УДК 517.95

ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫМИ КРАЕВЫМИ И С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Мегралиев Я.Т., Ализаде Ф.Х.
Бакинский государственный университет, г. Баку, Азербайджан

Поступила в редакцию 01.11.2016, после переработки 06.06.2017.

Работа посвящена исследованию разрешимости обратной краевой задачи с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени, для одного уравнения Буссинеска четвертого порядка с несамосопряженными краевыми и с дополнительными интегральными условиями. Суть задачи состоит в том, что требуется вместе с решением определить неизвестный коэффициент. Задача рассматривается в прямоугольной области. При решении исходной обратной краевой задачи осуществляется переход от исходной обратной задачи к некоторой вспомогательной обратной задаче. Доказывается разрешимость вспомогательной обратной задачи. Затем вновь производится переход к исходной обратной задаче. В результате делается вывод о разрешимости исходной обратной задачи.

Ключевые слова: обратная краевая задача, уравнения Буссинеска, метод Фурье, классическое решение.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 2. С. 17–36.

Введение

Теория обратных задач для дифференциальных уравнений является динамично развивающимся разделом современной науки. В последнее время обратные задачи возникают в самых различных областях человеческой деятельности, таких, как сейсмология, разведка полезных ископаемых, биология, медицина, контроль качества промышленных изделий и т. д., что ставит их в ряд актуальных проблем современной математики. Различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались во многих работах. Отметим здесь прежде всего работы А. Н. Тихонова [1], М. М. Лаврентьева [2, 3], В. К. Иванова [4] и их учеников. Более подробно об этом можно прочитать в монографии А. М. Денисова [5].

Современные проблемы естествознания приводят к необходимости постановки и исследования качественно новых задач, ярким примером которых является класс нелокальных задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Исследование таких задач вызвано как теоретическим интересом, так и практической необходимостью. Среди нелокальных задач можно выделить класс задач с интегральными условиями. Условия такого вида появляются при математическом моделировании явлений, связанных с физикой плазмы [6], распространением тепла [7], [8], процессом влагопереноса в капиллярнопростых средах [9], вопросами демографии и математической биологии.

Целью данной работы является доказательство существования и единственности решений обратной краевой задачи для одного уравнения Буссинеска четвертого порядка с несамосопряженными краевыми и с дополнительными интегральными условиями.

1. Постановка задачи и ее сведение к эквивалентной задаче

В прямоугольнике $D_T = \{(x,t) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq t \leq T\}$ рассмотрим следующую обратную краевую задачу: найти пару $\{u(x,t), a(t)\}$ функций $u(x,t)$ и $a(t)$, удовлетворяющих уравнению [10]

$$u_{tt}(x,t) - 2\alpha u_{txx}(x,t) + \beta u_{xxxx}(x,t) = a(t)u(x,t) + f(x,t), \tag{1}$$

начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)\ \ (0 \leq x \leq 1), \tag{2}$$

несамосопряженным граничным условиям

$$u(0,t) = u(1,t),\ u_x(0,t) = 0,\ u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t),\ u_{xxx}(0,t) = 0\ \ (0 \leq t \leq T) \tag{3}$$

и интегральному условию переопределения

$$\int_0^1 u(x,t)dx = h(t)\ \ (0 \leq t \leq T), \tag{4}$$

где $\alpha > 0,\ \ \beta > \alpha^2\ \ (0 \leq t \leq T)$ – заданные числа, $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $h(t)$ – заданные функции.

Обозначим

$$\begin{aligned}\tilde{C}^{(4,2)}\left(D_T\right) = \{u(x,t) :\ & u(x,t), u_x(x,t), u_{xx}(x,t), u_{xxx}(x,t),\\ & u_{xxxx}(x,t), u_{tx}(x,t), u_{txx}(x,t),\ u_{tt}(x,t) \in C(D_T)\}\,.\end{aligned}$$

Определение 1. *Пару $\{u(x,t), a(t)\}$ функций $u(x,t)$ и $a(t)$ будем называть классическим решением обратной краевой задачи* (1)-(4), *если $u\left(x,t\right) \in \tilde{C}^{(4,2)}\left(D_T\right)$, $a\left(t\right) \in C[0,T]$ и $\{u(x,t), a(t)\}$ удовлетворяет* (1)-(4) *в обычном смысле.*

Справедлива следующая

Лемма 1. *Пусть $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C[0,1]$,$f(x,t) \in C(D_T)$, $h(t) \in C^2[0,T]$,$h(t) \neq 0$ при $t \in [0,T]$ и выполняются условия согласования*

$$\int\limits_0^1 \varphi\left(x\right)dx = h\left(0\right),\ \ \int\limits_0^1 \psi\left(x\right)dx = h'\left(0\right). \tag{5}$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (1)-(4) *эквивалентна задаче определения функций* $u\,(x,t) \in \tilde{C}^{(4,2)}\,(D_T)\,,\ a\,(t) \in C[0,T]$, *из соотношений* (1)-(3) *и*

$$h''(t) - 2\alpha u_{tx}(1,t) + \beta u_{xxx}(1,t) = a(t)h(t) + \int_0^1 f(x,t)dx \ \ (0 \le t \le T). \tag{6}$$

Доказательство. Предположим, что $\{u(x,t), a(t)\}$ является классическим решением задачи (1)-(4). Из (4) ясно, что

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 u(x,t)dx = h'(t), \ \ \frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 u(1,t)dx = h''(t) \ \ (0 \le t \le T). \tag{7}$$

Проинтегрируем уравнение (1) по x от 0 до 1 и, учитывая условия (3), имеем:

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 u(x,t)dx - 2\alpha u_{tx}(1,t) + \beta u_{xxx}(1,t) =$$

$$= a(t)\int_0^1 u(x,t)dx + \int_0^1 f(x,t)dx \ \ (0 \le t \le T). \tag{8}$$

Отсюда, с учетом (4) и (7), приходим к выполнению (4).

Пусть теперь $\{u(x,t), a(t)\}$ является решением задачи (1)-(3), (6). Тогда из (6) и (8), получаем:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\int_0^1 u(x,t)dx - h(t)\right) = a(t)\left(\int_0^1 u(x,t)dx - h(t)\right) \ \ (0 \le t \le T). \tag{9}$$

Так как $\int_0^1 \varphi\,(x)\,dx = h\,(0)\,,\ \int_0^1 \psi\,(x)\,dx = h'\,(0)$, то имеем:

$$\begin{cases} \int_0^1 u(x,0)dx - h(0) = \int_0^1 \varphi(x)dx - h(0) = 0, \\ \int_0^1 u_t(x,0)dx - h'(0) = \int_0^1 \psi(x)dx - h'(0) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Из (9) и (10) заключаем, что выполняется условие (4). Лемма доказана. $\square$

2. Вспомогательные факты

Известно [11], что последовательности функций

$$X_0\,(x) = 1, X_{2k-1}\,(x) = \cos(\lambda_k x), X_{2k}\,(x) = x\sin(\lambda_k x) \qquad (k = 1, 2, ...), \tag{11}$$

$$Y_0\,(x) = 2(1-x), Y_{2k-1}\,(x) = 4(1-x)\cos(\lambda_k x), Y_{2k}\,(x) = 4\sin(\lambda_k x)\,(k = 1, 2, ...) \tag{12}$$

образуют в $L_2(0,1)$ биортогональную систему и система (11) образует базис в $L_2(0,1)$, где $\lambda_k = 2\pi k(k = 1,2,...)$. Тогда произвольная функция $g(x) \in L_2(0,1)$ разлагается в биортогональный ряд

$$g(x) = g_0 X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} g_{2k-1} X_{2k-1}(x) + \sum_{k=0}^{\infty} g_{2k} X_{2k}(x),$$

где коэффициенты g_0, g_{2k-1}, g_{2k} вычисляются по формулам

$$g_0 = \int_0^1 g(x) Y_0(x)\,dx, g_{2k-1} = \int_0^1 g(x) Y_{2k-1}(x)\,dx, g_{2k} = \int_0^1 g(x) Y_{2k}(x)\,dx.$$

Из (11) имеем:

$$X_0''(x) = 0, X_{2k-1}''(x) = -\lambda_k^2 X_{2k-1}(x), X_{2k}''(x) = -\lambda_k^2 X_{2k}(x) + 2\lambda_k X_{2k-1}(x),$$

$$X_{2k-1}^{(4)}(x) = \lambda_k^4 X_{2k-1}(x), X_{2k-1}^{(4)}(x) = \lambda_k^4 X_{2k}(x) - 4\lambda_k^3 X_{2k-1}(x)\,(k = 1,2,...). \quad (13)$$

При предположениях

$$\begin{gathered} g(x) \in C^{(2i-1)}[0,1], g^{(2i)}(x) \in L_2(0,1), \\ g^{(2s)}(0) = g^{(2s)}(1), g^{(2s+1)}(0) = 0\left(s = \overline{0, i-1}; i \geq 1\right) \end{gathered}$$

устанавливается справедливость оценок [12]:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{2i} g_{2k}\right)^2 \leq 8 \left\| g^{(2i)}(x) \right\|_{L_2(0,1)}^2, \quad (14)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^{2i} g_{2k-1}\right)^2 \leq 8 \left\| g^{(2i)}(x)(1-x) - 2ig^{(2i-1)}(x) \right\|_{L_2(0,1)}^2. \quad (15)$$

А при предположениях

$$g(x) \in C[0,1], g'(x) \in L_2(0,1), g(0) = g(1)$$

устанавливается следующее:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k g_{2k-1}\right)^2 \leq 8 \left\| g'(x) \right\|_{L_2(0,1)}^2, \quad (16)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k g_{2k-1}\right)^2 \leq \left\| g'(x)(1-x) - g(x) \right\|_{L_2(0,1)}^2. \quad (17)$$

Далее, при предположениях

$$\begin{gathered} g(x) \in C^{(2i)}[0,1], g^{(2i+1)}(x) \in L_2(0,1), \\ g^{(2s)}(0) = g^{(2s)}(1), g^{(2s-1)}(0) = 0(i \geq 1; s = \overline{0, i}) \end{gathered}$$

доказывается оценка:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^{2i+1}g_{2k})^2 \leq 8\left\|g^{(2i+1)}(x)\right\|^2_{L_2(0,1)}, \tag{18}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^{2i+1}g_{2k-1})^2 \leq 8\left\|g^{(2i+1)}(x)\,x+(2i+1)g^{(2i)}(x)\right\|^2_{L_2(0,1)}. \tag{19}$$

С целью исследования задачи (1)-(3), (6) рассмотрим следующее пространство. Обозначим через $B^5_{2,T}$ [12] совокупность всех функций $u(x,t)$ вида

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(t)\,X_k(x),$$

рассматриваемых на D_T, для которых все функции $u_k(t)\in C[0,T]$ и

$$J_T(u)\equiv\|u_0(t)\|_{C\{0,T]}+$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^5\|u_{2k-1}(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^5\|u_{2k}(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

где функции $X_k(x)\,(k=0,1,2,...)$ определены соотношениями (11). Норму в этом множестве определим так: $\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}}=J_(u)$. Через E^5_T обозначим пространство вектор-функций $\{u(x,t),a(t)\}$ таких, что $u(x,t)\in B^5_{2,T}$, $a(t)\in C[0,T]$. Снабдим это пространство нормой

$$\|z\|_{E^5_T}=\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}}+\|a(t)\|_{C[0,T]}.$$

3. Разрешимость обратной краевой задачи

Так как система (11) образует базис $L_2(0,1)$ и системы (11) и (12) образуют биортогональную в $L_2(0,1)$ систему функций, то первую компоненту $u(x,t)$ решения $\{u(x,t),a(t)\}$ задачи (1)-(3), (6) будем искать в виде

$$u(x,t)=u_0(t)\,X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}u_{2k-1}(t)\,X_{2k-1}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}u_{2k}(t)\,X_{2k}(x), \tag{20}$$

где

$$u_0(t)=\int_0^1 u(x,t)Y_0(x)dx,\;\; u_{2k-1}(t)=\int_0^1 u(x,t)Y_{2k-1}(x)dx,$$

$$u_{2k}(t)=\int_0^1 u(x,t)Y_{2k}(x)dx, \tag{21}$$

причем $X_k(x)$ $(k=0,1,2,...)$ и $Y_k(x)$ $(k=0,1,2,...)$ определены соотношениями (11) и (12) соответственно.

Применим метод разделения переменных для определения искомых функций $u_k(t)$, $k = 0, 1, 2, ...$ С учетом (13), из (1) имеем:

$$u_0''(t) = F_0(t; u, a) \quad (0 \le t \le T), \tag{22}$$

$$u_{2k}''(t) + 2\alpha\lambda_k^2 u_k'(t) + \beta\lambda_k^4 u_{2k}(t) = F_{2k}(t; u, a) \quad (0 \le t \le T, k = 1, 2, ...), \tag{23}$$

$$u_{2k-1}''(t) + 2\alpha\lambda_k^2 u_{2k-1}'(t) + \beta\lambda_k^4 u_{2k-1}(t) =$$
$$= F_{2k-1}(t; u, a) + 4\lambda_k \left(\alpha u_{2k}'(t) + \beta\lambda_k^2 u_{2k}(t)\right) \quad (0 \le t \le T, k = 1, 2, ...), \tag{24}$$

где

$$F_k(t; u, a) = a(t) u_k(t) + f_k(t), \quad f_k(t) = \int_0^1 f(x, t) Y_k(x) dx \ (k = 0, 1, 2, ...).$$

А в силу (2) получаем:

$$u_k(0) = \varphi_k, \ u_k'(0) = \psi_k \ (k = 0, 1, 2, ...), \tag{25}$$

где

$$\varphi_k = \int_0^1 \varphi(x) Y_k(x) dx, \ \psi_k = \int_0^1 \psi(x) Y_k(x) dx \ (k = 0, 1, 2, ...).$$

Решая задачу (22)-(25), находим:

$$u_0(t) = \varphi_0 + \psi_0 t + \int_0^t (t - \tau) F_0(\tau; u, a) d\tau, \tag{26}$$

$$u_{2k}(t) = e^{\alpha_k t}\left[\left(\cos\beta_k t - \frac{\alpha_k}{\beta_k}\sin\beta_k t\right)\varphi_{2k} + \frac{\psi_{2k}}{\beta_k}\sin\beta_k t\right] +$$
$$+\frac{1}{\beta_k}\int_0^t F_{2k}(\tau; u, a)\sin\beta_k(t - \tau)e^{\alpha_k(t-\tau)}d\tau, \tag{27}$$

$$u_{2k-1}(t) = e^{\alpha_k t}\left[\left(\cos\beta_k t - \frac{\alpha_k}{\beta_k}\sin\beta_k t\right)\varphi_{2k-1} + \frac{\psi_{2k-1}}{\beta_k}\sin\beta_k t\right] +$$

$$+\frac{1}{\beta_k}\int_0^t \left(F_{2k-1}(\tau; u, a) + 4\alpha\lambda_k u_{2k}'(t) + 4\beta\lambda_k^3 u_{2k}(t)\right)\sin\beta_k(t - \tau)e^{\alpha_k(t-\tau)}d\tau, \tag{28}$$

где

$$\alpha_k = -\alpha\lambda_k^2, \beta_k = \lambda_k^2\sqrt{\beta - \alpha^2}.$$

Дифференцируя (27), находим:

$$u_{2k}'(t) = -\frac{\beta\lambda_k^4}{\beta_k}\varphi_{2k}e^{\alpha_k t}\sin\beta_k t + \left(\frac{\alpha_k}{\beta_k}\sin\beta_k t + \cos\beta_k t\right)e^{\alpha_k t}\psi_{2k} +$$

$$+\frac{1}{\beta_k}\int\limits_0^t F_{2k}(\tau;u,a)\left(\alpha_k\sin\beta_k\left(t-\tau\right)+\beta_k\cos\beta_k\left(t-\tau\right)\right)e^{\alpha_k(t-\tau)}d\tau. \qquad (29)$$

Далее, из (27) и (29) получаем:

$$\alpha u'_{2k}\left(t\right)+\beta\lambda_k^2 u_{2k}\left(t\right)=\beta\lambda_k^2\varphi_{2k}e^{\alpha_k t}\cos\beta_k t+$$
$$+\left(\sqrt{\beta-\alpha^2}\sin\beta_k t+\alpha\cos\beta_k t\right)\psi_{2k}e^{\alpha_k t}+$$
$$+\frac{1}{\beta_k}\int\limits_0^t F_{2k}(\tau;u,a)\left(\left(\beta-\alpha^2\right)\lambda_k^2\sin\beta_k\left(t-\tau\right)+\alpha\beta_k\cos\beta_k\left(t-\tau\right)\right)e^{\alpha_k(t-\tau)}d\tau.$$

Отсюда имеем:

$$\int\limits_0^t\left(\alpha u'_{2k}\left(\tau\right)+\beta\lambda_k^2 u_{2k}\left(\tau\right)\right)\sin\beta_k\left(t-\tau\right)e^{\alpha_k(t-\tau)}d\tau=$$
$$=\frac{t\beta\lambda_k^2}{2}\varphi_{2k}e^{\alpha_k t}\sin\beta_k t+\psi_{2k}e^{\alpha_k t}\left[\frac{\sqrt{\beta-\alpha^2}}{2}\left(\frac{1}{\beta_k}\sin\beta_k t-t\cos\beta_k t\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha t}{2}\sin\beta_k t\right]+\frac{1}{\beta_k}\int\limits_0^t\left[\int\limits_0^\tau F_{2k}(\xi;u,a)\left(\left(\beta-\alpha^2\right)\lambda_k^2\sin\beta_k\left(\tau-\xi\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\alpha\beta_k\cos\beta_k\left(\tau-\xi\right)e^{\alpha_k(\tau-\xi)}d\xi\right)\sin\beta_k\left(t-\tau\right)e^{\alpha_k(t-\tau)}\right]d\tau. \qquad (30)$$

Подставляя выражения (30) в (28), находим:

$$u_{2k-1}(t)=e^{\alpha_k t}\left[\left(\cos\beta_k t-\frac{\alpha_k}{\beta_k}\sin\beta_k t\right)\varphi_{2k-1}+\frac{\psi_{2k-1}}{\beta_k}\sin\beta_k t\right]+$$
$$+\frac{1}{\beta_k}\int\limits_0^t F_{2k-1}(\tau;u,a)\sin\beta_k\left(t-\tau\right)e^{\alpha_k(t-\tau)}d\tau+$$
$$-\frac{2t\beta\lambda_k^3}{\beta_k}\varphi_{2k}e^{\alpha_k t}\sin\beta_k t+\frac{2\lambda_k}{\beta_k}\psi_{2k}e^{\alpha_k t}\sqrt{\beta-\alpha^2}\left[\left(\frac{1}{\beta_k}+\alpha t\right)\sin\beta_k t-\right.$$
$$\left.-t\cos\beta_k t\right]+-\frac{4\lambda_k}{\beta_k^2}\int\limits_0^t\left[\int\limits_0^\tau F_{2k}\left(\xi;u,a\right)\left((\beta-\alpha^2)\lambda_k^2\sin\beta_k\left(\tau-\xi\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\alpha\beta_k\cos\beta_k\left(\tau-\xi\right)\right)e^{\alpha_k(\tau-\xi)}d\xi\right]e^{\alpha_k(t-\tau)}\sin\beta_k\left(t-\tau\right)d\tau. \qquad (31)$$

После подстановки выражения $u_k(t)$ $(k=0,1,2,\ldots)$ в (18) для определения компоненты $u(x,t)$ решения $\{u(x,t),a(t)\}$ задачи (1)-(3), (6) получаем:

$$u\left(x,t\right)=\left(\varphi_0+\psi_0 t+\int\limits_0^t\left(t-\tau\right)F_0\left(\tau;u,a\right)d\tau\right)X_0(x)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{e^{\alpha_k t}\left[\left(\cos\beta_k t-\frac{\alpha_k}{\beta_k}\sin\beta_k t\right)\varphi_{2k}+\frac{\psi_{2k}}{\beta_k}\sin\beta_k t\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\beta_k}\int\limits_0^t F_{2k}(\tau;u,a)\sin\beta_k\left(t-\tau\right)e^{\alpha_k(t-\tau)}d\tau\right\}X_{2k}(x)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{e^{\alpha_k t}\left[\left(\cos\beta_k t-\frac{\alpha_k}{\beta_k}\sin\beta_k t\right)\varphi_{2k-1}+\frac{\psi_{2k-1}}{\beta_k}\sin\beta_k t\right]+\right.$$

$$+\frac{1}{\beta_k}\int\limits_0^t F_{2k-1}(\tau;u,a)\sin\beta_k\left(t-\tau\right)e^{\alpha_k(t-\tau)}d\tau+$$

$$-\frac{2t\beta\lambda_k^3}{\beta_k}\varphi_{2k}e^{\alpha_k t}\sin\beta_k t+\frac{2\lambda_k}{\beta_k}\psi_{2k}e^{\alpha_k t}\sqrt{\beta-\alpha^2}\left[\left(\frac{1}{\beta_k}+\alpha t\right)\sin\beta_k t-\right.$$

$$\left.-t\cos\beta_k t\right]+-\frac{4\lambda_k}{\beta_k^2}\int\limits_0^t\left[\int\limits_0^\tau F_{2k}\left(\xi;u,a\right)\left((\beta-\alpha^2)\lambda_k^2\sin\beta_k\left(\tau-\xi\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\ \alpha\beta_k\cos\beta_k\left(\tau-\xi\right)\right)e^{\alpha_k(\tau-\xi)}d\xi\right]e^{\alpha_k(t-\tau)}\sin\beta_k\left(t-\tau\right)d\tau\right\}X_{2k-1}(x). \tag{32}$$

Теперь, с целью нахождения уравнения для компоненты $a(t)$ решения $\{u(x,t),a(t)\}$, из (6) с учетом (20), имеем:

$$a(t)=h^{-1}\left(t\right)\left\{h''\left(t\right)-\int\limits_0^1 f\left(x,t\right)dx-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\left(2\alpha u'_{2k}\left(t\right)+\beta\lambda_k^2 u_{2k}\left(t\right)\right)\right\}. \tag{33}$$

Из (27) и (29), находим:

$$2\alpha u'_{2k}\left(t\right)+\beta\lambda_k^2 u_{2k}\left(t\right)=\left(-\frac{\alpha\beta\lambda_k^4}{\beta_k}\sin\beta_k t+\right.$$

$$\left.+\beta\lambda_k^2\cos\beta_k t\right)\varphi_{2k}e^{\alpha_k t}+\psi_{2k}\left(\frac{\left(\beta-2\alpha^2\right)\lambda_k^2}{\beta_k}\sin\beta_k t+2\alpha\cos\beta_k t\right)e^{\alpha_k t}+$$

$$\begin{aligned}&+\tfrac{1}{\beta_k}\int\limits_0^t F_{2k}\left(\tau;u,a\right)\left(\left(2\alpha\alpha_k+\beta\lambda_k^2\right)\sin\beta_k\left(t-\tau\right)+\right.\\&\left.+\ 2\alpha\beta_k\cos\beta_k\left(t-\tau\right)\right)e^{\alpha_k(t-\tau)}d\tau.\end{aligned} \tag{34}$$

Для того, чтобы получить уравнение для второй компоненты $a(t)$ решения $\{u(x,t),a(t)\}$ задачи (1)-(3), (6) подставим выражение (34) в (33):

$$a(t)=h^{-1}(t)\left\{h''(t)-\int\limits_0^1 f(x,t)\,dx-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\left[\left(-\frac{\alpha\beta\lambda_k^4}{\beta_k}\sin\beta_k t+\right.\right.\right.$$

$$\left.+\beta\lambda_k^2\cos\beta_k t\right)\varphi_{2k}e^{\alpha_k t}+\psi_{2k}\left(\frac{(\beta-2\alpha^2)\,\lambda_k^2}{\beta_k}\sin\beta_k t+2\alpha\cos\beta_k t\right)e^{\alpha_k t}+$$

$$\begin{array}{l}+\frac{1}{\beta_k}\int\limits_0^t F_{2k}(\tau;u,a)\left(\left(2\alpha\alpha_k+\beta\lambda_k^2\right)\sin\beta_k(t-\tau)+\right.\\ \left.\left.\left.+\ 2\alpha\beta_k\cos\beta_k(t-\tau)\right)e^{\alpha_k(t-\tau)}d\tau\right]\right\}.\end{array}\tag{35}$$

Таким образом, решение задачи (1)-(3), (6) свелось к решению системы (32), (35) относительно неизвестных функций $u(x,t)$ и $a(t)$.

Для изучения вопроса существования и единственности классического решения задачи (1)-(3), (6) важную роль играет следующая

Лемма 2. *Если* $\{u(x,t),a(t)\}$ *– любое решение задачи* (1)-(3), (6), *то функции* $u_k(t)(k=0,1,2,\ldots)$, *определенные соотношением* (21), *удовлетворяют на* $[0,T]$ *счетной системе* (26),(27) *и* (31).

Из леммы 2 следует, что имеет место следующее

Следствие 1. *Пусть система* (32), (35) *имеет единственное решение. Тогда задача* (1)-(3), (6) *не может иметь более одного решения, т.е. если задача* (1)-(3), (6) *имеет решение, то оно единственно.*

Теперь рассмотрим в пространстве E_T^5 оператор

$$\Phi(u,a)=\{\Phi_1(u,a),\Phi_2(u,a)\},$$

где

$$\Phi_1(u,a)=\tilde{u}(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{u}_k(t)X_k(x),$$

$$\Phi_2(u,a)=\tilde{a}(t),$$

а $\tilde{u}_0(t)$, $\tilde{u}_{2k}(t)$, $\tilde{u}_{2k-1}(t)$ и $\tilde{a}(t)$ равны соответственно правым частям (26),(27) (31) и (35).

Нетрудно видеть, что

$$\|\tilde{u}_0(t)\|_{C[0,T]}\le|\varphi_0|+T\,|\psi_0|$$

$$+T\sqrt{T}\left(\int\limits_0^T|f_0(\tau)|^2\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+T^2\,\|a(t)\|_{C[0,T]}\,\|u_0(t)\|_{C[0,T]},\tag{36}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^5\left\|\tilde{u}_{2k}(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq 2\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^5\left|\varphi_{2k}\right|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{2}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^4\left|\psi_{2k}\right|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{2\sqrt{T}}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^4\left|f_{2k}(\tau)\right|\right)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{2T}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^5\left\|u_{2k}(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{37}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^5\left\|\tilde{u}_{2k-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq 2\sqrt{2}\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^5\left|\varphi_{2k-1}\right|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{2\sqrt{2}\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^4\left|\psi_{2k-1}\right|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{2\sqrt{2T}}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^4\left|f_{2k-1}(\tau)\right|\right)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{2\sqrt{2}T}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^5\left\|u_{2k-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{4\sqrt{2}T}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^6\left|\varphi_{2k}\right|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\left(1+T\left(\alpha+\sqrt{\beta-\alpha^2}\right)\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^4\left|\psi_{2k}\right|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+8T\sqrt{2T}\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\right)\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^4\left|f_{2k}(\tau)\right|\right)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+8T^2\sqrt{2}\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\right)\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^4\left\|u_{2k}(t)\right\|_{C[0,T]}^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{38}$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \leq \left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\left\{\left\|h''(t)-\int_0^1 f(x,t)dx\right\|_{C[0,T]}+\right.$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\beta\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^4\left|\varphi_{2k}\right|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\right.$$

$$+\left(2\alpha+\frac{\beta+2\alpha^2}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left|\lambda_k^2\psi_{2k}\right|\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{\left(\beta+2\alpha\left(\alpha+\sqrt{\beta-\alpha^2}\right)\right)\sqrt{T}}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\left(\int\limits_0^T\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^2\left|f_{2k}(\tau)\right|^2\right)d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{\left(\beta+2\alpha\left(\alpha+\sqrt{\beta-\alpha^2}\right)\right)T}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^5\left\|u_{2k}(t)\right\|_{C[0,T]}^2\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg]\Bigg\}. \qquad (39)$$

Предположим, что данные задачи (1)-(3), (6) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi(x)\in C^5[0,1],\ \varphi^{(6)}(x)\in L_2(0,1),\ \varphi'(0)=\varphi'''(0)=\varphi^{(5)}(0)=0,$
   $\varphi(0)=\varphi(1), \varphi''(0)=\varphi''(1),\ \varphi^{(4)}(0)=\varphi^{(4)}(1).$
2. $\psi(x)\in C^4[0,1],\ \psi^{(4)}(x)\in L_2(0,1),\ \psi'(0)=\psi'''(0)=0,$
   $\psi(0)=\psi(1),\quad \psi''(0)=\psi''(1)\,.$
3. $f(x,t),\ f_x(x,t),\ f_{xx}(x,t),\ f_{xxx}(x,t)\in C(D_T),\ f_{xxxx}(x,t)\in L_2(D_T),$
   $f_x(0,t)=f_{xxx}(0,t)=0,\ f(0,t)=f(1,t),\ f_{xx}(0,t)=f_{xx}(1,t)\ \ (0\le t\le T).$
4. $h(t)\in C^2[0,T], h(t)\neq 0\ \ (0\le t\le T).$

Тогда, из (36)-(39), с учетом (14)-(19), соответственно получаем:

$$\left\|\tilde{u}_0\left(t\right)\right\|_{C[0,T]}\le 2\left\|\varphi\left(x\right)\left(1-x\right)\right\|_{L_2(0,1)}+2T\left\|\psi\left(x\right)\left(1-x\right)\right\|_{L_2(0,1)}+$$
$$+2T\sqrt{T}\left\|f\left(x,t\right)\left(1-x\right)\right\|_{L_2(D_T)}+T^2\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}\left\|u_0(t)\right\|_{C[0,T]}, \qquad (40)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^5\left\|\tilde{u}_{2k}\left(t\right)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\le 4\sqrt{2}\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\right)\left\|\varphi^{(5)}\left(x\right)\right\|_{L_2(0,1)}+$$
$$+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\left\|\psi^{(4)}\left(x\right)\right\|_{L_2(0,1)}+\frac{4\sqrt{2T}}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\left\|f_{xxxx}\left(x,t\right)\right\|_{L_2(D_T)}+$$
$$+\frac{2T}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^5\left\|u_{2k}(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (41)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^5\left|\left|\tilde{u}_{2k-1}\left(t\right)\right|\right|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\le$$
$$\le 8\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\right)\left\|\varphi^{(5)}\left(x\right)\left(1-x\right)-5\varphi^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+$$
$$+\frac{8\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\left\|\psi^{(4)}\left(x\right)\left(1-x\right)-4\psi^{(3)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+\frac{8\sqrt{T}}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\left\|f_{xxxx}(x)(1-x)-4f_{xxx}(x)\right\|_{L_2(D_T)}+$$

$$+\frac{2\sqrt{2}T}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\left|\left|a(t)\right|\right|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^5\left\|u_{2k-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\frac{16T}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\left\|\varphi^{(6)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\frac{16}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\left(1+T\left(\alpha+\sqrt{\beta-\alpha^2}\right)\right)\left\|\psi^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+32T\sqrt{T}\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\right)\left\|f_{xxxx}(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}+$$

$$+8T^2\sqrt{2}\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\right)\left|\left|a(t)\right|\right|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^4\left\|u_{2k}(t)\right\|_{C[0,T]}^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (42)$$

$$\left\|\tilde{a}(t)\right\|_{C[0,T]}\leq\left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\left\{\left\|h''(t)-\int_0^1 f(x,t)dx\right\|_{C[0,T]}+\right.$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[2\sqrt{2}\beta\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\right)\left\|\varphi^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\right.$$

$$+2\sqrt{2}\left(2\alpha+\frac{\beta+2\alpha^2}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\right)\left\|\psi''(x)\right\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+\frac{2\sqrt{2T}\left(\beta+2\alpha\left(\alpha+\sqrt{\beta-\alpha^2}\right)\right)}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\left\|f_{xx}(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}+$$

$$\left.\left.+\frac{T\left(\beta+2\alpha\left(\alpha+\sqrt{\beta-\alpha^2}\right)\right)}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^5\left\|u_{2k}(t)\right\|_{C[0,T]}^2\right)^{1/2}\right]\right\}. \qquad (43)$$

Теперь из (40)-(42) имеем:

$$\left\|\tilde{u}(x,t)\right\|_{B_{2,T}^5}\leq A_1(T)+B_1(T)\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}\left\|u(x,t)\right\|_{B_{2,T}^5}, \qquad (44)$$

где

$$A_1(T)=2\left\|\varphi(x)(1-x)\right\|_{L_2(0,1)}+2T\left\|\psi(x)(1-x)\right\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+2T\sqrt{T}\left\|f(x,t)(1-x)\right\|_{L_2(D_T)}+4\sqrt{2}\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\right)\left\|\varphi^{(5)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\left\|\psi^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\frac{4\sqrt{2T}}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\left\|f_{xxxx}(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}+$$

$$+8\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\right)\left\|\varphi^{(5)}(x)(1-x)-5\varphi^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+\frac{8\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\left\|\psi^{(4)}(x)(1-x)-4\psi^{(3)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+\frac{8\sqrt{T}}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\left\|f_{xxxx}(x)(1-x)-4f_{xxx}(x)\right\|_{L_2(D_T)}+$$

$$+\frac{16T}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\left\|\varphi^{(6)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\frac{16\left(1+T\left(\alpha+\sqrt{\beta-\alpha^2}\right)\right)}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\left\|\psi^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+$$

$$+32T\sqrt{T}\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\right)\left\|f_{xxxx}(x,t)\right\|_{L_2(D_T)},$$

$$B_1(T)=\frac{2(\sqrt{2}+1)T}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}+T^2\left(8\sqrt{2}\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\right)+1\right).$$

Примем обозначения:

$$A_2(T)=\left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\left\{\left\|h''(t)-\int_0^1 f(x,t)dx\right\|_{C[0,T]}+\right.$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[2\sqrt{2}\beta\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\right)\left\|\varphi^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\right.$$

$$+2\sqrt{2}\left(2\alpha+\frac{\beta+2\alpha^2}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\right)\left\|\psi''(x)\right\|_{L_2(0,1)}+$$

$$\left.\left.+\frac{2\sqrt{2T}}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\left(\beta+2\alpha\left(\alpha+\sqrt{\beta-\alpha^2}\right)\right)\left\|f_{xx}(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}\right]\right\},$$

$$B_2(T)=\left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{T}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\left(\beta+2\alpha\left(\alpha+\sqrt{\beta-\alpha^2}\right)\right).$$

Тогда из (43) ясно, что

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]}\leq A_2(T)+B_2(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}}. \tag{45}$$

Из неравенств (44), (45) заключаем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B^5_{2,T}}+\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]}\leq A(T)+B(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}}, \tag{46}$$

где

$$A(T)=A_1(T)+A_2(T),\ \ B(T)=B_1(T)+B_2(T).$$

Итак, можно доказать следующую теорему:

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1-4 и*

$$(A(T)+2)^2 B(T) < 1. \tag{47}$$

Тогда задача (1)-(3), (6) *имеет в шаре* $K = K_R \left(\|z\|_{E_T^5} \le R = A(T) + 2 \right)$ *пространства* E_T^5 *единственное решение.*

Доказательство. В пространстве E_T^5 рассмотрим уравнение

$$z = \Phi z, \tag{48}$$

где $z = \{u, a\}$, компоненты $\Phi_i(u,a)(i = 1,2)$ оператора $\Phi(u,a)$ определены правыми частями уравнений (32), (35) соответственно.

Рассмотрим оператор $\Phi(u,a)$ в шаре $K = K_R \left(\|z\|_{E_T^5} \le R = A(T) + 2 \right)$ из E_T^5. Аналогично (46) получаем, что для любых $z, z_1, z_2 \in K_R$ справедливы оценки:

$$\|z\|_{E_T^3} \le A(T) + B(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}, \tag{49}$$

$$\|z_1 - z_2\|_{E_T^3} \le B(T) R \left(\|a_1(t) - a_2(t)\|_{C[0,T]} + \|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|_{B_{2,T}^5} \right). \tag{50}$$

Тогда из оценок (49) и (50), с учетом (47), следует, что оператор Φ действует в шаре $K = K_R$ и является сжимающим. Поэтому в шаре $K = K_R$ оператор Φ имеет единственную неподвижную точку $\{u, a\}$, которая является единственным решением уравнения (47), т.е. является единственным в шаре $K = K_R$ решением системы (32), (35).

Функция $u(x,t)$, как элемент пространства $B_{2,T}^5$, непрерывна и имеет непрерывные производные $u_x(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$, $u_{xxx}(x,t)$ и $u_{xxxx}(x,t)$ в D_T.

Далее, из (26) и (33) имеем:

$$u_0'(t) = \psi_0 + \int_0^t F_0(\tau; u, a) d\tau, \tag{51}$$

$$u_{2k-1}'(t) = -\frac{\beta\lambda_k^4}{\beta_k} \varphi_{2k-1} e^{\alpha_k t} \sin\beta_k t + \left(\frac{\alpha_k}{\beta_k} \sin\beta_k t + \cos\beta_k t \right) e^{\alpha_k t} \psi_{2k-1} +$$

$$+ \frac{1}{\beta_k} \int_0^t F_{2k-1}(\tau; u, a) \left(\alpha_k \sin\beta_k (t-\tau) + \beta_k \cos\beta_k (t-\tau) \right) e^{\alpha_k (t-\tau)} d\tau +$$

$$+ \frac{2\beta\lambda_k^3}{\beta_k} \varphi_{2k} e^{\alpha_k t} \left((1 + \alpha_k t) \sin\beta_k t + \beta_k t \cos\beta_k t \right) +$$

$$+ \frac{2t\lambda_k^3}{\beta_k} \psi_{2k} e^{\alpha_k t} \sqrt{\beta - \alpha^2} \left[\left(\beta - 2\alpha^2 \right) \sin\beta_k t - 2\alpha\sqrt{\beta - \alpha^2} \cos\beta_k t \right] +$$

$$+ \frac{4\lambda_k}{\beta_k^2} \int_0^t \left[\int_0^\tau F_{2k}(\xi; u, a) \left((\beta - \alpha^2) \lambda_k^2 \sin\beta_k (\tau - \xi) + \right. \right.$$

$$+ \alpha\beta_k \cos\beta_k (\tau - \xi)) e^{\alpha_k(\tau-\xi)} d\xi \Big] (\alpha_k \sin\beta_k (t-\tau) +$$

$$+\beta_k \cos\beta_k (t-\tau)) e^{\alpha_k(t-\tau)} d\tau \quad (k = 1, ...; \ 0 \le t \le T). \tag{52}$$

Из (51), (29) и (52), в силу (14)-(19), соответственно нетрудно видеть, что

$$\|u_0'(t)\|_{C[0,T]} \le 2T \|\psi(x)(1-x)\|_{L_2(0,1)} +$$

$$+2\sqrt{T} \|f(x,t)(1-x)\|_{L_2(D_T)} + T\|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}} ,$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^5 \|u_{2k}'(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{4\sqrt{2}\beta}{\sqrt{\beta-\alpha^2}} \left\|\varphi^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)} +$$

$$+4\sqrt{2}\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\right)\left[\|\psi''(x)\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{T}\|f_{xx}(x,t)\|_{L_2(D_T)}\right] +$$

$$+T\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\right)\|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}} ,$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^5 \left|\left|u_{2k-1}'(t)\right|\right|_{C[0,T]}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{8\beta}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\left\|\varphi^{(4)}(x)(1-x) - 4\varphi'''(x)\right\|_{L_2(0,1)} +$$

$$+\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\right)\Big[2\sqrt{2}\|\varphi''(x)(1-x) - 2\varphi'(x)\|_{L_2(0,1)} +$$

$$+2\sqrt{2T}\|f_{xx}(x,t)(1-x) - 2_x(x,t)\|_{L_2(D_T)} + T\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}}\Big] +$$

$$+\frac{16\beta}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\left(1+\left(\alpha+\sqrt{\beta-\alpha^2}\right)T\right)\left\|\varphi^{(5)}(x)\right\|_{L_2(0,1)} +$$

$$+\frac{16T}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\left(\beta+2\alpha^2+2\alpha\sqrt{\beta-\alpha^2}\right)\|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} +$$

$$+16\sqrt{T}\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\right)\left(\alpha+\sqrt{\beta-\alpha^2}\right)\|f_{xxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} +$$

$$+8\sqrt{2}\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{\beta-\alpha^2}}\right)\left(\alpha+\sqrt{\beta-\alpha^2}\right)T\,||a(t)||_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}} .$$

Отсюда ясно, что $u_t(x,t)$, $u_{tx}(x,t)$ и $u_{txx}(x,t)$ непрерывны в D_T.
Теперь из (22)-(24), соответственно имеем:

$$\|u_0''(t)\|_{C[0,T]} \le \left\|\|f(x,t)+a(t)u(x,t)\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)},$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k\|u_{2k}''(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} \le 4\alpha\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_{2k}'(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+2(\beta+\|a(t)\|_{C[0,T]})\,\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}}+2\sqrt{2}\left\|\|f_x(x,t)\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)},$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k\left\|u''_{2k-1}(t)\right\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq 2\sqrt{6}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k\left\|u'_{2k-1}(t)\right\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\sqrt{6}(5\beta+\|a(t)\|_{C[0,T]})\,\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}}+4\sqrt{6}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k\left\|u'_{2k}(t)\right\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+4\sqrt{3}\left\|\|f_x(x,t)\,(1-x)-f(x,t)\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)}.$$

Из последнего соотношения ясно, что $u_{tt}(x,t)$ непрерывна в D_T.

Легко проверить, что уравнение (1) и условия (2)-(4) и (6) удовлетворяются в обычном смысле.

Следовательно, $\{u(x,t),a(t)\}$ является решением задачи (1)-(3), (6). В силу следствия леммы 2 оно единственно в шаре $K=K_R$. Теорема доказана. $\square$

С помощью леммы 1, из последней теоремы вытекает однозначная разрешимость исходной задачи (1)-(4)

Теорема 2. *Пусть выполняются все условия теоремы 1 и выполнены условия согласования*

$$\int_0^1\varphi\,(x)\,dx=h\,(0)\,,\quad\int_0^1\psi\,(x)\,dx=h'\,(0)\,.$$

Тогда задача (1)-(4) *имеет в шаре* $K=K_R\left(\|z\|_{E^5_T}\leq R=A\,(T)+2\right)$ *пространства* E^5_T *единственное классическое решение.*

Заключение

В работе доказаны существование и единственность классического решения одной обратной краевой задачи с неизвестным коэффициентом, зависящим от времени, для одного уравнения Буссинеска четвертого порядка с несамосопряженными краевыми и с дополнительными интегральными условиями.

Список литературы

[1] Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач // Доклады Академии наук СССР. 1943. Т. 39, № 4. С. 195–198.

[2] Лаврентьев М.М. Об одной обратной задаче для волнового уравнения // Доклады Академии наук СССР. 1964. Т. 157, № 3. С. 520–521.

[3] Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.Т. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 288 с.

[4] Иванов В.К., Васин В.В., Танина В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.

[5] Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994. 206 с.

[6] Самарский А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, № 11. С. 1925–1935.

[7] Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quarterly of Applied Mathematics. 1963. Vol. 5, № 21. Pp. 155–160.

[8] Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.

[9] Нахушев А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приближения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18, № 1. С. 72–81.

[10] Yan Z.Y., Xie F.D., Zhang H.Q. Symmetry reductions, integrability and solitary wave solutions to high-order modified Boussinesq equations with damping term // Communications in Theoretical Physics. 2001. Vol. 36, № 1. Pp. 1–6.

[11] Сабитов К.Б., Мартемьянова Н.В. Нелокальная обратная задача для уравнения эллиптико-гиперболического типа // Современная математика и ее приложения. 2011. Т. 68. С. 40–50.

[12] Мегралиев Я.Т. Об одной обратной краевой задаче для эллиптического уравнения второго порядка с дополнительными интегральными условиями // Владикавказский математический журнал. 2013. Т. 15, № 4. С. 30–43.

Библиографическая ссылка

Мегралиев Я.Т., Ализаде Ф.Х. Обратная краевая задача для одного уравнения Буссинеска четвертого порядка с несамосопряженными краевыми и с дополнительными интегральными условиями // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 2. С. 17–36.

Сведения об авторах

1. **Мегралиев Яшар Топуш оглы**
   профессор кафедры дифференциальных и интегральных уравнений Бакинского государственного университета.

   Азербайджан, AZ1148, г. Баку, ул. З. Халилова, д. 23, БГУ.
   E-mail: yashar_aze@mail.ru

2. **Ализаде Фархад Хикмет оглы**
   кафедра дифференциальных и интегральных уравнений Бакинского государственного университета.

   Азербайджан, AZ1148, г. Баку, ул. З. Халилова, д. 23, БГУ.

AN INVERSE PROBLEM FOR A FOURTH-ORDER BOUSSINESQ EQUATION WITH NON-CONJUGATE BOUNDARY AND INTEGRAL OVERDETERMINATION CONDITIONS

Mehraliev Yashar Topush ogli
Professor at Differential and Integral Equations department, Baku State University.
Azerbaijan, AZ1148, Baku, 23 Khalilov str., BSU. E-mail: yashar_aze@mail.ru

Alhzade Farhad Hikmet ogli
Differential and Integral Equations department, Baku State University.
Azerbaijan, AZ1148, Baku, 23 Khalilov str., BSU.

Received 01.11.2016, revised 06.06.2017.

The work is devoted to the study of the solvability of the inverse boundary value problem with an unknown time depended coefficient for a fourth-order Boussinesq equation with non-conjugate boundary conditions and integral overdetermination conditions. The goal of paper consists of determination of the unknown coefficient and the solution of the considered problem. The problem is considered in a rectangular domain. To investigate the solvability of the inverse problem, we perform a conversion from the original problem to some direct auxiliary problem with trivial boundary conditions. Further, we prove the solvability of the supplementary inverse problem. Then we make a conversion to the stated problem again and as a result we receive the solvability of the inverse problem.

Keywords: inverse boundary problem, Boussinesq equation, Fourier method, classical solution.

Bibliographic citation

Mehraliev Y.T., Alhzade F.H. An inverse problem for a fourth-order Boussinesq equation with non-conjugate boundary and integral overdetermination conditions. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2017, no. 2, pp. 17–36. (in Russian)

References

[1] Tikhonov A.N. On the stability of inverse problems. *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Reports of the Academy of Sciences of the USSR], 1943, vol. 39(4), pp. 195–198. (in Russian)

[2] Lavrentyev M.M. On an inverse problem for the wave equation. *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Reports of the Academy of Sciences of the USSR], 1964, vol. 157(3), pp. 520–521. (in Russian)

[3] Lavrentyev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.T. *Nekorrektnye Zadachi Matematicheskoi Fiziki i Analiza* [Ill-posed Problems of Mathematical Physics and Analysis]. Nauka Publ., Moscow, 1980. 288 p. (in Russian)

[4] Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanina V.P. *Teoriya Lineinykh Nekorrektnykh Zadach i ee Prilozheniya* [The Theory of Linear Ill-Posed Problems and its Applications]. Nauka Publ., Moscow, 1978. 206 p. (in Russian)

[5] Denisov A.M. *Vvedenie v Teoriyu Obratnykh Zadach* [Introduction to the Theory of Inverse Problems]. MSU, Moscow, 1994. 206 p. (in Russian)

[6] Samarskii A.A. On some problems in the theory of differential equations. *Differentsialnye Uravneniya* [Differential Equations], 1980, vol. 16(11), pp. 1925–1935. (in Russian)

[7] Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1963, vol. 5(21), pp. 155–160.

[8] Ionkin N.I. Solution of a boundary-value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition. *Differentsialnye Uravneniya* [Differential equations], 1977, vol. 13(2), pp. 294–304. (in Russian)

[9] Nakhushev A.M. An approximate method for solving boundary value problems for differential equations and its approximation to the dynamics of soil moisture and groundwater. *Differentsialnye Uravneniya* [Differential Equations], 1982, vol. 18(1), pp. 72–81. (in Russian)

[10] Yan Z.Y., Xie F.D., Zhang H.Q. Symmetry reductions, integrability and solitary wave solutions to high-order modified Boussinesq equations with damping term. *Communications in Theoretical Physics*, 2001, vol. 36(1), pp. 1–6.

[11] Sabitov K.B., Martemyanova N.V. Nonlocal inverse problem for an equation of elliptic-hyperbolic type. *Sovremennaya Matematika i ee Prilozheniya* [Modern Mathematics and its Applications], 2011, vol. 68, pp. 40–50. (in Russian)

[12] Megraliev Ya.T. On an inverse boundary-value problem for a second-order elliptic equation with additional integral conditions. *Vladikavkazskii Matematicheskii Zhurnal* [Vladikavkaz Mathematics Journal], 2013, vol. 15(4), pp. 30–43. (in Russian)