СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.3:62-50

НЕЛИНЕЙНОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ С ПАРАБОЛИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ

Юлдашев Т.К.
Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева, г. Красноярск

Поступила в редакцию 22.12.2016, после переработки 09.06.2017.

Изучены вопросы разрешимости подвижной точечной задачи нелинейного оптимального управления в обратной задаче для одной системы с параболическим и обыкновенным дифференциальными уравнениями при наличии нескольких подвижных источников. Параболическое уравнение рассмотрено с начально-граничными и нелокальным интегральным условиями, а обыкновенное дифференциальное уравнение – с начальным условием. Функционал качества имеет нелинейный вид. Сформулированы необходимые условия нелинейной оптимальности управления. Определение оптимальной управляющей функции сведено к сложному функционально-интегральному уравнению, решение которого состоит из решения отдельно взятых двух уравнений: нелинейных функциональных уравнений и нелинейных интегральных уравнений. Получены: формулы для приближенного вычисления функции состояния, функции восстановления и подвижного нелинейного оптимального управления и оценка для допускаемой погрешности по оптимальному управлению.

Ключевые слова: параболическое уравнение, подвижная точечная задача, обратная задача, нелинейность управления, минимизация функционала.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 2. С. 59–78.

Введение

Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, приводит к изучению прямых и обратных задач для уравнений в частных производных. Теория обратных задач для уравнений в частных производных, в силу ее прикладной важности, является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Одним из классов качественно новых задач являются нелокальные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Нелокальные задачи в виде интегральных условий встречаются при математическом моделировании явлений различной природы, когда граница области протекания процесса недоступна для непосредственных измерений. Примером могут служить задачи, возникающие при исследовании диффузии частиц в турбулентной плазме, процессов распространения тепла, процесса влагопереноса в капилярно-пористых средах.

С другой стороны, теория оптимального управления для систем с распределенными параметрами широко применяется при решении задач аэрогазодинамики, химических реакций, диффузии, фильтрации, процессов горения, нагрева и т.д. [1–7]. Разрабатываются и эффективно используются различные приближенные методы решения задач оптимального управления системами с распределенными параметрами (см., напр. [8–15]).

Одним из направлений теории оптимального управления системами с распределенными параметрами является разработка методов решения задач оптимального управления при наличии подвижных источников [16]. Во многих задачах нелинейного оптимального управления процессом теплопередачи, часто приходится учитывать вспомогательные элементы. Эти элементы обычно имеют сосредоточенные параметры. Такие системы с распределенными параметрами можно описывать совокупностью нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и параболических уравнений при начальных и граничных условиях.

В данной работе рассматриваются вопросы аналитического и приближенного решения нелинейной обратной задачи оптимального управления процессом распространения тепла по стержню конечной длины для одной системы с параболическим и обыкновенным дифференциальными уравнениями при смешанных и начальном условиях и с квадратичным критерием оптимальности. При этом предполагается существование нескольких подвижных точечных источников. Формулируются необходимые условия оптимальности, основанные на принципе максимума, вычисляются управляющие функции и решается соответствующая обратная задача.

1. Постановка задачи

Рассматривается нелинейное параболическое дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u(t,\,x)}{\partial t}-\frac{\partial^2 u(t,\,x)}{\partial x^2}=\eta\,(t)\,\beta\,(x)+\sum_{k=1}^{m}\delta\left(x-\sigma_k\,(t)\right)f_k\left(t,\,p_k\,(t)\right),\ (t,\,x)\in D \quad (1)$$

при начальном

$$u(0,\,x)=\varphi(x),\ x\in D_l \quad (2)$$

и граничных условиях Бенара

$$u(t,\,0)=u(t,\,l)=0,\ t\in D_T, \quad (3)$$

а также при дополнительном условии в интегральной форме

$$\int_0^T \Theta\,(t)\,u(t,\,x)dt=\psi(x),\ x\in D_l, \quad (4)$$

где $f_k(t, p_k) \in C(D_T \times \Omega)$ – функции внешнего источника, $p_k(t) \in C(D_T)$ – управляющие функции, $k = \overline{1, m}$, $u(t, x) \in C(D)$ – функция состояния управляемого процесса, $\varphi(x)$ – функция распределения тепла по стрежню в начальный момент времени, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) \in C^2(D_l)$, $\delta(x - \sigma_k(t))$ – дельта-функция Дирака, $k = \overline{1, m}$, $\beta(x) \in C(D_l)$ – функция восстановления, $\eta(t) \in C(D_T)$, $\Theta(t) \in C(D_T)$, $\psi(x) \in C(D_l)$, $D \equiv D_T \times D_l$, $D_T \equiv [0, T]$, $D_l \equiv [0, l]$, $\Omega \equiv [0, M^\star]$, $0 < M^\star < \infty$, $0 < T < \infty$, $0 < l < \infty$.

Функции $\sigma_k(t) \in C(D_T)$ описывают изменения положения подвижных точечных источников в пределах от нуля до l и определяются как решение следующей задачи Коши

$$\sigma'_k(t) = q_k\Big(t, \sigma_k(t)\Big), \; \sigma_k(0) = \sigma_k^0 = \text{const}, \tag{5}$$

где $q_k(t, \sigma_k) \in C^{0,1}(D)$, $k = \overline{1, m}$. Здесь дифференциальное уравнение (5) на отрезке D_T описывает скорость изменения положения подвижных точечных источников, зависящую от времени и текущего положения этих источников.

Отметим, что прямая смешанная задача (1)–(3) при $\eta(t) = 0$ изучена в работе [17]. Это работа [17] отличается от других работ автора по оптимальному управлению (см. [13–15]), прежде всего, тем, что в данной работе формулируются необходимые условия оптимальности, основанные на принципе максимума.

В настоящей работе рассматриваются не только математические вопросы разрешимости нелинейной смешанной задачи оптимального управления, но и, в отличие от [17], изучаются вопросы переопределения неизвестного коэффициента $\beta(x)$ для данной системы с параболическим и обыкновенным дифференциальными уравнениями при дополнительном условии (4). А интегральная форма в условии (4) связана с тем, что часто на практике встречаются ситуации, когда объект исследования либо принципиально недоступен для измерения (особенное в обратной задаче), либо проведение такого измерения дорого. Тогда в качестве дополнительной информации, достаточной для однозначной разрешимости задачи служат нелокальные условия в интегральной форме.

В дифференциальном уравнении (1) содержится тройка неизвестных функций: $\Big\{u(t, x) \in C(D);\; \beta(x) \in C(D_l);\; p_k(t) \in C(D_T),\; k = \overline{1, m}\Big\}$. Для полного определения этой тройки неизвестных функций не достаточно задания условий (2)–(4). Поэтому в работе будет использована минимизация квадратичного функционала качества. Методику решения задачи (1)–(4) можно применять и при решении других задач нелинейного оптимального управления, связанных с процессом теплопередачи, например в задачах управления металлургическими печами. Здесь требуются исследования математических моделей для управления металлургическими печами, позволяющие в режиме реального времени прогнозировать распределение температуры нагреваемых материалов в зависимости от изменения подаваемой мощности, времени нагрева тел, режимов нагрева и т.д.

Итак, при фиксированных значениях управлений $p_k(t)$ используется метод разделения переменных, основанный на поиске решения смешанной задачи (1)–(3) в виде ряда Фурье

$$u(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t)\, b_i(x), \tag{6}$$

где функции $b_i(x)$ определены как собственные функции спектральной задачи

$b''(x)+\lambda^2 b(x)=0,\ b(0)=b(l)=0,\ 0<\lambda$ и образуют полную систему ортонормированных функций $\Big\{b_i(x)\Big\}_{i=1}^{\infty}$ в $L_2(D_l)$, а λ_i – соответствующие собственные значения.

Предполагается, что

$$\beta(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i\, b_i(x), \tag{7}$$

где $\beta_i=\int\limits_0^l \beta(y)\, b_i(y)\, dy$.

Задача. Найти такие управляющие функции

$$\overline{p}_k(t)\in\Big\{\overline{p}_k\,:\,|\,\overline{p}_k(t)\,|\le M^{\star},\ k=\overline{1,\,m},\ t\in D_T\Big\},$$

функцию восстановления $\overline{\beta}(x)$ и соответствующее им состояние $\overline{u}(t,x)$ – решение обратной задачи (1)–(4), которые доставляют минимум функционалу

$$J[p]=\int\limits_0^l\Big[u(T,y)-\xi(y)\Big]^2 dy+\alpha\sum_{k=1}^{m}\int\limits_0^T p_k^2(t)\,dt, \tag{8}$$

где $\xi(x)$ – заданная функция такая, что $\xi(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\xi_i\, b_i(x)$, $\xi_i=\int\limits_0^l\xi(y)\, b_i(y)\, dy$, $\xi(0)=0,\ 0<\alpha=\mathrm{const}$.

Здесь отметим, что в формуле (8) $p_k(t)\in C(D_T)$, $k=\overline{1,\,m}$ и они ограничены по модулю на отрезке D_T. Поэтому существование второго слагаемого в составе функционала (8) не приводит к особенностям при решении данной задачи оптимального управления.

2. Обратная задача (1)–(4)

Обозначим

$$\overline{C}_u^{1,\,2}(D)=\Big\{u\,:\,u(t,x)\in C^{1,\,2}(D), u(t,0)=u(t,l)=0\Big\},$$

$$\overline{C}_{\Phi}^{1,\,2}(D)=\Big\{\Phi\,:\,\Phi(t,x)\in C^{1,\,2}(D), \Phi(T,x)=0\Big\}.$$

Замыкание этих пространств по норме

$$\|\,u\,\|_{\overline{H}(D)}=\sqrt{\int\limits_0^T\int\limits_0^l|\,u(t,x)\,|^2\,dx\,dt}<\infty$$

обозначим, соответственно $\overline{H}_u(D)$, $\overline{H}_{\Phi}(D)$.

Определение 1. *Если функция* $u(t,x) \in \overline{H}_u(D)$ *удовлетворяет следующему интегральному тождеству*

$$\int_0^T \int_0^l \left\{ u(t,y) \left[\frac{\partial \Phi(t,y)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Phi(t,y)}{\partial y^2} \right] - \right.$$

$$\left. - \left[\eta(t)\,\beta(y) + \sum_{k=1}^m \delta\Big(y - \sigma_k(t)\Big) f_k\Big(t, p_k(t)\Big) \right] \Phi(t,y) \right\} dy\, dt = \int_0^l \varphi\Big[\Phi(t,y)\Big]_{t=0} dy$$

для любого $\Phi(t,x) \in \overline{H}_\Phi(D)$, *то она называется обобщенным решением смешанной задачи* (1)–(3).

При доказательстве теорем используются следующие известные пространства:

– банахово пространство $B_2(T)$ с нормой

$$\| a(t) \|_{B_2(T)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \Big(\max_{t \in D_T} | a_i(t) | \Big)^2} < \infty,$$

– координатное гильбертово пространство ℓ_2 с нормой

$$\| \varphi \|_{\ell_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} | \varphi_i |^2} < \infty.$$

Кроме того, в данной работе используются следующие обозначения. Класс непрерывных функций в замкнутой области, ограниченных по норме с положительной постоянной M, обозначим через $\mathrm{Bnd}(M)$. Класс непрерывных функций в замкнутой области, удовлетворяющих условию Липшица по переменным $u, v, \ldots$ с положительным коэффициентом N, обозначим через $\mathrm{Lip}\left\{N_{|\,u,v,\ldots}\right\}$. А для функций одной переменной индекс опускается.

Как и в работе [13] легко убедиться, что решение смешанной задачи (1)–(3) для фиксированных значений управлений и функции восстановления при помощи определения обобщенного решения и рядов Фурье (6), (7) можно представить в следующем виде

$$u(t,x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i(x) \left\{ \omega_i(t) + \int_0^t G_i(t,s) \Big[\eta(s)\,\beta_i + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^m b_i\big(\sigma_k(s)\big)\, f_k\big(s, p_k(s)\big) \Big] ds \right\}, \tag{9}$$

где $\omega_i(t) = \varphi_i\, G_i(t,0)$, $G_i(t,s) = \exp\big\{ -\lambda_i^2 (t-s) \big\}$, $\varphi_i = \int_0^l \varphi(y)\, b_i(y)\, dy$.

Предположим, что нелинейные функции $f_k\left(t,\, p_k(t)\right)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$f_k\left(t,\, p_k(t)\right) \in \mathrm{Bnd}\left(M_k^0\right), \quad f_{kp}\left(t,\, p_k(t)\right) \neq 0, \tag{10}$$

где $0 < M_k^0 = \mathrm{const}$, $f_{kp}\left(t,\, p_k(t)\right) = \dfrac{\partial f_k\left(t,\, p_k(t)\right)}{\partial p_k}$, $k = \overline{1,\, m}$.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi(x) \in L_2(D_l)$ *и функции* $f_k\left(t,\, p_k(t)\right)$, $k = \overline{1,\, m}$ *удовлетворяют условиям* (10). *Тогда для функции* (9) *справедливо, что* $u(t,\, x) \in \overline{H}_u(D)$.

По условию задачи предполагается, что $\psi(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \psi_i\, b_i(x)$, где $\psi_i = \int\limits_0^l \psi(y)\, b_i(y)\, dy$.

Воспользуемся условием (4):

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i(x) \left\{ \int_0^T \Theta(t)\, \omega_i(t)\, dt + \int_0^T \Theta(t) \int_0^t G_i(t,\, s) \Big[\eta(s)\, \beta_i + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{m} b_i\left(\sigma_k(s)\right) f_k\left(s,\, p_k(s)\right) \Big] \, ds\, dt \right\}.$$

Отсюда получаем, что

$$\beta_i = \gamma_{1i} - \frac{1}{\gamma_{0i}} \int_0^T \Theta(t) \int_0^t G_i(t,\, s) \sum_{k=1}^{m} b_i\left(\sigma_k(s)\right) f_k\left(s,\, p_k(s)\right) ds\, dt, \tag{11}$$

где $\gamma_{1i} = \dfrac{1}{\gamma_{0i}} \left(\psi_i - \int\limits_0^T \Theta(t)\, \omega_i(t)\, dt \right)$, $\gamma_{0i} = \int\limits_0^T \Theta(t) \int\limits_0^t G_i(t,\, s)\, \eta(s)\, ds\, dt \neq 0$.

Подставляя (11) в (9), получаем

$$u(t,\, x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i(x) \left\{ \mu_i(t) + \int_0^t G_i(t,\, s) \sum_{k=1}^{m} b_i\left(\sigma_k(s)\right) f_k\left(s,\, p_k(s)\right) ds - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{\gamma_{0i}} \int_0^t G_i(t,\, s)\, \eta(s) \int_0^T \Theta(\theta) \int_0^\theta G_i(\theta,\, \zeta) \sum_{k=1}^{m} b_i\big(\sigma_k(\zeta)\big) f_k\big(\zeta,\, p_k(\zeta)\big) d\zeta\, d\theta\, ds \right\}, \tag{12}$$

где $\mu_i(t) = \omega_i(t) + \gamma_{1i} \int\limits_0^t G_i(t,\, s)\, \eta(s)\, ds$.

Здесь нетрудно убедиться, что в предположениях поставленной задачи и выполнении условий теоремы 1 функция (12) является единственным обобщенным решением уравнения (1) с условиями (2)–(4) при фиксированных значениях функций управления $p_k(t)$, $\sigma_k(t)$, $k = \overline{1,\, m}$.

3. Построение оптимального управления

Пусть $\overline{p}_k(t)$ являются оптимальными управлениями:

$$\Delta J\left[\overline{p}_k(t)\right] = J\left[\overline{p}_k(t) + \Delta\overline{p}_k(t)\right] - J\left[\overline{p}_k(t)\right] \geq 0,$$

где $\overline{p}_k(t) + \Delta\overline{p}_k(t) \in \overline{H}(D_T)$, $k = \overline{1, m}$.

Применение принципа максимума приводит к следующим необходимым условиям оптимальности (см., напр. [18], стр. 36–40 или [4])

$$\vartheta\big(t, \sigma_k(t)\big) f_{kp}\big(t, \overline{p}_k(t)\big) - 2\alpha\overline{p}_k(t) = 0, \tag{13}$$

$$\vartheta\big(t, \sigma_k(t)\big) f_{kpp}\big(t, \overline{p}_k(t)\big) - 2\alpha < 0, \ k = \overline{1, m}, \tag{14}$$

где $\vartheta(t, x)$ – обобщенное решение следующей задачи

$$\vartheta_t(t, x) + \vartheta_{xx}(t, x) = 0, \quad (t, x) \in D,$$

$$\vartheta(t, x) = -2\Big[u(T, x) - \xi(x)\Big], \quad \vartheta(t, 0) = \vartheta(t, l) = 0,$$

сопряженной с задачей (1)–(3) и определяется по формуле

$$\vartheta(t, x) = -2\sum_{i=1}^{\infty} b_i(x)\, G_i(T, s)\,\{\mu_i(T) +$$

$$+\int_0^T G_i(T, s)\sum_{k=1}^{m} b_i\big(\sigma_k(s)\big) f_k\big(s, p_k(s)\big)ds - \frac{1}{\gamma_{0i}}\int_0^T G_i(T, s)\,\eta(s)\times$$

$$\times\int_0^T \Theta(\theta)\int_0^\theta G_i(\theta, \zeta)\sum_{k=1}^{m} b_i\big(\sigma_k(\zeta)\big) f_k\big(\zeta, p_k(\zeta)\big)d\zeta d\theta ds - \xi_i\Bigg\}. \tag{15}$$

С учетом условий (10) условия оптимальности (13), (14) перепишем в следующем виде

$$2\alpha p_k(t)\, f_{kp}^{-1}\big(t, p_k(t)\big) = \vartheta\big(t, \sigma_k(t)\big), \tag{16}$$

$$f_{kp}\big(t, p_k(t)\big)\,\frac{\partial}{\partial p_k(t)}\left(\frac{p_k(t)}{f_{kp}\big(t, p_k(t)\big)}\right) > 0, \ k = \overline{1, m}. \tag{17}$$

С учетом (17) из (14) и (15) получаем

$$\alpha p_k(t)\, f_{kp}^{-1}\big(t, p_k(t)\big) +$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^T G_i(T, t)\, G_i(T, s)\sum_{k=1}^{m} b_i^2\big(\sigma_k(s)\big) f_k\big(s, p_k(s)\big)ds -$$

$$-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_{0i}}\int_0^T G_i(T, t)\, G_i(T, s)\,\eta(s)\times$$

$$\times \int\limits_0^T \Theta(\theta) \int\limits_0^\theta G_i(\theta,\zeta) \sum_{k=1}^m b_i^2\big(\sigma_k(\zeta)\big) f_k\big(\zeta, p_k(\zeta)\big) d\zeta d\theta ds =$$

$$= \sum_{i=1}^\infty \big(\mu_i(T) + \xi_i\big) G_i(T,t)\, b_i\big(\sigma_k(t)\big). \tag{18}$$

Преобразуем следующий интеграл с двукратным применением формулы Дирихле

$$\int\limits_0^T Q_{0\,i}(t,s) \int\limits_0^T \Theta(\theta) \int\limits_0^\theta G_i(\theta,\zeta) \sum_{k=1}^m b_i^2\big(\sigma_k(\zeta)\big) f_k\big(\zeta, p_k(\zeta)\big) d\zeta d\theta ds =$$

$$= \int\limits_0^T Q_{0\,i}(t,s) \int\limits_0^T G_i(0,\zeta) \sum_{k=1}^m b_i^2\big(\sigma_k(\zeta)\big) f_k\big(\zeta, p_k(\zeta)\big) \nu_i(\zeta)\, d\zeta\, ds =$$

$$= \int\limits_0^T Q_{1i}(t,\zeta) \sum_{k=1}^m b_i^2\big(\sigma_k(\zeta)\big) f_k\big(\zeta, p_k(\zeta)\big) d\zeta, \tag{19}$$

где $Q_{0\,i}(t,s) = G_i(T,t)\, G_i(T,s)\, \eta(s)$, $\nu_i(\zeta) = \int\limits_\zeta^T \Theta(\theta)\, G_i(\theta,0)\, d\theta$,

$Q_{1i}(t,\zeta) = \nu_i(\zeta)\, G_i(0,\zeta) \int\limits_\zeta^T Q_{0\,i}(t,s)\, ds$.

Подставляя (19) в (18), получаем

$$\alpha\, p_k(t)\, f_{k\,p}^{-1}\big(t, p_k(t)\big) +$$

$$+ \sum_{i=1}^\infty \int\limits_0^T G_i(T,t)\, G_i(T,s) \sum_{k=1}^m b_i^2\big(\sigma_k(s)\big) f_k\big(s, p_k(s)\big) ds -$$

$$- \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{\gamma_{0i}} \int\limits_0^T Q_{1i}(t,\zeta) \sum_{k=1}^m b_i^2\big(\sigma_k(\zeta)\big) f_k\big(\zeta, p_k(\zeta)\big) d\zeta =$$

$$= \sum_{i=1}^\infty \big(\mu_i(T) + \xi_i\big) G_i(T,t)\, b_i\big(\sigma_k(t)\big)$$

или

$$\alpha\, p_k(t)\, f_{k\,p}^{-1}\big(t, p_k(t)\big) + \sum_{k=1}^m \int\limits_0^T Q_{2k}(t,s)\, f_k\big(s, p_k(s)\big) ds -$$

$$- \sum_{k=1}^m \int\limits_0^T Q_{3k}(t,\zeta)\, f_k\big(\zeta, p_k(\zeta)\big) d\zeta = F_k(t), \tag{20}$$

где

$$Q_{2k}(t,\,s)=\sum_{i=1}^{\infty}G_i(T,\,t)\,G_i(T,\,s)\,b_i^2\big(\sigma_k(s)\big),\quad Q_{3k}(t,\,\zeta)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_{0i}}Q_{1i}(t,\zeta)\,b_i^2\big(\sigma_k(\zeta)\big),$$

$$F_k(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\big(\mu_i\,(T)+\xi_i\big)G_i(T,\,t)\,b_i\big(\sigma_k(t)\big),\;k=\overline{1,\,m}.$$

В уравнении (20) положим

$$\alpha\,p_k\,(t)\,f_{k\,p}^{-1}\big(t,\,p_k\,(t)\big)=g_k(t),\;k=\overline{1,\,m}. \tag{21}$$

Здесь $g_k(t)$ – пока неизвестные функции. Но, мы сначала предположим, что они заданы. Тогда имеем следующие функциональные уравнения

$$p_k(t)=\frac{g_k(t)}{\alpha}f_{k\,p}\big(t,\,p_k\,(t)\big),\;k=\overline{1,\,m}. \tag{22}$$

Пусть выполняется следующее условие

$$f_{k\,p}\big(t,\,p_k\big)\in \mathrm{Bnd}\big(\overline{M}_k\big)\cap \mathrm{Lip}\big\{\overline{N}_{k\,|\,p_k}\big\},\;k=\overline{1,\,m},\;0<\overline{N}_k,\overline{M}_k=\mathrm{const}.$$

Тогда функциональные уравнения (22) имеют единственное решение, которое на отрезке D_T находится из следующего итерационного процесса:

$$p_k^{n+1}\,(t)=\frac{g_k(t)}{\alpha}f_{k\,p}\big(t,\,p_k^n\,(t)\big),\;k=\overline{1,\,m},\;n=1,2,\ldots.$$

Это решение обозначим так

$$p_k\,(t)=h_k\big(t,\,g_k\,(t)\big),\;k=\overline{1,\,m}. \tag{23}$$

Подставляя (23) в (20), с учетом (21) получаем следующие нелинейные интегральные уравнения Фредгольма второго рода

$$g_k\,(t)+\sum_{k=1}^{m}\int_0^T Q_{2k}(t,\,s)\,f_k\big(s,h_k\big(s,\,g_k\,(s)\big)\big)ds-$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\int_0^T Q_{3k}(t,\,\zeta)\,f_k\big(\zeta,h_k\big(\zeta,\,g_k\,(\zeta)\big)\big)d\zeta=F_k(t),\;k=\overline{1,\,m}. \tag{24}$$

Для произвольной функции $\psi\,(t)\in C(D_T)$ используем следующую евклидову норму

$$\big\|\,\psi\,(t)\,\big\|_C=\max_{t\in D_T}|\,\psi\,(t)\,|.$$

Теорема 2. *Пусть:*

1) *Выполняются условия теоремы* 1 *и условие* (17)*;*

2) $\xi\,(x)\in L_2(D_l)$ *;*

3) $f_k\big(t,h_k\big)\in \mathrm{Bnd}\big(M_{k1}\big)\cap\mathrm{Lip}\big\{N_{k1\,|\,h_k}\big\},\;0<N_{k1},M_{k1}=\mathrm{const}$*;*

4) $h_k\big(t, g_k\big) \in \mathrm{Bnd}\big(M_{k2}\big) \cap \mathrm{Lip}\big\{N_{k2\,|\,g_k}\big\}$, $0 < N_{k2}, M_{k2} = \mathrm{const}$;

5) $\rho = \frac{2}{l}\sum\limits_{k=1}^{m} N_{k2} \sum\limits_{k=1}^{m} N_{k1} \int\limits_0^T \left[M_3^2 + \left\|\frac{1}{\gamma_0}\right\|_{\ell_2} \max_{t\in D_T} M_4(t, \zeta)\right] d\zeta < 1$, *где* $M_3 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \max_{t\in D_T} \big|\, G_i\,(T, t)\big|^2}$, $M_4(t, \zeta) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \big|\, Q_{1i}\,(t, \zeta)\big|^2}$.

Тогда нелинейные интегральные уравнения Фредгольма второго рода (24) *имеют единственное решение, которое может быть найдено из следующего итерационного процесса:*

$$\begin{cases} g_k^1\,(t) + \sum\limits_{k=1}^{m} \int\limits_0^T Q_{2k}(t,\, s)\, f_k\big(s, h_k(s,\, 0)\big) ds - \\ - \sum\limits_{k=1}^{m} \int\limits_0^T Q_{3k}(t,\, \zeta)\, f_k\big(\zeta, h_k(\zeta,\, 0)\big) d\zeta = F_k(t), \\ g_k^{n+1}\,(t) + \sum\limits_{k=1}^{m} \int\limits_0^T Q_{2k}(t,\, s)\, f_k\big(s, h_k\big(s,\, g_k^n\,(s)\big)\big) ds - \\ - \sum\limits_{k=1}^{m} \int\limits_0^T Q_{3k}(t,\, \zeta)\, f_k\big(\zeta, h_k\big(\zeta,\, g_k^n\,(\zeta)\big)\big) d\zeta = F_k(t),\ n = 1, 2, \ldots. \end{cases} \tag{25}$$

Здесь справедлива оценка

$$\left\| g_k^{n+1}\,(t) - g_k\,(t) \right\|_C \le \frac{\rho^{n+1}}{1-\rho} A, \tag{26}$$

где

$$A = \sqrt{\frac{2}{l}} \Big[\|\, \mu\,(T)\,\|_{\ell_2} + \|\, \xi\,\|_{\ell_2}\Big] M_3 + \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{m} M_{k1} \int\limits_0^T \left[M_3^2 + \left\|\frac{1}{\gamma_0}\right\|_{\ell_2} \max_{t\in D_T} M_4(t, \zeta)\right] d\zeta,$$

$$M_3 = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \max_{t\in D_T} \big|\, G_i\,(T,\, t)\big|^2}.$$

Подставляя решения уравнения (24) в (23), определяем управляющие функции $p_k\,(t)$. Если для (23) рассмотрим следующий итерационный процесс

$$p_k^{n+1}\,(t) = h_k\big(t,\, g_k^n\,(t)\big),\ k = \overline{1,\, m},\ n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{27}$$

то для погрешности приближенного вычисления управляющих функций с учетом третьего условия теоремы и оценки (26) получаем, что справедлива оценка

$$\|\, p_k^{n+1}\,(t) - p_k\,(t)\,\|_C \le \frac{\rho^{n+1}}{1-\rho} A \sum_{k=1}^{m} N_{k2}.$$

4. Построение оптимального процесса и вычисление минимального значения функционала

Согласно (12) оптимальный процесс находим по формуле

$$\overline{u}(t,\, x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i\,(x) \left\{ \mu_i\,(t) + \int\limits_0^t G_i\,(t,\, s) \sum_{k=1}^{m} b_i\,\big(\sigma_k\,(s)\big)\, f_k\,\big(s,\, \overline{p}_k\,(s)\big)\, ds - \right.$$

$$-\frac{1}{\gamma_{0i}}\int_0^t G_i(t,s)\,\eta(s)\int_0^T \Theta(\theta)\int_0^\theta G_i(\theta,\zeta)\sum_{k=1}^m b_i\big(\sigma_k(\zeta)\big)f_k\big(\zeta,\overline{p}_k(\zeta)\big)d\zeta\,d\theta\,ds\Bigg\}. \quad (28)$$

Из (7) с учетом (11) определяется оптимальная функция восстановления

$$\overline{\beta}(x)=\sum_{i=1}^\infty b_i(x)\left\{\gamma_{1i}-\frac{1}{\gamma_{0i}}\int_0^T\Theta(t)\int_0^t G_i(t,s)\sum_{k=1}^m b_i\big(\sigma_k(s)\big)f_k\big(s,\overline{p}_k(s)\big)dsdt\right\}. \quad (29)$$

Оптимальный процесс (28) можно приближенно найти с помощью итерационного процесса

$$\overline{u}^n(t,x)=\sum_{i=1}^\infty b_i(x)\Bigg\{\mu_i(t)+\int_0^t G_i(t,s)\sum_{k=1}^m b_i\left(\sigma_k^n(s)\right)f_k\left(s,\overline{p}_k^n(s)\right)ds-$$

$$-\frac{1}{\gamma_{0i}}\int_0^t G_i(t,s)\eta(s)\int_0^T\Theta(\theta)\int_0^\theta G_i(\theta,\zeta)\sum_{k=1}^m b_i\big(\sigma_k^n(\zeta)\big)f_k\big(\zeta,\overline{p}_k^n(\zeta)\big)d\zeta d\theta ds\Bigg\}. \quad (30)$$

Оптимальную функцию восстановления (29) можно приближенно найти с помощью итерационного процесса

$$\overline{\beta}^n(x)=\sum_{i=1}^\infty b_i(x)\times$$

$$\times\left\{\gamma_{1i}-\frac{1}{\gamma_{0i}}\int_0^T\Theta(t)\int_0^t G_i(t,s)\sum_{k=1}^m b_i\big(\sigma_k^n(s)\big)f_k\big(s,\overline{p}_k^n(s)\big)dsdt\right\}. \quad (31)$$

Минимальное значение функционала, согласно формулам (8) и (28) находится из следующей формулы

$$J[\overline{p}_k]=\int_0^l\Bigg\{\sum_{i=1}^\infty b_i(x)\Bigg[\mu_i(t)+\int_0^t G_i(t,s)\sum_{k=1}^m b_i\left(\sigma_k(s)\right)f_k\left(s,\overline{p}_k(s)\right)ds-$$

$$-\frac{1}{\gamma_{0i}}\int_0^t G_i(t,s)\,\eta(s)\int_0^T\Theta(\theta)\int_0^\theta G_i(\theta,\zeta)\sum_{k=1}^m b_i\big(\sigma_k(\zeta)\big)f_k\big(\zeta,\overline{p}_k(\zeta)\big)d\zeta\,d\theta\,ds\Bigg]\Bigg\}^2 dy+$$

$$+\alpha\sum_{k=1}^m\int_0^T\overline{p}_k^2(t)\,dt. \quad (32)$$

Из теории нелинейных дифференциальных уравнений (см., напр. работу [19]), в частности, следует, что задача Коши (5) при выполнении условия

$$q_k\big(t,\sigma_k\big)\in\mathrm{Bnd}\big(\overline{M}_{k4}\big)\cap\mathrm{Lip}\big\{N_{k3\,|\,\sigma_k}\big\},\ 0<N_{k3},\overline{M}_{k4}=\mathrm{const},\ k=\overline{1,\,m}$$

имеет единственное решение $\sigma_k(t)\in C(D_T),\ k=\overline{1,\,m}.$

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы* 2. *Тогда функционал* (32) *принимает конечное значение.*

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 1, которое приведено в приложении.

Приближенное значение функционала вычисляется по следующему итерационному процессу

$$J[\overline{p}_k^n] = \int_0^l \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} b_i(x) \left[\mu_i(t) + \int_0^t G_i(t,s) \sum_{k=1}^m b_i\left(\sigma_k^n(s)\right) f_k\left(s, \overline{p}_k^n(s)\right) ds - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{\gamma_{0i}} \int_0^t G_i(t,s)\,\eta(s) \int_0^T \Theta(\theta) \int_0^\theta G_i(\theta,\zeta) \sum_{k=1}^m b_i\big(\sigma_k^n(\zeta)\big) f_k\big(\zeta, \overline{p}_k^n(\zeta)\big) d\zeta\, d\theta\, ds \right] \right\}^2 dy +$$

$$+\alpha \sum_{k=1}^m \int_0^T \overline{p}_k^2(t)\,dt, \; n = 1, 2, \ldots, \tag{33}$$

где функции $\sigma_k(t) \in C(D_T)$, $k = \overline{1, m}$ определяются из итерационного процесса

$$\sigma_k^{n+1}(t) = \sigma_k^0 + \int_0^t q_k\Big(s, \sigma_k^n(s)\Big) ds, \; k = \overline{1, m}, \; n = 1, 2, \ldots \tag{34}$$

Заключение

В работе предлагается методика решения одной точечной подвижной задачи нелинейного оптимального управления в обратной задаче для системы с параболическим и обыкновенным дифференциальными уравнениями при смешанных, начальном и нелокальном интегральном условиях. Используется метод Фурье разделения переменных. Сначала определяется формальное решение смешанной задачи (1)–(3). С помощью дополнительного условия (4) для фиксированных значений управляющих функций восстанавливается функция $\beta(x)$. При фиксированных значениях управляющих функций получается формула (12), которая определяет единственное обобщенное решение смешанной задачи (1)–(3). На основе принципа максимума формулируются необходимые условия оптимальности управлений при квадратичных критериях (8). Доказывается однозначная разрешимость оптимальных управлений. При этом используется метод последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающих отображений. Получаются формула для приближенного вычисления подвижных оптимальных управлений и оценка для допускаемой погрешности по оптимальным управлениям. Приводятся формулы для приближенного вычисления оптимального процесса, функции восстановления и минимального значения функционала. При этом используются итерационные процессы (25), (27), (30), (31), (33) и (34). Полученные результаты могут найти дальнейшее применение в развитии математической теории обратных задач нелинейного оптимального управления системами с распределенными параметрами при наличии подвижных источников.

Приложения

1. *Доказательство теоремы* 1. В интеграл $\Im=\int_0^T\int_0^l u^2(t,\,y)\,dy\,dt$ подставляем формулу (9) и ее возведем в квадрат

$$\Im=\int_0^T\int_0^l\left\{\sum_{i=1}^{\infty}b_i\,(y)\;\left[\omega_i\,(t)+\int_0^t G_i\,(t,\,s)\Big(\eta\,(s)\,\beta_i+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{k=1}^{m}b_i\big(\sigma_k\,(s)\big)\,f_k\big(s,\,p_k\,(s)\big)\Big)\,ds\right]\right\}^2 dy\,dt=$$

$$\int_0^T\int_0^l\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\omega_i\,(t)\,b_i\,(y)\right\}^2 dy\,dt+$$

$$+2\int_0^T\int_0^l\sum_{i=1}^{\infty}\omega_i\,(t)\,b_i\,(y)\,\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^t G_i\,(t,\,s)\,\Big(\eta\,(s)\,\beta_i+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}b_i\big(\sigma_k\,(s)\big)\,f_k\big(s,\,p_k\,(s)\big)\Big)ds\,b_i\,(y)\,dy\,dt+$$

$$+\int_0^T\int_0^l\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^t G_i(t,s)\Big(\eta\,(s)\,\beta_i+\sum_{k=1}^{m}b_i\big(\sigma_k\,(s)\big)f_k\big(s,p_k(s)\big)\Big)ds\,b_i(y)\right\}^2 dydt.$$

Используем неравенства Гельдера

$$\Im\le\int_0^T\sum_{i=1}^{\infty}\big|\,\omega_i\,(t)\,\big|^2dt\int_0^l\sum_{i=1}^{\infty}\big|\,b_i\,(y)\,\big|^2dy+2\int_0^l\sum_{i=1}^{\infty}\big|\,b_i\,(y)\,\big|^2dy\int_0^T\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\big|\,\omega_i\,(t)\,\big|^2}\times$$

$$\times\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\left|\int_0^t G_i(t,s)\Big(\eta\,(s)\,\beta_i+\sum_{k=1}^{m}b_i\big(\sigma_k\,(s)\big)f_k\big(s,p_k(s)\big)\Big)ds\right|^2}\,dt+$$

$$+\int_0^l\sum_{i=1}^{\infty}\big|\,b_i\,(y)\,\big|^2dy\times$$

$$\times\int_0^T\sum_{i=1}^{\infty}\left|\int_0^t G_i(t,s)\Big(\eta\,(s)\,\beta_i+\sum_{k=1}^{m}b_i\big(\sigma_k\,(s)\big)f_k\big(s,p_k(s)\big)\Big)ds\right|^2dt.$$

Далее с учетом ортонормированности функций $b_i(x)$, получаем

$$\Im \leq \int\limits_0^T \sum_{i=1}^{\infty} \left| \omega_i(t) \right|^2 dt + 2 \int\limits_0^T \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \left| \omega_i(t) \right|^2} \times$$

$$\times \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \left| \int\limits_0^t G_i(t,s) \Big(\eta(s) \beta_i + \sum_{k=1}^{m} b_i(\sigma_k(s)) f_k(s, p_k(s)) \Big) ds \right|^2} dt +$$

$$+ \int\limits_0^T \sum_{i=1}^{\infty} \left| \int\limits_0^t G_i(t,s) \Big(\eta(s) \beta_i + \sum_{k=1}^{m} b_i(\sigma_k(s)) f_k(s, p_k(s)) \Big) ds \right|^2 dt.$$

С учетом условия (10) и того, что $\left| b_i(\sigma_k(t)) \right| \leq \sqrt{\dfrac{2}{l}}$, применяем неравенство Минковского

$$\Im \leq M_1 T + 2 M_1 T \Big(\left\| \eta(t) \right\|_C \left\| \beta \right\|_{\ell_2} T + \sqrt{\frac{2}{l}} M_0 M_2 \Big) +$$

$$+ \left\| \eta(t) \right\|_C^2 \left\| \beta \right\|_{\ell_2}^2 T^3 + \frac{2T}{l} M_0^2 M_2^2 < \infty,$$

где $M_0 = \sum\limits_{k=1}^{m} M_k^0$, $M_1 = \left\| \omega(t) \right\|_{B_2(T)} \leq \left\| \varphi \right\|_{\ell_2}$,

$$M_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \max_{t \in D_T} \left| \int\limits_0^t G_i(t,s)\, ds \right|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2}} = \frac{l}{\pi} \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}} \leq \frac{\sqrt{2}\, l}{\pi}.$$

Отсюда следует утверждение теоремы 1.

2. *Доказательство теоремы* 2. Сначала заметим, что следующие функции ограничены

$$\left| Q_{2k}(t,\, s) \right| \leq \left| \sum_{i=1}^{\infty} G_i(T,\, t)\, G_i(T,\, s)\, b_i^2(\sigma_k(s)) \right| \leq$$

$$\leq \frac{2}{l} \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \left| G_i^2(T,t) \right|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \left| G_i^2(T,s) \right|^2} \leq \frac{2}{l} M_3^2 < \infty,$$

$$\left| Q_{3k}(t,\, \zeta) \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\gamma_{0i}} \right| \left| Q_{1i}(t,\zeta) \right| \left| b_i^2(\sigma_k(\zeta)) \right| \leq \frac{2 M_4(t,\, \zeta)}{l} \left\| \frac{1}{\gamma_{0i}} \right\|_{\ell_2} < \infty,$$

$$\left| F_k(t) \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left| \big(\mu_i(T) + \xi_i \big) G_i(T,\, t)\, b_i(\sigma_k(t)) \right| \leq$$

$$\leq \sqrt{\frac{2}{l}} \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \left| \mu_i(T) + \xi_i \right|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \left| G_i(T,\, t) \right|^2} \leq \sqrt{\frac{2}{l}} \Big(\left\| \mu(T) \right\|_{\ell_2} + \left\| \xi \right\|_{\ell_2} \Big) M_3 < \infty,$$

где

$$M_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \max_{t\in D_T} \left| G_i(T,t) \right|^2},\ M_4(t,\zeta) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \left| Q_{1i}(t,\zeta) \right|^2}.$$

В силу условий теоремы из (24) получаем следующие оценки

$$\left\| g_i^1(t) \right\|_C \le \left\| F_k(t) + \sum_{k=1}^{m} \int_0^T Q_{2k}(t,s)\, f_k\big(s, h_k(s,0)\big) ds - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{m} \int_0^T Q_{3k}(t,s)\, f_k\big(s, h_k(s,0)\big) ds \right\|_C \le A, \tag{35}$$

где

$$A = \sqrt{\frac{2}{l}} \Big[\left\| \mu(T) \right\|_{\ell_2} + \left\| \xi \right\|_{\ell_2} \Big] M_3 + \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{m} M_{k1} \int_0^T \left[M_3^2 + \left\| \frac{1}{\gamma_0} \right\|_{\ell_2} \max_{t\in D_T} M_4(t,s) \right] ds;$$

$$\left\| g_k^{n+1}(t) - g_k^n(t) \right\|_C \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{m} \max_{t\in D_T} \int_0^T \left| Q_{2k}(t,s) \right| \left\| f_k\big(s, h_k\big(s, g_k^n(s)\big)\big) - f_k\big(s, h_k\big(s, g_k^{n-1}(s)\big)\big) \right\|_C ds +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \max_{t\in D_T} \int_0^T \left| Q_{3k}(t,\zeta) \right| \left\| f_k\big(\zeta, h_k\big(\zeta, g_k^n(\zeta)\big)\big) - f_k\big(\zeta, h_k\big(\zeta, g_k^{n-1}(\zeta)\big)\big) \right\|_C d\zeta \le$$

$$\le \left\| h_k\big(t, g_k^n(t)\big) - h_k\big(t, g_k^{n-1}(t)\big) \right\|_C \times$$

$$\times \frac{2}{l} \sum_{k=1}^{m} N_{k1} \int_0^T \left[M_3^2 + \left\| \frac{1}{\gamma_0} \right\|_{\ell_2} \max_{t\in D_T} M_4(t,s) \right] ds \le \rho \left\| g_k^n(t) - g_k^{n-1}(t) \right\|_C. \tag{36}$$

Из оценок (35) и (36) следует, что нелинейные интегральные уравнения Фредгольма второго рода (24) имеют единственное решение $g_k(t) \in C(D_T)$, $k = \overline{1, m}$. Теорема 2 доказана.

Список литературы

[1] Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. 474 с.

[2] Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432 с.

[3] Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978. 464 с.

[4] Керимбеков А. Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: Дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. Бишкек: Институт математики НАН Кыргызской Республики, 2003. 224 с.

[5] Лионс Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 412 с.

[6] Лурье К.А. Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Наука, 1975. 480 с.

[7] Рапопорт Э.Я. Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. М.: Высшая школа, 2009. 680 с.

[8] Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973. 448 с.

[9] Миллер Б.М., Рубинович Е.Я. Разрывные решения в задачах оптимального управления и их представление с помощью сингулярных пространственно-временных преобразований // Автоматика и телемеханика. 2013. № 12. С. 56–103.

[10] Срочко В.А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. М.: Физматлит, 2000. 160 с.

[11] Тятюшкин А.И. Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем. Новосибирск: СО Наука, 1992. 193 с.

[12] Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с.

[13] Юлдашев Т.К. Приближенное решение нелинейного параболического и обыкновенного дифференциального уравнений и приближенный расчет функционала качества при известных управляющих воздействиях // Проблемы управления. 2014. № 4. С. 2–8.

[14] Юлдашев Т.К. О построении приближений для оптимального управления в квазилинейных уравнениях с частными производными первого порядка // Математическая теория игр и ее приложения. 2014. Т. 6, № 3. С. 105–119.

[15] Юлдашев Т.К. Приближенное решение системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра с максимумами и приближенное вычисление функционала качества // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. 2015. № 2. С. 13–20.

[16] Бутковский А.Г., Пустыльников Л.М. Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1980. 384 с.

[17] Юлдашев Т.К. Нелинейная задача оптимального управления для одной системы с параболическим уравнением при наличии нескольких подвижных источников // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М.Ф. Решетнева. 2016. Т. 17, № 1. С. 103–109.

[18] Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы. М.: Высшая школа, 1989. 263 с.

[19] Юлдашев Т.К. Развитие теории нелинейных дифференциальных уравнений с максимумами: Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Бишкек: Институт математики НАН Кыргызской Республики, 1993. 15 с.

Библиографическая ссылка

Юлдашев Т.К. Нелинейное оптимальное управление в обратной задаче для одной системы с параболическим уравнением // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 2. С. 59–78.

Сведения об авторах

1. **Юлдашев Турсун Камалдинович**
доцент кафедры высшей математики Сибирского государственного университета науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева.

Россия, 660014, г. Красноярск, проспект имени газеты Красноярский рабочий, 31, СибГУ им. М.Ф. Решетнева. E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com.

A NONLINEAR OPTIMAL CONTROL IN INVERSE PROBLEM FOR A SYSTEM WITH PARABOLIC EQUATION

Yuldashev Tursun Kamaldinovich
Associate professor at Higher Mathematics department,
Reshetnev Siberian State University of Science and Technology
Russia, 660014, Krasnoyarsk, Prospekt Krasnoyarskiy rabochiy, 31, SibSU.
E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

Received 22.12.2016, revised 09.06.2017.

It is studied the questions of solvability of the nonlinear dot mobile point problem of nonlinear optimal control in inverse problem for a system with parabolic and ordinary differential equations in the case of presence of several dot mobile sources. Parabolic equation is considered with mixed value and nonlocal integral conditions, while ordinary differential equation is considered with initial value condition. It is formulated the necessary conditions for nonlinear optimal control. Determination of the optimal control function is reduced to the complex functional-integral equation, the solving process of which is composed of solutions of two different equations: nonlinear functional equations and nonlinear integral equations. It is obtained the formulas for approximation calculating the state function, restore function and dot mobile nonlinear optimal control and the estimate for the permissible error with respect to optimal control.

Keywords: parabolic equation, dot mobile point problem, inverse problem, nonlinearity of control, functional minimization.

Bibliographic citation

Yuldashev T.K. A nonlinear optimal control in inverse problem for a system with parabolic equation. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2017, no. 2, pp. 59–78. (in Russian)

References

[1] Butkovskiy A.G. *Teoriya Optimal'nogo Upravleniya Sistemami s Raspredelyonnymi Parametrami* [The Theory of Optimal Control of Systems with Distributed Parameters]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 474 p. (in Russian)

[2] Evtushenko Yu.G. *Metody Resheniya Ekstremal'nyh Zadach i ih Primeneniye v Sistemah Optimizatsii* [Methods for Solving Extremal Problems and their Application in Optimization Systems]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 432 p. (in Russian)

[3] Egorov A.I. *Optimal'noye Upravleniye Teplovymi i Diffuzionnymi Protsessami* [Optimal Control of Thermal and Diffusion Processes]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 464 p. (in Russian)

[4] Kerimbekov A. *Nelineynoye Optimal'noye Upravleniye Lineynymi Sistemami s Raspredelyonnymi Parametrami* [Nonlinear Optimal Control of Linear Systems with Distributed Parameters]. Doctoral dissertation. Inistitut matematiki NAN Kyrgyzskoy Respubliki, Bishkek, 2003. (in Russian)

[5] Lions J.L. *Optimal'noye Upravleniye Sistemami, Opisyvayemymi Uravneniyami s Chastnymi Proizvodnymi* [Optimal Control of Systems Described by Partial Differential Equations]. Moscow, Mir Publ., 1972. 412 p. (in Russian)

[6] Lur'ye K.A. *Optimal'noye Upravleniye v Zadachah Matemsaticheskoy Fiziki* [Optimal Control in the Problems of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 480 p. (in Russian)

[7] Rapoport E.Ya. *Optimal'noye Upravleniye Sistemami s Raspredelyonnymi Parametrami* [Optimal Control of Systems with Distributed Parameter]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2009. 680 p. (in Russian)

[8] Krotov V.F., Gurman V.I. *Metody i Zadachi Optimal'nogo Upravleniya* [Methods and Problems of Optimal Control]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 448 p. (in Russian)

[9] Miller B.M., Rubinovich E.Ya. Discontinuous solutions in the optimal control problems and their representation by singular space-time transformations. *Automation and Remote Control*, 2013, vol. 74(12), pp. 1969–2006.

[10] Srochko V.A. *Iteratsionnye Metody Resheniya Zadach Optimal'nogo Upravleniya* [Iterative Methods for Solving Optimal Control Problems]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2000. 160 p. (in Russian)

[11] Tyatyushkin A.I. *Chislennye Metody i Programmnye Sredstva Optimizathii Upravlyaemykh Sistem* [Numerical Methods and Software for Optimization of Control Systems]. Novosibirsk, SO Nauka Publ., 1992. 193 p. (in Russian)

[12] Fedorenko R.P. *Priblijyonnoye Resheniye Zadach Optimal'nogo Upravleniya* [Approximate Solution of Optimal Control Problems]. Moscow, Nauka, 1978. 488 p. (in Russian)

[13] Yuldashev T.K. Approximate solution of nonlinear parabolic and ordinary differential equations and an approximate calculation of the functionality of quality at known operating influences. *Problemy Upravleniya* [Control Sciences], 2014, no. 4, pp. 2–8. (in Russian)

[14] Yuldashev T.K. On an optimal control in quazilinear partial differential equations of the first order. *Matematicheskaya Teoriya Igr i eyo Prilozheniya* [Mathematical Theory of Games and its Applications], 2014, vol. 6(3), pp. 105–119. (in Russian)

[15] Yuldashev T.K. Approximation solving the system of nonlinear Volterra integral equation with maxima and approximation calculation the quality functional.

Vestnik VoronezhGU. Seriya: Sistemnyi Analiz i Informatsionnyie Tekhnologii [Bulletin of Voronezh State University. Series: System Analysis and Information Technology], 2015, no. 2, pp. 13–20. (in Russian)

[16] Butkovskiy A.G., Pustyl'nikov L.M. *Teoriya Podvizhnogo Upravleniya Sistemami s Raspredelyonnymi Parametrami* [The Theory of the Mobile Control of Systems with Distributed Parameters]. Moscow, Nauka Publ., 1980. 384 p. (in Russian)

[17] Yuldashev T.K. A nonlinear optimal control problem for a system with a parabolic equation in the presence of several moving sources. *Vestnik Sibirskogo Gosudarstvennogo Aerokosmicheskogo Universiteta* [Bulletin of the Siberian State Aerospace University], 2016, vol. 17(1), pp. 103–109. (in Russian)

[18] Alexandrov A.G. *Optimal'nye i Adaptivnye Systemy* [Optimal and Adaptive Systems]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1989. 263 p. (in Russian)

[19] Yuldashev T.K. *Razvitie Teorii Nelineynyh Differentsialnyh Uravneniy s Maksimumami* [Development of the Theory of Nonlinear Differential Equations with Maxima]. PhD Tesis. Bishkek, Institut matematiki NAN Kyrgyzskoy Respubliki, 1993. 121 p. (in Russian)