь Ω, Γ, A, B и C – постоянные величины. Будем считать, что одна из констант Ω или Γ отлична от нуля. Постоянная A не равна нулю. С помощью (2.1) и (1.5) найдем компоненты тензора скоростей деформаций:

$$\sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = 0, \quad \sigma_{zz} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r} = -\frac{\Gamma}{2\pi r^2},$$

$$\sigma_{\varphi z} = \sigma_{z\varphi} = 0, \quad \sigma_{zr} = \sigma_{rz} = \frac{A}{4\nu\rho}r + \frac{B}{r}. \tag{2.3}$$

Подстановка (2.1) в (1.1) – (1.4) приводит к соотношениям

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho u_\varphi^2}{r}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = A. \tag{2.4}$$

Фиксируем точку (r_0, z_0), где $r_0 > 0$. Пусть p_0 – давление в этой точке. Используя (2.4) и (2.1), находим

$$p = p(r, z) = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\rho u_\varphi^2(r_*)}{r_*}\, dr_* + A(z - z_0) =$$

$$= \frac{\rho\Omega^2}{2}\big(r^2 - r_0^2\big) + \frac{\rho\Omega\Gamma}{\pi}\ln\Big(\frac{r}{r_0}\Big) + \frac{\rho\Gamma^2}{8\pi^2}\Big(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}\Big) + A(z - z_0), \quad r > 0. \qquad (2.5)$$

Набор функций (2.1), (2.5) образует точное решение системы Навье–Стокса (1.1) – (1.4).

Поскольку $A \neq 0$, построенное решение не удовлетворяет уравнениям Эйлера (1.6) – (1.9). Покажем, что оно является точным для квазигидродинамической системы (1.14) – (1.18). Подстановка (2.1), (2.5) в (1.18) дает

$$w_r = 0, \quad w_\varphi = 0, \quad w_z = \frac{\tau A}{\rho}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что все τ–члены в КГД системе обращаются в ноль. Еще одно точное вихревое решение стационарной квазигидродинамической системы в цилиндрических координатах построено.

Заключение

В научной литературе известны другие вихревые решения стационарных уравнений гидродинамики. Нидерландский физик Иоханнес Мартинус Бюргерс в 1948 году построил точное решение системы Навье–Стокса (1.1) – (1.4), описывающее вихрь в жидкости [9,10]. Оно имеет вид

$$u_r = -\frac{ar}{2}, \quad u_\varphi = u_{ns}(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r}\Big[1 - \exp\Big(-\frac{ar^2}{4\nu}\Big)\Big], \quad u_z = az,$$

$$p = p(r, z) = p_1 - \frac{\rho a^2}{8}\big(r^2 + 4z^2\big) - \rho\int\limits_{r}^{+\infty} \frac{u_{ns}^2(r_*)}{r_*}\, dr_*, \quad r > 0.$$

Здесь $a = const > 0$, $\Gamma = const \neq 0$, $p_1 = const$.

Еще одно решение системы Навье–Стокса (1.1) – (1.4) было найдено в 1963 году Ратипом Беркером (см. [2], с. 201). Компоненты поля скорости выглядят следующим образом:

$$u_r = \frac{2A}{R^2}\, rz, \quad u_\varphi = 0, \quad u_z = 2A\Big(1 - \frac{2r^2 + z^2}{R^2}\Big),$$

где $R = const > 0$, $A = const \neq 0$, $r > 0$. Решение системы Эйлера в динамике идеальной жидкости, опубликованное в 1893 году Михеем Хиллом и описывающее шаровой вихрь, имеет те же составляющие вектора скорости. Отличаются лишь распределения давления

$$p = p_{ns}(r, z) = p_1 + \rho A^2\Big[\Big(\frac{r}{R}\Big)^4 - 2\Big(\frac{r}{R}\Big)^2 - 2\Big(\frac{z}{R}\Big)^4 + 4\Big(\frac{z}{R}\Big)^2\Big] - \frac{20\rho\nu A}{R^2}z$$

и

$$p = p_{eu}(r,z) = p_1 + \rho A^2\Big[\Big(\frac{r}{R}\Big)^4 - 2\Big(\frac{r}{R}\Big)^2 - 2\Big(\frac{z}{R}\Big)^4 + 4\Big(\frac{z}{R}\Big)^2\Big],$$

поскольку функция $p_{ns}(r,z)$ зависит от параметра ν, а функция $p_{eu}(r,z)$ от него не зависит. Попытки автора построить точные решения квазигидродинамических уравнений (1.14) – (1.17), описывающие вихри Бюргерса и Хилла, пока к успеху не привели.

Список литературы

[1] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.

[2] Шмыглевский Ю.Д. Аналитические исследования динамики газа и жидкости. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 232 с.

[3] Шеретов Ю.В. О единственности решений одной диссипативной системы гидродинамического типа // Математическое моделирование. 1994. Т. 6, № 10. С. 35–45.

[4] Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 400 с.

[5] Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской гос. ун–т, 2016. 222 с.

[6] Жериков А.В. Применение квазигидродинамических уравнений: математическое моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости. Saarbrücken: "Lambert Academic Publishing", 2010. 124 с.

[7] Елизарова Т.Г., Милюкова О.Ю. Численное моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости в кубической каверне // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003. Т. 43, № 3. С. 453–466.

[8] Григорьева В.В., Шеретов Ю.В. О точных решениях полных квазигидродинамических уравнений для стационарных течений // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 1. С. 93–101.

[9] Burgers J.M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence // Advances in Applied Mechanics. 1948. V. 1. Pp. 171–199.

[10] Брутян М.А. Вихрь Бюргерса в микрополярной жидкости // Доклады НАН Армении. 2010. № 1. С. 35–41.

Библиографическая ссылка

Шеретов Ю.В. О точных решениях стационарных квазигидродинамических уравнений в цилиндрических координатах // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 1. С. 85–94.

Сведения об авторах

1. **Шеретов Юрий Владимирович**
заведующий кафедрой математического анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru.

ON THE EXACT SOLUTIONS OF STATIONARY QUASI–HYDRODYNAMIC EQUATIONS IN CYLINDRICAL COORDINATES

Sheretov Yurii Vladimirovich
Head of Mathematical Analysis department, Tver State University.
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU. E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

Received 10.01.2017, revised 20.02.2017.

Two new exact solutions of stationary quasi–hydrodynamic equations in cylindrical coordinates are constructed. First solution is common for Euler and Navier–Stokes systems. The second solution satisfies to Navier–Stokes system, but it is not exact solution for Euler equations. Both solutions describe vortex structures in the fluid.

Keywords: Euler and Navier-Stokes systems, quasi–hydrodynamic equations, cylindrical coordinates, exact solutions.

Bibliographic citation

Sheretov Yu.V. On the exact solutions of stationary quasi–hydrodynamic equations in cylindrical coordinates. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2017, no. 1, pp. 85–94. (in Russian)

References

[1] Loytsyansky L.G. *Mekhanika Zhidkosti i Gaza* [Fluid and Gas Mechanics]. “Nauka” Publ., Moscow, 1987. 840 p. (in Russian)

[2] Shmyglevskii Yu.D. *Analiticheskie Issledovaniya Dinamiki Gaza i Zhidkosti* [Analytical Investigation of Fluid and Gas Dynamics]. “Editorial URSS” Publ., Moscow, 1999. 232 p. (in Russian)

[3] Sheretov Yu.V. On uniqueness of the solutions for one dissipative system of hydrodynamic type. *Matematicheskoe Modelirovanie* [Mathematical Modeling], 1994, vol. 6(10), pp. 35–45. (in Russian)

[4] Sheretov Yu.V. *Dinamika Sploshnykh Sred pri Prostranstvenno–Vremennom Osrednenii* [Continuum Dynamics under Spatiotemporal Averaging]. "Regular and Chaotic Dynamics" Publ., Moscow, Izhevsk, 2009. 400 p.

[5] Sheretov Yu.V. *Regulyarizovannye Uravneniya Gidrodinamiki* [Regularized Hydrodynamic Equations]. Tver State University, Tver, 2016. 222 p. (in Russian)

[6] Zherikov A.V. *Primenenie Kvazigidrodinamicheskikh Uravnenii: Matematicheskoe Modelirovanie Techeniy Vyazkoi Neszhimaemoi Zhidkosti* [Application of Quasi–Hydrodynamic Equations: Mathematical Modeling of Viscous Incompressible Fluid]. Lambert Academic Publishing, Saarbrücken, 2010. 124 p. (in Russian)

[7] Elizarova T.G., Milyukova O.Yu. Numerical simulation of viscous incompressible flow in a cubic cavity. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2003, vol. 43(3), pp. 433–445.

[8] Grigoryeva V.V., Sheretov Yu.V. On the exact solutions of full quasi–hydrodynamic equations for stationary flows. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2016, no. 1, pp. 93–101. (in Russian)

[9] Burgers J.M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence. *Advances in Applied Mechanics*. "Academic Press" Publ., New York, 1948, vol. 1, pp. 171–199.

[10] Brutyan M.A. Burgers vortex in a micropolar fluid. *Doklady NAN Armenii* [National Academy of Sciences of Armenia Reports], 2010, no. 1, pp. 35–40. (in Russian)