ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

УДК 510.52, 510.643

ЭФФЕКТИВНЫЙ КРИТЕРИЙ ДЕДУКТИВНОСТИ МНОЖЕСТВ ФОРМУЛ ЛОГИКИ[1]

Горбунов И.А.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 02.12.2016, после переработки 25.01.2017.

Р. Вуйцицкий ввёл понятие хорошо определённой (well-determined) логики [1]. Пропозициональная логика называется хорошо определённой, если она обладает свойством конъюнкции и для неё верна теорема о дедукции. Хорошо определённые логики интересны тем, что присущее им отношение логического следования некоторым образом выразимо средствами самой логики. Следует отметить, что Р. Вуйцицкий в качестве критерия дедуктивности множества формул использовал условие принадлежности к тестируемому множеству некоторого бесконечного множества формул. Таким образом, приведённый им критерий дедуктивности не был эффективным (алгоритмичным). В данной работе доказаны теоремы, являющиеся эффективными критериями дедуктивности множеств формул пропозициональных логик в языках, содержащих связки импликации и конъюнкции. Также доказана конечная аксиоматизируемость минимальных дедуктивных множеств в языках хорошо определённых логик.

Ключевые слова: хорошо определённая логика, дедуктивное множество.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 1. С. 95–103.

Введение

В данной работе мы будем задавать логики в стандартной модели пропозиционального языка. Алфавит этого языка состоит из трёх множеств: множества вспомогательных символов $\{(,)\}$, счётного множества V, элементы которого называем *пропозициональными переменными*, и конечного непустого множества Σ, элементы которого называем *пропозициональными связками.* Символы связок понимаем как конечноместные функциональные символы. Термы строятся обычным образом. Всякий терм, построенный из символов алфавита, будем называть *формулой. Языком* S будем называть множество всех формул алфавита. *Подстановку*

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 14–06–00298-а и № 16–07–01272-а).

определим обычным образом, то есть как гомоморфизм $\varepsilon : S \to S$, который является продолжением отображения $\varepsilon : V \to S$. Обозначим через E множество всех подстановок.

Функцию $C : 2^S \to 2^S$ будем называть *стандартной операцией добавления следствий* над языком S (более кратко *следованием* или *дедуктивным замыканием*), если для любых $X, Y \in 2^S$:

A1. $X \subseteq C(X)$;

A2. $C(X) = C(C(X))$;

A3. $X \subseteq Y \Rightarrow C(X) \subseteq C(Y)$ (монотонность);

A4. множество $C(\varnothing)$ замкнуто относительно любой подстановки;

A5. $\varepsilon(C(X)) \subseteq C(\varepsilon(X))$ для любой подстановки ε (структурность);

A6. $C(X) = \bigcup\limits_{Y \subseteq X} C(Y)$, где Y — конечные множества (финитарность).

Будем называть *схемой* любую пару $\langle X, \alpha \rangle$, где $\alpha \in S$, а X — конечное множество формул. Будем говорить, что *правило* X/α *порождено схемой* $\langle X, \alpha \rangle$, если $X/\alpha = \{\langle \varepsilon(X), \varepsilon(\alpha) \rangle \mid \varepsilon \in E\}$. Правило вида $\varnothing/\alpha$ будем называть *тавтологией*, или *схемой аксиом*, и обозначать его просто α.

Множество $X \in 2^S$ будем называть замкнутым относительно правила ρ, если для любого $Y \subseteq X$ и для любого $\alpha \in S$ верно, что если $\langle Y, \alpha \rangle \in \rho$, то и $\alpha \in X$. Будем говорить, что следование C *базируется на множестве правил вывода* R, если для любого $X \in 2^S$ множество $C(X)$ является наименьшим множеством, содержащим X и замкнутым относительно каждого правила из R. Для данного следования C множество $C(X)$ будем называть *теорией* со множеством *аксиом* X.

Пару $\langle S, C \rangle$, где C — дедуктивное замыкание, будем называть *дедуктивной системой над* S или *пропозициональной логикой в языке* S, поскольку задание операции следования эквивалентно заданию на S отношения логического следования.

Таким образом, для задания операции дедуктивного замыкания достаточно задать множество правил R и определить понятие вывода из множества аксиом X. Здесь вывод мы будем понимать как стандартный линейный вывод.

Мы будем рассматривать логики в языке, содержащем две двухместные связки $\to$ и $\wedge$, которые мы, пока условно, назовём импликацией и конъюнкцией. В связи с этим введём следующие обозначения.

Посредством квазиформулы $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ будем обозначать конъюнкцию формул $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, взятых в произвольном порядке и с произвольной (но правильной) расстановкой скобок. Запись $[\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \alpha]$ будет обозначать множество всех импликаций, в посылках которых стоят различные конъюнкции, соответствующие данной квазиформуле.

Пусть X — некоторое конечное непустое множество формул; посредством $X^\wedge$ будем обозначать квазиформулу, имеющую вид конъюнкции всех формул из этого множества. Формулы, содержащие в качестве связки только конъюнкцию, везде далее будем обозначать строчными греческими буквами с индексом $\wedge$, например, $\alpha^\wedge$.

Множество пропозициональных переменных, входящих в формулу α, будем обозначать $Var(\alpha)$. Запись формул, образованных связками $\to$ и $\wedge$, будет стандартной.

Кроме того, множество следствий из конечного множества $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ будем обозначать $C(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, а множество следствий из множества $\{\alpha\} \cup X$ зачастую будем обозначать как $C(\alpha, X)$.

1. Хорошо определённые логики и дедуктивные множества

В работе [1] Р. Вуйицкий ввёл понятия хорошо определённой логики и дедуктивного множества формул. Хорошо определённые логики интересны тем, что присущее им отношение логического следования выразимо средствами самой логики, то есть для хорошо определённой логики $\langle S, C\rangle$ верно условие

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash_C \beta \Leftrightarrow \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \beta \in C(\varnothing).$$

Логика называется *хорошо определённой* тогда и только тогда, когда конъюнкция и импликация связаны с дедуктивным замыканием следующим образом:

(A) $[\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to\ \alpha] \subseteq C(\varnothing)\ \Leftrightarrow\ \alpha \in C(\alpha_1,\ \ldots\ ,\alpha_n)$.

В работах [1] и [2] доказано, что условие (A) эквивалентно условиям:

(B1) C — структурное и финитарное следование;

(B2) $\alpha \to\ \beta \in C(\varnothing)\ \Leftrightarrow\ \beta \in C(\alpha)$;

(B3) $C(\alpha \wedge \beta) = C(\alpha,\ \beta)$.

Множество формул L будем называть *дедуктивным*, если существует такая хорошо определённая логика C, что $C(\varnothing) = L$.

В работах [1] и [2] приведён *критерий дедуктивности* множества формул, здесь мы представим его в несколько изменённой форме.

Множество L является дедуктивным тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующим условиям:

(C1) *L замкнуто относительно всех подстановок;*

(C2) *для любых формул $\alpha^\wedge$ и $\beta^\wedge$ верно, что если $Var(\beta^\wedge) \subseteq Var(\alpha^\wedge)$, то $\alpha^\wedge \to \beta^\wedge \in L$;*

(C3) *множество L замкнуто относительно следующих правил вывода:*

$$(TR)\frac{p \to q, q \to r}{p \to r}, \qquad (CM)\frac{p_1 \to q_1, p_2 \to q_2}{p_1 \wedge p_2 \to q_1 \wedge q_2}, \qquad (AD)\frac{p, q}{p \wedge q},$$

$$(CV)\frac{p, p \wedge q \to r}{q \to r}, \qquad (MP)\frac{p, p \to q}{q}, \qquad (EA)\frac{p \to q}{p \wedge r \to q}.$$

В таком виде этот критерий недостаточно алгоритмичен, поскольку содержащийся в нём пункт (C2) предполагает проверку включения бесконечного множества $K = \{\alpha^\wedge \to \beta^\wedge \mid Var(\beta^\wedge) \subseteq Var(\alpha^\wedge)\}$. Здесь мы устраним этот недостаток, заменив в критерии бесконечное множество на конечное.

В работе [2] критерий дедуктивности непосредственно следует из Леммы 2*, Леммы 3*, Теоремы 6* и Теоремы 7*, при этом факт включения множества K во множество L используется только при доказательстве Теоремы 6* и Теоремы 7*.

Чтобы данный текст можно было понимать, не обращаясь к тексту работы [2], утверждения этих лемм и теорем приведём здесь с охранением нумерации их в работе [2]. Для того, чтобы отличать их от лемм и теорем, которые являются утверждениями настоящего текста, номера лемм и теорем работы [2] будут отмечены звёздочкой.

Лемма 2*. *Если множество L является дедуктивным, то оно удовлетворяет следующим условиям:*

(C1) *L замкнуто относительно всех подстановок;*

(C2) *для любых формул $\alpha^\wedge$ и $\beta^\wedge$ верно, что если $Var(\beta^\wedge) \subseteq Var(\alpha^\wedge)$, то $\alpha^\wedge \to \beta^\wedge \in L$;*

(C3) *множество L замкнуто относительно следующих правил вывода:*

$$(TR)\frac{p \to q, q \to r}{p \to r}, \qquad (CM)\frac{p_1 \to q_1, p_2 \to q_2}{p_1 \wedge p_2 \to q_1 \wedge q_2}, \qquad (AD)\frac{p, q}{p \wedge q},$$

$$(CV)\frac{p, p \wedge q \to r}{q \to r}, \qquad (MP)\frac{p, p \to q}{q}, \qquad (EA)\frac{p \to q}{p \wedge r \to q}.$$

Далее нам понадобится следующее определение.

Для любого непустого множества формул L посредством $\vec{L}$ обозначим одноместную операцию на множестве 2^S, которую определим следующим образом

$$\alpha \in \vec{L}(X) \Leftrightarrow \exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in X \cup L\ (\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \alpha \in L). \qquad (1)$$

Теорема 6*. *Пусть L — некоторое множество формул, замкнутое относительно всех подстановок и правил из множества $\{(TR), (CM)\}$, для которого верно, что $K \subseteq L$. Тогда $\vec{L}$ является стандартным следованием, причём $L \subseteq \vec{L}(\varnothing)$.*

Операцию $\vec{L}$, определённую для множества L, удовлетворяющего условиям Теоремы 6*, будем называть *импликативным следованием над* множеством L.

Лемма 3*. *Пусть L — некоторое множество формул, для которого выполнены условия Теоремы 6*. Для следования $\vec{L}$ верно, что $\vec{L}(\varnothing) = L$, если L замкнуто относительно правил из множества $\{(AD), (MP)\}$.*

Теорема 7*. *Пусть L — некоторое множество формул. Операция $\vec{L}$ является хорошо определённым следованием, для которого $\vec{L}(\varnothing) = L$, если и только если L замкнуто относительно подстановки, $K \subseteq L$ и L замкнуто относительно правил из множества $\{(TR), (CM), (AD), (MP), (CV), (EA)\}$.*

При доказательстве Теоремы 6* из включения $K \subseteq L$ выводится лишь факт принадлежности к L формулы $p \to p$. При доказательстве Теоремы 7* из включения $K \subseteq L$ выводится лишь факт включения в L множества формул

$$K' = \{\alpha^\wedge \to \beta^\wedge \mid Var(\beta^\wedge) = Var(\alpha^\wedge),\, |\alpha^\wedge|_p = |\beta^\wedge|_p,\, p \in V\},$$

где $|\alpha|_p$ обозначает число вхождений переменной p в формулу α.

Таким образом, во всех этих утверждениях (в том числе и в критерии) включение $K \subseteq L$ можно заменить на включение $K' \subseteq L$.

2. Критерий дедуктивности с конечным множеством формул

Введём обозначения:

$\varphi_1 = p \to p$;

$\varphi_2 = p \wedge q \to q \wedge p$;

$\varphi_3 = q \wedge p \to p \wedge q$;

$\varphi_4 = (p \wedge q) \wedge r \to p \wedge (q \wedge r)$;

$\varphi_5 = p \wedge (q \wedge r) \to (p \wedge q) \wedge r$.

Обозначим посредством K'' множество $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\}$.

Обозначим замыкание множества K'' по всем подстановкам и правилам (TR) и (CM) посредством $\hat{K}$. Заметим, что в силу определения множество $\hat{K}$ задаётся исчислением с множеством схем аксиом K'' и правилами вывода (TR) и (CM); это исчисление обозначим посредством Γ.

Лемма 1. *Если $\alpha \to \beta \in \hat{K}$, то $\beta \to \alpha \in \hat{K}$.*

Доказательство. Доказываем индукцией по построению $\hat{K}$.

Базис очевиден.

Шаг.

1. Пусть формула $\alpha \to \beta$ получена из формул $\alpha \to \gamma$ и $\gamma \to \beta$ по правилу (TR). По индукционному предположению, $\beta \to \gamma \in \hat{K}$ и $\gamma \to \alpha \in \hat{K}$. Применяя к этим формулам правило (TR), получим формулу $\beta \to \alpha$.

2. Пусть формула $\alpha \to \beta$ получена из формул $\alpha_1 \to \beta_1$ и $\alpha_2 \to \beta_2$ по правилу (CM). По индукционному предположению, $\beta_1 \to \alpha_1 \in \hat{K}$ и $\beta_2 \to \alpha_2 \in \hat{K}$. Применяя к этим формулам правило (CM), получим формулу $\beta \to \alpha$. □

Рассмотрим теперь исчисление Δ. Оно задаётся в языке $V \cup \{\wedge\} \cup \{=\} \cup \{(,)\}$. Формулы этого исчисления имеют вид $p = q$ или $\alpha^\wedge = \beta^\wedge$. Схемы аксиом этого исчисления задаются формулами:

ψ_1: $p = p$;

ψ_2: $p \wedge q = q \wedge p$;

ψ_3: $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$.

Правилами вывода этого исчисления являются следующие правила:

$$(TR^{=})\frac{p = q, q = r}{p = r}, \qquad (CM^{=})\frac{p_1 = q_1, p_2 = q_2}{p_1 \wedge p_2 = q_1 \wedge q_2}, \qquad (S^{=})\frac{p = q}{q = p}.$$

Лемма 2. *Если* $\vdash_\Delta \alpha = \beta$*, то* $\vdash_\Gamma \alpha \to \beta$.

Доказательство. Доказываем индукцией по построению вывода.

Базис очевиден.

Шаг.

1. Пусть формула $\alpha = \beta$ получена из формул $\alpha = \gamma$ и $\gamma = \beta$ по правилу $(TR^{=})$. По индукционному предположению, $\vdash_\Gamma \alpha \to \gamma$ и $\vdash_\Gamma \gamma \to \beta$. Применяя к этим формулам правило (TR), получим формулу $\beta \to \alpha$.

2. Пусть формула $\alpha = \beta$ получена из формул $\alpha_1 = \beta_1$ и $\alpha_2 = \beta_2$ по правилу $(CM^{=})$, то есть она имеет вид $\alpha_1 \wedge \alpha_2 = \beta_1 \wedge \beta_2$. По индукционному предположению, $\vdash_\Gamma \alpha_1 \to \beta_1$ и $\vdash_\Gamma \alpha_2 \to \beta_2$. Применяя к этим формулам правило (CM), получим формулу $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \to \beta_1 \wedge \beta_2$.

3. Пусть формула $\alpha = \beta$ получена из формулы $\beta = \alpha$ по правилу $(S^{=})$. По индукционному предположению, $\vdash_\Gamma \beta \to \alpha$; тогда, в силу леммы 1, $\vdash_\Gamma \alpha \to \beta$. $\square$

Практически фольклорным является тот факт, что в исчислении Δ выводима любая формула вида $\alpha^\wedge = \beta^\wedge$, где формулы $\alpha^\wedge$ и $\beta^\wedge$ отвечают условию $Var(\beta^\wedge) = Var(\alpha^\wedge)$ и условию $|\alpha^\wedge|_p = |\beta^\wedge|_p$ для любой переменной $p \in V$. Поэтому доказательство этого факта мы приводить не будем. Отметим только, что оно полностью повторяет доказательство того факта, которым обосновывается правильность записи суммы чисел вида $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5$ без какой-либо расстановки скобок и в произвольном порядке.

Из указанного факта и леммы 2 следует, что *множество* K' *является замыканием множества* K'' *по всем подстановкам и правилам* (TR) *и* (CM).

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 1. *Множество* L *является дедуктивным тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующим условиям:*

(C1) L *замкнуто относительно всех подстановок;*

(C2) $K'' \subseteq L$*;*

(C3) L *замкнуто относительно следующих правил вывода:*

$$(TR)\frac{p \to q, q \to r}{p \to r}, \qquad (CM)\frac{p_1 \to q_1, p_2 \to q_2}{p_1 \wedge p_2 \to q_1 \wedge q_2}, \qquad (AD)\frac{p, q}{p \wedge q},$$

$$(CV)\frac{p, p \wedge q \to r}{q \to r}, \qquad (MP)\frac{p, p \to q}{q}, \qquad (EA)\frac{p \to q}{p \wedge r \to q}.$$

3. Ещё меньше формул

Рассмотрим вопрос о том, возможно ли уменьшить число формул, вхождение которых во множество L необходимо проверять при определении дедуктивности этого множества. Для этого докажем следующую лемму.

Лемма 3. *Все формулы множества K'' выводимы из множества схем аксиом*

$$\omega_1 = p \to p,$$

$$\omega_2 = p \to p \land p,$$

$$\omega_3 = p \land q \to q$$

с помощью правил вывода (TR), (CM) *и* (EA).

Доказательство. Доказывать будем, описывая построения соответствующих выводов.

(φ_2) Из формулы ω_1 по правилу (EA) мы можем получить формулу $\omega_4 = p \land q \to p$. Применяя к формулам ω_3 и ω_4 правило (CM), получим формулу $(p \land q) \land (p \land q) \to q \land p$. Из последней формулы и соответствующего подстановочного варианта формулы ω_2 по правилу (TR) мы получим формулу φ_2. Формула φ_3 выводится аналогично.

(φ_4) Подстановочными вариантами формул ω_3 и ω_4 являются следующие формулы: $\omega_5 = (p \land q) \land r \to r$, $\omega_6 = (p \land q) \land r \to (p \land q)$. Применяя к последней формуле и формулам ω_3 и ω_4 правило (TR), получим формулы $\omega_7 = (p \land q) \land r \to q$ и $\omega_8 = (p \land q) \land r \to p$. Из формул ω_7 и ω_5 по правилу (CM) мы получим формулу $\omega_9 = \omega \land \omega \to q \land r$, где $\omega = (p \land q) \land r$. Применяя к формуле ω_9 и соответствующему подстановочному варианту формулы ω_2 правило (TR), мы получим формулу $\omega_{10} = \omega \to q \land r$. По правилу (CM) из формул ω_8 и ω_{10} мы получим формулу $\omega \land \omega \to p \land (q \land r)$. Из последней формулы и соответствующего подстановочного варианта формулы ω_2 по правилу (TR) мы получим формулу φ_4. Формула φ_5 выводится аналогично. □

Из леммы 3 и теоремы 1 следует теорема.

Теорема 2. *Множество L является дедуктивным тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующим условиям:*

(C1) *L замкнуто относительно всех подстановок;*

(C2) $\{p \to p, p \to p \land p, p \land q \to q\} \subseteq L$;

(C3) *L замкнуто относительно следующих правил вывода:*

$$(TR)\frac{p \to q, q \to r}{p \to r}, \qquad (CM)\frac{p_1 \to q_1, p_2 \to q_2}{p_1 \land p_2 \to q_1 \land q_2}, \qquad (AD)\frac{p, q}{p \land q},$$

$$(CV)\frac{p, p \land q \to r}{q \to r}, \qquad (MP)\frac{p, p \to q}{q}, \qquad (EA)\frac{p \to q}{p \land r \to q}.$$

Заключение

Поскольку для любой пропозициональной логики множество $C(\varnothing)$ является замкнутым относительно подстановки, то теоремы 1 и 2 являются эффективными критериями проверки дедуктивности множества $C(\varnothing)$, поскольку предлагают проверить замкнутость этого множества относительно конечного списка схем аксиом и правил вывода.

Кроме того, в качестве сопутствующего результата, из них вытекает следующий факт. В работе [2] введено *минимальное дедуктивное множество* W в языке, содержащем связки $\to$ и $\wedge$, которое определяется как множество всех формул, выводимых из множества схем аксиом $\{\alpha^\wedge \to \beta^\wedge | Var(\beta^\wedge) \subseteq Var(\alpha^\wedge)\}$ по правилам вывода (TR), (CM), (AD), (MP), (CV) и (EA).

Из указанных теорем следует, что это множество имеет конечную аксиоматизацию. То есть верна следующая теорема.

Теорема 3. *Минимальное дедуктивное множество W в языке, содержащем связки $\to$ и $\wedge$, — это множество, выводимое в исчислении со схемами аксиом $p \to p$, $p \to p \wedge p$, $p \wedge q \to q$ и правилами вывода (TR), (CM), (AD), (MP), (CV) и (EA).*

Список литературы

[1] Wojcicki R. Lectures on Propositional Calculi. Wroclaw: Ossolineum, 1984. Pp. 37–40. URL: http://sl.fr.pl/wojcicki/Wojcicki-Lectures.pdf

[2] Горбунов И.А. Хорошо определённые логики // Логические исследования. 2011. № 17. С. 95–108.

Библиографическая ссылка

Горбунов И.А. Эффективный критерий дедуктивности множеств формул логики // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 1. С. 95–103.

Сведения об авторах

Горбунов Игорь Анатольевич
доцент кафедры функционального анализа и геометрии математического факультета Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова 33, ТвГУ. E-mail: i_gorbunov@mail.ru.

AN EFFECTIVE CRITERION OF DEDUCTIVITY OF SETS OF LOGICAL FORMULAS

Gorbunov Igor Anatolievich
Associate professor at Functional Analysis and Geometry department,
Tver State University.
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU. E-mail: i_gorbunov@mail.ru.

Received 02.12.2016, revised 25.01.2017.

R. Wojcicki introduced the notion of well-defined logic [1]. A propositional logic is called well-determined if it satisfies conjunction property and deductive theorem. Well- determined logics are interested because their logical consequence may be certainly represented by means of the logic. Note that R. Wojcicki proved a criterion of deductivity for a set of formulas in which he claimed the testing set to contain some certain infinite set of formulas. Therefore, the proposed criterion is not effective (not algorithmic). In this paper some effective criterions for deductivity of sets of formulas in languages with implication and conjunction are proved. Also it is proved that minimal deductive sets in languages of well-determined logics are finitely axiomatizable.

Keywords: well-determined logic, deductive set.

Bibliographic citation

Gorbunov I.A. An effective criterion of deductivity of a sets of logical formulas. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2017, no. 1, pp. 95–103. (in Russian)

References

[1] Wojcicki R. *Lectures on Propositional Calculi.* Ossolineum, Wroclaw, 1984. Pp. 37–40. URL: http://sl.fr.pl/wojcicki/Wojcicki-Lectures.pdf

[2] Gorbunov I.A. Well-determined logics. *Logicheskie Issledovaniya* [Logical Investigations], 2011, vol. 17, pp. 95–108. (in Russian)