МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 517.95, 532.5

ОБ ОБЩИХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ НАВЬЕ–СТОКСА И КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, НЕ УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УРАВНЕНИЯМ ЭЙЛЕРА

Шеретов Ю.В.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 21.03.2017, после переработки 27.04.2017.

Построены три семейства точных решений, общих для стационарной системы Навье–Стокса и соответствующей квазигидродинамической системы. Эти решения не удовлетворяют уравнениям Эйлера. Приведены конкретные примеры решений, описывающих течения вязкой жидкости. Дана их физическая интерпретация.

Ключевые слова: системы Навье–Стокса и Эйлера, квазигидродинамические уравнения, точные решения.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 2. С. 5–15.

Введение

Первые точные решения системы Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости, не удовлетворяющие уравнениям Эйлера, были построены в середине XIX века Джорджем Габриэлем Стоксом. Самые известные из них описывают течения Пуазейля в плоском канале и трубе [1], [2]. В XX и XXI веках это направление интенсивно развивалось. Обзоры полученных результатов представлены в научной литературе.

В [3] была предложена еще одна система уравнений, получившая название квазигидродинамической (КГД). Эта система является диссипативной и имеет глубокие связи с классическими моделями Эйлера и Навье–Стокса. Результаты теоретических исследований КГД системы для слабосжимаемой вязкой жидкости представлены в монографиях [4], [5], а также в статье [6]. В частности, подробно изложены методы нахождения ее точных решений. На основе КГД системы конструировались численные методы расчета течений вязкой жидкости как в двумерном [7], так и в трехмерном случае [8].

В настоящей работе построены три семейства точных решений, общих для стационарных систем Навье–Стокса и КГД, но не удовлетворяющих уравнениям Эйлера. Приведены конкретные примеры решений, описывающих течения вязкой жидкости, и дана их физическая интерпретация.

1. Стационарная система Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости и ее точные решения

Классическая система Навье–Стокса в динамике вязкой несжимаемой жидкости для стационарных течений имеет вид

$$\operatorname{div}\, \vec{u} = 0, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div}\, (\vec{u} \otimes \vec{u}) + \frac{1}{\rho}\nabla p = \nu \Delta \vec{u}. \tag{1.2}$$

Влияние внешних массовых сил не учитывается. В записи системы (1.1) – (1.2), замкнутой относительно неизвестных функций – скорости $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x})$ и давления $p = p(\vec{x})$, использованы стандартные обозначения из тензорного анализа. Например, диада $(\vec{u} \otimes \vec{u})$ представляет собой тензор–инвариант второго ранга, полученный как прямое тензорное произведение двух одинаковых векторов $\vec{u}$ и $\vec{u}$. Вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ задает точку в пространстве $\mathbb{R}^3$. Символы div и ∇ определяют операции дивергенции и градиента, $\Delta\vec{u}$ – лапласиан векторного поля $\vec{u}$. Система содержит две положительные константы – плотность ρ и коэффициент кинематической вязкости ν.

Выпишем уравнения Навье–Стокса (1.1) – (1.2) в декартовых координатах:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial (u_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial (u_y u_x)}{\partial y} + \frac{\partial (u_z u_x)}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \nu\Big(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\Big), \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial (u_x u_y)}{\partial x} + \frac{\partial (u_y^2)}{\partial y} + \frac{\partial (u_z u_y)}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \nu\Big(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\Big), \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial (u_x u_z)}{\partial x} + \frac{\partial (u_y u_z)}{\partial y} + \frac{\partial (u_z^2)}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \nu\Big(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\Big). \tag{1.6}$$

Классическая система Эйлера может быть получена из (1.3) – (1.6) предельным переходом при $\nu \to +0$:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial (u_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial (u_y u_x)}{\partial y} + \frac{\partial (u_z u_x)}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial (u_x u_y)}{\partial x} + \frac{\partial (u_y^2)}{\partial y} + \frac{\partial (u_z u_y)}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial(u_x u_z)}{\partial x} + \frac{\partial(u_y u_z)}{\partial y} + \frac{\partial(u_z^2)}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0. \tag{1.10}$$

Системы (1.3) – (1.6) и (1.7) – (1.10) замкнуты относительно неизвестных функций – составляющих вектора скорости $u_x = u_x(x,y,z)$, $u_y = u_y(x,y,z)$, $u_z = u_z(x,y,z)$ и давления $p = p(x,y,z)$.

Займемся построением точных решений системы Навье–Стокса (1.3) – (1.6), не удовлетворяющих уравнениям Эйлера (1.7) – (1.10). Будем искать такое решение в виде

$$u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad u_z = Ax^2 + By^2 + \varphi(x,y), \tag{1.11}$$

$$p = p(z). \tag{1.12}$$

Здесь A и B – некоторые вещественные константы, подчиняющиеся условию $A+B \neq 0$. Функция $\varphi(x,y)$ является гармонической в некоторой области $V \subset \mathbb{R}^2_{x,y}$. Подстановка (1.11) – (1.12) в (1.3) – (1.5) приводит к истинным равенствам. Из (1.6) находим

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = 2\nu\big(A+B\big). \tag{1.13}$$

Интегрирование (1.13) по переменной z дает

$$p = 2\nu\rho\big(A+B\big)z + p_0, \tag{1.14}$$

где $p_0 = const$. Поскольку $A+B \neq 0$, вязкий член в правой части (1.6) не обращается в ноль. Следовательно, набор функций (1.12), (1.14) не образует решение системы Эйлера (1.7) – (1.10).

Еще один класс точных решений будем искать в виде

$$u_x = A_1 z^2 + B_1 z + C_1, \quad u_y = A_2 z^2 + B_2 z + C_2, \quad u_z = 0, \tag{1.15}$$

$$p = p(x,y). \tag{1.16}$$

Постоянные A_i, B_i и C_i, $i = 1,\ 2$, таковы, что $A_1^2 + A_2^2 > 0$. Уравнения (1.3) и (1.6) удовлетворяются тождественно. Из (1.4) и (1.5) находим

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 2\nu A_1, \tag{1.17}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 2\nu A_2. \tag{1.18}$$

В силу ограничения $A_1^2 + A_2^2 > 0$ правая часть в одном из уравнений (1.4) или (1.5) не обращается в ноль. Из (1.17) и (1.18) находим

$$p = 2\nu\rho\big(A_1 x + A_2 y\big) + p_0, \tag{1.19}$$

где $p_0 = const$. Еще одно точное решение системы Навье–Стокса, не удовлетворяющее уравнениям Эйлера, построено.

Другое решение стационарной системы Навье–Стокса, описывающее вязкое течение в цилиндрических координатах, приведено в [6]. Оно может быть записано в декартовых координатах:

$$u_x = -\Omega y - \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}, \quad u_y = \Omega x + \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$u_z = \frac{A}{4\nu\rho}\big(x^2+y^2\big) + B\ln\sqrt{x^2+y^2} + C, \tag{1.20}$$

$$p = \frac{\rho\Omega^2}{2}\big(x^2+y^2\big) + \frac{\rho\Omega\Gamma}{\pi}\ln\sqrt{x^2+y^2} - \frac{\rho\Gamma^2}{8\pi^2\big(x^2+y^2\big)} + Az + p_0. \tag{1.21}$$

Здесь Ω, Γ, A, B, C и p_0 – постоянные величины. Одна из констант Ω или Γ отлична от нуля. Постоянная A не равна нулю.

2. Точные решения стационарной квазигидродинамической системы

Квазигидродинамическая система, описывающая установившиеся течения слабосжимаемой вязкой жидкости, имеет вид

$$\mathrm{div}\ \vec{u} = \mathrm{div}\ \vec{w}, \tag{2.1}$$

$$\mathrm{div}\ (\vec{u}\otimes\vec{u}) + \frac{1}{\rho}\nabla p = 2\nu\ \mathrm{div}\ \widehat{\sigma} + \mathrm{div}\ \big[(\vec{w}\otimes\vec{u}) + (\vec{u}\otimes\vec{w})\big]. \tag{2.2}$$

Обозначения стандартные. Влияние внешних сил не учитывается. Тензор скоростей деформаций определяется с помощью выражения

$$\widehat{\sigma} = \widehat{\sigma}(\vec{u}) = \frac{1}{2}\big[(\nabla\otimes\vec{u}) + (\nabla\otimes\vec{u})^T\big]. \tag{2.3}$$

Вектор $\vec{w}$ вычисляется по формуле

$$\vec{w} = \tau\Big((\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p\Big), \tag{2.4}$$

где

$$\tau = \frac{\nu}{c_s^2}$$

– характерное время релаксации, c_s – скорость звука в жидкости. Эквивалентная запись (2.1) – (2.2) такова:

$$\mathrm{div}\ \vec{u} = \mathrm{div}\ \vec{w}, \tag{2.5}$$

$$\mathrm{div}\ (\vec{u}\otimes\vec{u}) + \frac{1}{\rho}\nabla p - \nu\Delta\vec{u} =$$

$$= \nu\nabla\big(\mathrm{div}\ \vec{u}\big) + \vec{u}\ \mathrm{div}\ \vec{w} + \vec{w}\ \mathrm{div}\ \vec{u} + (\vec{w}\cdot\nabla)\vec{u} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{w}. \tag{2.6}$$

В декартовых координатах система (2.1) – (2.2) имеет вид

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial(u_x^2)}{\partial x}+\frac{\partial(u_y u_x)}{\partial y}+\frac{\partial(u_z u_x)}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=$$
$$=\nu\Big(2\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z\partial x}\Big)+$$
$$+2\frac{\partial(w_x u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(w_y u_x)}{\partial y}+\frac{\partial(w_z u_x)}{\partial z}+\frac{\partial(u_y w_x)}{\partial y}+\frac{\partial(u_z w_x)}{\partial z}, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial(u_x u_y)}{\partial x}+\frac{\partial(u_y^2)}{\partial y}+\frac{\partial(u_z u_y)}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=$$
$$=\nu\Big(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z\partial y}\Big)+$$
$$+\frac{\partial(w_x u_y)}{\partial x}+2\frac{\partial(w_y u_y)}{\partial y}+\frac{\partial(w_z u_y)}{\partial z}+\frac{\partial(u_x w_y)}{\partial x}+\frac{\partial(u_z w_y)}{\partial z}, \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial(u_x u_z)}{\partial x}+\frac{\partial(u_y u_z)}{\partial y}+\frac{\partial(u_z^2)}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=$$
$$=\nu\Big(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y\partial z}\Big)+$$
$$+\frac{\partial(w_x u_z)}{\partial x}+\frac{\partial(w_y u_z)}{\partial y}+2\frac{\partial(w_z u_z)}{\partial z}+\frac{\partial(u_x w_z)}{\partial x}+\frac{\partial(u_y w_z)}{\partial y}. \tag{2.10}$$

Здесь
$$w_x=\tau\Big(u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\Big),$$
$$w_y=\tau\Big(u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\Big),$$
$$w_z=\tau\Big(u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\Big).$$

Покажем, что построенные в предыдущем пункте наборы функций (u_x, u_y, u_z, p) также удовлетворяют системе (2.7) – (2.10).

В первом случае div $\vec{u}=0$. Вектор $\vec{w}$ является постоянным:

$$\vec{w}=\begin{pmatrix} w_x\\ w_y\\ w_z\end{pmatrix}=\tau\begin{pmatrix} u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\ u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\ u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 2\nu\tau\big(A+B\big)\end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$(\vec{w}\cdot\nabla)\vec{u} = 2\nu\tau\big(A+B\big)\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Ax^2+By^2+\varphi(x,y)\end{pmatrix} = 0,$$

правые части (2.5) – (2.6) обращаются в ноль.

Во втором случае div $\vec{u}=0$. Вектор $\vec{w}$ также является постоянным:

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \\ u_x\frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\nu\tau A_1 \\ 2\nu\tau A_2 \\ 0\end{pmatrix}.$$

Кроме того,

$$(\vec{w}\cdot\nabla)\vec{u} = 2\nu\tau\Big(A_1\frac{\partial}{\partial x} + A_2\frac{\partial}{\partial y}\Big)\begin{pmatrix} A_1z^2+B_1z+C_1 \\ A_2z^2+B_2z+C_2 \\ 0\end{pmatrix} = 0.$$

Поэтому правые части (2.5) – (2.6) равны нулю.

В третьем случае div $\vec{u}=0$. Постоянный вектор $\vec{w}$ вычисляется по формуле

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \\ u_x\frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\tau A}{\rho}\end{pmatrix}.$$

Имеем

$$(\vec{w}\cdot\nabla)\vec{u} = \frac{\tau A}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} -\Omega y - \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} \\ \Omega x + \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{A}{4\nu\rho}\big(x^2+y^2\big) + B\ln\sqrt{x^2+y^2} + C\end{pmatrix} = 0.$$

Правые части (2.5) – (2.6) обращаются в ноль.

3. Примеры течений

Приведем примеры течений, отвечающих построенным решениям систем Навье–Стокса и КГД.

Пример 1. Рассмотрим движение жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами радиусов R_1 и R_2, где $0 < R_1 < R_2$. Ось oz правой декартовой системы координат направим по оси цилиндров. Внутренний цилиндр неподвижен, внешний движется вдоль оси oz с постоянной скоростью U. Значения давления в плоскостях $z = z_1 = 0$ и $z = z_2 = L > 0$ постоянно и равно соответственно p_1 и p_2. Числа p_1 и p_2 положительны, разность $\Delta p = p_1 - p_2 > 0$. В промежутке между точками z_1 и z_2 давление $p = p(z)$ меняется по линейному закону

$$p = p_1 - \frac{\Delta p}{L} z. \tag{3.1}$$

В (1.11) положим $A = B$, $\varphi(x, y) = c_1 \ln \sqrt{x^2 + y^2} + c_2$, где c_1 и c_2 – постоянные величины. Заметим, что функция $\varphi(x, y)$ является гармонической при $(x, y) \neq (0, 0)$. Из (1.14) и (3.1) находим

$$A = -\frac{\Delta p}{4\nu\rho L}.$$

Константы c_1 и c_2 определим из граничных условий

$$u_z\Big|_{x^2+y^2=R_1^2} = 0, \quad u_z\Big|_{x^2+y^2=R_2^2} = U.$$

Распределение скорости принимает вид

$$u_x = 0, \quad u_y = 0,$$

$$u_z = \frac{\Delta p}{4\nu\rho L}\Big(R_1^2 - x^2 - y^2\Big) + \frac{U + \frac{\Delta p}{4\nu\rho L}\Big(R_2^2 - R_1^2\Big)}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \ln\Big(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R_1}\Big). \tag{3.2}$$

В области $V_1 = \{(x, y, z) : R_1 < \sqrt{x^2 + y^2} < R_2,\ 0 < z < L\}$ формулы (3.2), (3.1) описывают течение Куэтта–Пуазейля между коаксиальными соосными цилиндрами.

Пример 2. Пусть жидкость движется между двумя параллельными пластинами, расстояние между которыми равно $H > 0$. Плоскость xoy правой декартовой системы координат свяжем с неподвижной нижней пластиной. Ось oz направим вертикально вверх. Вторая пластина с координатой $z = H$ движется с постоянной скоростью V в направлении оси oy. Значения давления в плоскостях $x = x_1 = 0$ и $x = x_2 = L > 0$ постоянны и равны p_1 и p_2 соответственно, где p_1 и p_2 – положительные числа. На промежутке $[x_1,\ x_2]$ величина p меняется по линейному закону:

$$p = p_1 - \frac{\Delta p}{L} x, \tag{3.3}$$

причем $\Delta p = p_1 - p_2 > 0$. Из (1.17) и (1.18) находим

$$A_1 = -\frac{\Delta p}{2\nu\rho L}, \quad A_2 = 0.$$

Распределение скорости (1.15) в области

$$V_2 = \{(x, y, z) : 0 < x < L,\ -\infty < y < +\infty,\ 0 < z < H\},$$

отвечающее такой физической постановке, выглядит следующим образом:

$$u_x = \frac{\Delta p}{2\nu\rho L} z(H-z), \quad u_y = \frac{V}{H} z, \quad u_z = 0. \tag{3.4}$$

Движение жидкости, описываемое формулами (3.4) и (3.3), представляет собой композицию течений Пуазейля вдоль оси ox и Куэтта вдоль оси oy.

Пример 3. Рассмотрим цилиндрическую трубу радиуса $R > 0$, вращающуюся вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью Ω. Направим ось oz правой декартовой системы координат по оси трубы. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функции

$$u_x = -\Omega y, \quad u_y = \Omega x, \quad u_z = \frac{\Delta p}{4\nu\rho L}\Big(R^2 - x^2 - y^2\Big), \tag{3.5}$$

$$p = \frac{\rho\Omega^2}{2}\big(x^2+y^2\big) + p_1 - \frac{\Delta p}{L} z, \tag{3.6}$$

где $p_1 > 0$, $p_2 > 0$ и $\Delta p = p_1 - p_2 > 0$, в области

$$V_3 = \{(x,y,z) : 0 \leqslant \sqrt{x^2+y^2} < R,\ 0 < z < L\}$$

удовлетворяют системе Навье–Стокса (1.3) – (1.6) и квазигидродинамической системе (2.7) – (2.10). Они отвечают течению Пуазейля во вращающейся трубе. Однако набор функций (3.5), (3.6) из класса (1.20), (1.21) не является точным решением уравнений Эйлера (1.7) – (1.10).

Заключение

Особый интерес представляют точные решения стационарных квазигидродинамических уравнений, не удовлетворяющие системам Эйлера и Навье–Стокса. Такие решения существуют (см. [4], с. 106 – 107). Они зависят от положительного параметра τ и их построение в большинстве задач сопряжено со значительными трудностями. В каких случаях решение системы Навье–Стокса может быть получено из соответствующего решения системы КГД предельным переходом при $\tau \to +0$? Ответа на этот сложный вопрос пока нет.

Список литературы

[1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

[2] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.

[3] Шеретов Ю.В. О единственности решений одной диссипативной системы гидродинамического типа // Математическое моделирование. 1994. Т. 6, № 10. С. 35–45.

[4] Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 400 с.

[5] Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской гос. ун–т, 2016. 222 с.

[6] Шеретов Ю.В. О точных решениях стационарных квазигидродинамических уравнений в цилиндрических координатах // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 1. С. 85–94.

[7] Жериков А.В. Применение квазигидродинамических уравнений: математическое моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2010. 124 с.

[8] Елизарова Т.Г., Милюкова О.Ю. Численное моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости в кубической каверне // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003. Т. 43, № 3. С. 453–466.

Библиографическая ссылка

Шеретов Ю.В. Об общих точных решениях стационарной системы Навье–Стокса и квазигидродинамической системы, не удовлетворяющих уравнениям Эйлера // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 2. С. 5–15.

Сведения об авторах

1. **Шеретов Юрий Владимирович**
заведующий кафедрой математического анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru.

ON THE COMMON EXACT SOLUTIONS OF STATIONARY NAVIER–STOKES AND QUASI–HYDRODYNAMIC SYSTEMS, NOT SATISFYING TO EULER EQUATIONS

Sheretov Yurii Vladimirovich
Head of Mathematical Analysis department, Tver State University.
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU. E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

Received 21.03.2017, revised 27.04.2017.

Three families of exact solutions, which are common for the stationary Navier-Stokes system and corresponding quasi-hydrodynamic system, are constructed. These solutions do not satisfy to Euler equations. The concrete examples of solutions that describe the flows of a viscous fluid are presented. Their physical interpretation is given.

Keywords: Navier-Stokes and Euler systems, quasi–hydrodynamic equations, exact solutions.

Bibliographic citation

Sheretov Yu.V. On the common exact solutions of stationary Navier-Stokes and quasi–hydrodynamic systems, not satisfying to Euler equations. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2017, no. 2, pp. 5–15. (in Russian)

References

[1] Landau L.D., Lifshits E.M. *Gidrodinamika* [Hydrodynamics]. "Nauka" Publ., Moscow, 1986. 736 p. (in Russian)

[2] Loytsyansky L.G. *Mekhanika Zhidkosti i Gaza* [Fluid and Gas Mechanics]. "Nauka" Publ., Moscow, 1987. 840 p. (in Russian)

[3] Sheretov Yu.V. On uniqueness of the solutions for one dissipative system of hydrodynamic type. *Matematicheskoe Modelirovanie* [Mathematical Modeling], 1994, vol. 6(10), pp. 35–45. (in Russian)

[4] Sheretov Yu.V. *Dinamika Sploshnykh Sred pri Prostranstvenno–Vremennom Osrednenii* [Continuum Dynamics under Spatiotemporal Averaging]. "Regular and Chaotic Dynamics" Publ., Moscow, Izhevsk, 2009. 400 p. (in Russian)

[5] Sheretov Yu.V. *Regulyarizovannye Uravneniya Gidrodinamiki* [Regularized Hydrodynamic Equations]. Tver State University, Tver, 2016. 222 p. (in Russian)

[6] Sheretov Yu.V. On the exact solutions of stationary quasi–hydrodynamic equations in cylindrical coordinates. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2017, no. 1, pp. 85–94. (in Russian)

[7] Zherikov A.V. *Primenenie Kvazigidrodinamicheskikh Uravnenii: Matematicheskoe Modelirovanie Techeniy Vyazkoi Neszhimaemoi Zhidkosti* [Application of Quasi–Hydrodynamic Equations: Mathematical Modeling of Viscous Incompressible Fluid]. Lambert Academic Publishing, Saarbrücken, 2010. 124 p. (in Russian)

[8] Elizarova T.G., Milyukova O.Yu. Numerical simulation of viscous incompressible flow in a cubic cavity. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2003, vol. 43(3), pp. 433–445.