УДК 519.6

МНОГОШАГОВОЕ ОБОБЩЕНИЕ МОДЕЛИ «НАПАДЕНИЕ-ОБОРОНА»

Перевозчиков А.Г.*, **Решетов В.Ю.****, **Лесик А.И.*****
* НПО «РусБИТех», г. Тверь
** МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва
*** Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 20.03.2017, после переработки 10.06.2017.

Рассматривается многошаговое обобщение модели «нападение-оборона», определенной и изученной Ю.Б. Гермейером. Она является модификацией модели О.Гросса. Сходная модель была предложена В.А.Гореликом для производства бензина. Предлагается простейшее многошаговое расширение модели «нападение-оборона», состоящее в том, что соответствующая игра разыгрывается многократно до достижения одной из сторон заданного уровня потерь (истощения) несовместимого с дальнейшим продолжением конфликта. Предполагается, что условия информированности сторон на каждом шаге остаются прежними и резервы не вводятся по ходу конфликта. Показано, что в этих предположениях многошаговая игровая модель сводится к дискретной модели Осипова-Ланчестера, имеющей решение в виде линейной функции двух геометрических прогрессий с кусочно-постоянными коэффициентами и знаменателями прогрессий.

Ключевые слова: игра «нападение-оборона», гарантированный результат нападения, минимаксная стратегия обороны, гарантированный результат обороны, значение игры, оптимальная смешанная стратегия нападения, оптимальная чистая стратегия защиты, простейшее многошаговое расширение игры.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 2. С. 89–100.

Введение

Рассматривается многошаговое обобщение игры «нападение-оборона», определенной и изученной Ю.Б. Гермейером в работе [2]. Она является модификацией модели О.Гросса [1] и является основой для наших дальнейших построений. Сходная модель была предложена В.А.Гореликом для производства бензина [3]. В работе [16] исследована игровая модель, обобщающая модели Гросса и Гермейера. В военных моделях пункты интерпретируются обычно как направления и характеризуют пространственное распределение ресурсов защиты по ширине фронта обороны. Реально имеет место также многошаговое продолжение конфликта в виде последовательности ударов, наносимых до достижения достаточного уровня потерь одной из сторон (истощения), не совместимого с продолжением конфликта. Таким образом, изучение динамики изменения численности сторон в многошаговом конфликте, описываемом игрой «нападение-оборона», является актуальной задачей и позволяет обобщить модель «нападение-оборона» в части учета многошагового характера конфликта. Предполагается, что условия информированности сторон на каждом шаге остаются прежними и резервы не вводятся по ходу конфликта. Показано, что в этих предположениях многошаговая игровая модель сводится к дискретной модели Осипова-Ланчестера, имеющей решение в виде линейной функции двух геометрических прогрессий с кусочно-постоянными коэффициентами и знаменателями прогрессий.

Непрерывные и дискретные постановки основных задач распределения ресурсов систематически изложены в [5], в частности принцип уравнивания Ю.Б. Гермейера, на котором основано вычисление гарантированного результата обороны, являющегося значением игры «нападение-оборона». В работе [6] изучалась модель Гросса с непротивоположными интересами сторон, в работах [7,8] – гарантированный результат защиты с произвольными выпуклыми аддитивными функциями выигрыша в условиях целочисленности переменных, в работах [9,10] - динамические расширения модели. В работе [11] изучалась простейшая модель многоуровневой системы защиты на заданном направлении. В работе [12] дополнительно учитывались вероятности воздействия на каждом уровне защиты, определяемые формулой Эрланга. В работе [13] эти результаты получают дальнейшее развитие в части учета предварительного подавления средств защиты нападением. В работе [14] были определены и изучены различные обобщения игры «нападение-оборона» на орграфах с одним источником и стоком, которые определяют возможные пути подхода к обороняемому объекту. В работе [15] результаты [11] переносятся на общую модель многоуровневой системы защиты, учитывающей возможность использования этих средств на том или ином уровне защиты.

1. Базовая игра «нападение-оборона»

В [2] изучалась базовая для наших построений игра «нападение-оборона», которую можно сформулировать следующим образом. Пусть P_i – вероятность поражения одного средства нападения одним средством обороны на i-м направлении, $i = 1, ..., n$. Требуется решить антагонистическую игру с функцией выигрыша нападения, представляющей собой общее количество прорвавшихся средств нападения:

$$f(X, U) = \sum_{i=1}^{n} \max\{0, X_i - P_i U_i\}. \tag{1}$$

Пусть V и Y – количества средств нападения и защиты. Стратегия обороны состоит в распределении своих средств по направлениям защиты в соответствии с вектором:

$$U = (U_1, ..., U_n) \in A = \{U| \sum_{i=1}^{n} U_i = V, U_i \geqslant 0, i = 1, ..., n\}. \tag{2}$$

Стратегия нападения состоит в распределении своих средств по направлениям в соответствии с вектором:

$$X = (X_1, ..., X_n) \in B = \{\, X | \sum_{t=1}^{n} X_i = Y, X_i \geqslant 0, i = 1, ..., n\} . \tag{3}$$

Используя выпуклость функции $f(X, U)$ по U, для этой антагонистической игры было доказано, в частности (см., например, [4]), что минимакс:

$$v = \min_{U \in A} \max_{X \in B} f(X, U) = \min_{U \in A} \max_{i=1,\dots,n} f\left(X^{(i)}, U\right) \tag{4}$$

будет значением игры и минимаксная стратегия обороны оптимальна. Здесь $X^{(i)} = (0, ..., X, ...0)$, где X стоит на i-м месте, а остальные координаты равны нулю. При этом оптимальной стратегией нападения является смешанная стратегия, состоящая в том, чтобы сосредоточить все силы на одном направлении в соответствии с оптимальным распределением вероятностей, которое может быть получено по формулам, также приведенным в [4]. Эти формулы потребуются для дальнейшего изложения, поэтому приведем их полностью.

Минимаксная стратегия, являющаяся оптимальной чистой стратегией обороны, находится по формуле

$$U_i* = \frac{V}{P_i \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{P_i}}, i = 1, 2, ..., n. \tag{5}$$

Соответствующий наилучший гарантированный результат обороны равен

$$v = \max\left(0; Y - V\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P_i}\right)^{-1}\right) \tag{6}$$

и является значением игры.

Рассмотрим смешанные стратегии нападения вида

$$\phi_0 = \sum_{i=1}^{n} p_i^0 I_{X^{(i)}}, \sum_{i=1}^{n} p_i^0 = 1, p_i^0 \geqslant 0, i = 1, 2, ..., n,$$

где $I_{X_{(i)}}$ – вероятностная мера, сосредоточенная в точке $X^{(i)}$. Тогда оптимальной является стратегия ϕ_0, когда p_i^0 определяются по формуле

$$p_i^0 = \frac{1}{P_i}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P_i}\right)^{-1}, i = 1, 2, ..., n. \tag{7}$$

2. Простейшая многошаговая модель «нападение-оборона»

Обозначим через Y_t, V_t средние количества средств сторон на конец t-го удара, который моделируется разыгрыванием базовой игры «нападение-оборона». Тогда из уравнения (6) следует такое уравнение для величины Y_t при отсутствии резервов

$$\Delta Y_t = Y_{t+1} - Y_t = -\min\left(Y_t; V_t\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{P_i}\right)^{-1}\right), t = 0, 1, ..., Y_0 = Y. \qquad (8)$$

Для получения уравнения для величины V_t рассмотрим i-е направление, $i = 1, ..., n$. Пусть R_i – вероятность поражения одного средства обороны одним средством нападения на i-м направлении, $i = 1, ..., n$. По аналогии с (8) можно предположить, что потери составят в соответствие с формулой (5)

$$\Delta V_t^i = -\min\left(R_i Y_t; \frac{V_t}{P_i}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{P_i}\right)^{-1}\right). \qquad (9)$$

Теперь общие потери можно найти как математическое ожидание (9) с учетом вероятностного распределения (7)

$$\Delta V_t = V_{t+1} - V_t = -\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{P_i}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{P_i}\right)^{-1}\min\left(R_i Y_t; \frac{V_t}{P_i}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{P_i}\right)^{-1}\right). \qquad (10)$$

Легко видеть, что справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Уравнение (10) можно преобразовать к виду*

$$\Delta V_t = V_{t+1} - V_t = -c_t Y_t - d_t V_t, t = 0, 1, ..., V_0 = V, \qquad (11)$$

где c_t, d_t*–некоторые константы,* $0 < c_t < 1, 0 < d_t < 1$.

Уравнение (8) может быть записано в виде

$$\Delta Y_t = Y_{t+1} - Y_t = \begin{cases} -Y_t,\ Y_t \leqslant V_t\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{P_i}\right)^{-1}, t = 0, 1, ..., Y_0 = Y, \\ -V_t\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{P_i}\right)^{-1},\ Y_t > V_t\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{P_i}\right)^{-1}, t = 0, 1, ..., Y_0 = Y. \end{cases} \qquad (12)$$

Пусть $[t_0, t_1] = \{t_0, ..., t_1\}$, а $e = (\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{P_i})^{-1} < 1$. Рассмотрим два случая.

Если для какого-то момента $t = T$ имеет место первый случай в (12), то

$$Y_t \equiv 0, t \in [T + 1, \infty). \qquad (13)$$

Из уравнения (10) имеем $\Delta V_t = V_{t+1} - V_t = 0, t = t = T + 1, ...$, откуда следует, что $V_t = V_{t_0+1}, t = T + 1, ...$, и конфликт заканчивается исчерпанием сил нападения.

Таким образом, по определению T, систему (8), (10) можно записать в виде

$$\begin{cases} \Delta Y_t = -eV_t, \\ \Delta V_t = -c_t Y_t - d_t V_t, \end{cases} \qquad (14)$$
$$t = 0, 1, ..., T - 1,$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} Y_0 = Y, \\ V_0 = V. \end{cases} \tag{15}$$

Система (14)-(15) может рассматриваться как обобщенная дискретная модель Осипова-Ланчестера с переменными коэффициентами. Обобщение состоит в том, что правая часть второго уравнения зависит не только от численности противника, но и от текущей численности нападения.

3. Исследование простейшей многошаговой модели

Беря приращение левой и правой части второго уравнения в (14), получим равенство

$$\Delta^2 V_t = \Delta V_{t+1} - \Delta V_t = -c_t \Delta Y_t - d_t \Delta V_t. \tag{16}$$

Подставляя в полученное уравнение выражение для ΔY_t из первого уравнения, получим после преобразования

$$V_{t+2} = (2 - d_t) V_{t+1} + (c_t e + d_t) V_t. \tag{17}$$

Заметим, что в силу утверждения леммы 1 оба коэффициента $C_t = 1 - d_t$, $D_t = c_t e + d_t$ в правой части положительны. Разобьем отрезок $[0, T-1]$ на непересекающиеся интервалы постоянства коэффициентов в правой части (16). В частности, на одном отрезке $[t_0, t_1 - 1] \subseteq [0, T-1]$, где $c_t = c_{t_0}, d_t = d_{t_0}$, получаем дискретное линейное однородное уравнение

$$V_{t+2} = (2 - d_{t_0}) V_{t+1} + (c_{t_0} e + d_{t_0}) V_t, t = t_0, ..., t_1 - 1 \tag{18}$$

с начальными условиями V_{t_0}, V_{t_0+1}.

Характеристическое уравнение

$$q^2 - C_{t_0} q - D_{t_0} = 0$$

имеет два различных решения

$$q_{1,2} = q_{1,2}^{t_0} = \frac{C_{t_0} \pm \sqrt{C_{t_0}^2 + 4D_{t_0}}}{2}.$$

Известно, что в этом случае уравнение (18) имеет общее решение вида

$$V_t = A q_1^t + B q_2^t, t = t_0, ..., t_1 + 1.$$

Величины $A = A_{t_0}, B = B_{t_0}$ находятся из начальных условий V_{t_0}, V_{t_0+1} по известным формулам

$$A = A_{t_0} = \frac{V_{t_0} (q_2^{t_0})^2 - V_{t_0+1} q_2^{t_0}}{q_1^{t_0} q_2^{t_0} \left(q_2^{t_0} - q_1^{t_0}\right)},\ B = B_{t_0} = \frac{V_{t_0+1} q_1^{t_0} - V_{t_0} (q_1^{t_0})^2}{q_1^{t_0} q_2^{t_0} \left(q_2^{t_0} - q_1^{t_0}\right)}.$$

Подставляя полученное решение в первое уравнение (14), получим

$$\Delta Y_t = -e V_t = -e(A q_1^t + B q_2^t), t = t_0, ..., t_1 - 1.$$

Откуда следует, что

$$Y_t = Y_{t_0} - e\sum_{t=t_0}^{t_1-1}(Aq_1^t + Bq_2^t), t = t_0, ..., t_1 - 1,$$

или после преобразований

$$Y_t = Y_{t_0} - e(A\frac{q_1^t - q_1^{t_0}}{q_1 - 1} + B\frac{q_2^t - q_2^{t_0}}{q_2 - 1}), t = t_0, ..., t_1 - 1.$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Решение обобщенной система (14), (15) Осипова-Ланчестера с переменными коэффициентами представляет собой линейную функцию двух геометрических прогрессий с кусочно-постоянными коэффициентами и основаниями.*

Замечание 1. Известно, что в непрерывном случае уравнения Осипова-Ланчестера имеют решение в виде линейной комбинации двух волн в виде экспонент. Таким образом, полученное решение можно считать дискретным аналогом аффинной комбинации двух волн. Причем экспонентам соответствуют геометрические прогрессии.

4. Возможные обобщения модели

Уравнение (12) в общем случае $t \in [0, \infty)$ можно представить в виде

$$\Delta Y_t = -g_t Y_t - e_t V_t.$$

С учетом этого обстоятельства система (14) приобретает симметричный вид

$$\begin{cases} \Delta Y_t = -g_t Y_t - e_t V_t, \\ \Delta V_t = -c_t Y_t - d_t V_t, \end{cases} \\ t = 0, 1, ... \tag{19}$$

В частности, на одном отрезке $[t_0, t_1 - 1] \subseteq [0, \infty)$, где $c_t = c_{t_0}$, $d_t = d_{t_0}$, $g_t = g_{t_0}$, $e_t = e_{t_0}$, получаем дискретную линейную однородную систему. Обозначим через $A_t = A_{t_0}$ соответствующую матрицу правых частей системы (19). Характеристическое уравнение имеет вид

$$|\lambda E - A_{t_0}| = \begin{vmatrix} (\lambda + g_{t_0}) \, e_{t_0} \\ c_{t_0} \ \ (\lambda + d_{t_0}) \end{vmatrix} = 0 \tag{20}$$

и имеет два различных действительных решения

$$\lambda_{1,2} = \lambda_{1,2}^{t_0} = \frac{-(g_{t_0} + d_{t_0}) \pm \sqrt{(g_{t_0} + d_{t_0})^2 + 4c_{t_0}e_{t_0}}}{2}.$$

Известно, что в этом случае уравнение (19) имеет общее решение вида

$$V_t = A\lambda_1^t + B\lambda_2^t, t = t_0, ..., t_1 + 1.$$

Величины $A = A_{t_0}, B = B_{t_0}$ находятся из начальных условий V_{t_0}, V_{t_0+1}.

Теорема 2. *Решение обобщенной системы (19) Осипова-Ланчестера с переменными коэффициентами представляет собой линейную функцию двух геометрических прогрессий с кусочно-постоянными коэффициентами и основаниями.*

Учтем теперь возможное пополнение сил сторон в ходе многошагового конфликта. Предположим, что резерв нападения (обороны) на t-м шаге составляет $\alpha_t Y_t (\beta_t V_t)$, тогда уравнения (19) принимают вид

$$\begin{cases} \Delta Y_t = (\alpha_t - g_t) Y_t - e_t V_t, \\ \Delta V_t = -c_t Y_t + (\beta_t - d_t) V_t, \end{cases} \\ t = 0, 1, ..., \tag{21}$$

т.е. сводятся к уравнениям типа (19) но со скорректированными коэффициентами.

Таким образом, при $g'_t = g_t - \alpha_t > 0, d'_t = d_t - \beta_t > 0$ теорема 2 остается справедливой. Наконец, при двустороннем конфликте можно рассматривать двойную систему (21)

$$\begin{cases} \Delta Y_t^A = -g'_t Y_t^A - e_t V_t^B, \\ \Delta V_t^B = -c_t Y_t^A - d'_t V_t^B, \end{cases} \begin{cases} \Delta Y_t^B = -g'_t Y_t^B - e_t V_t^A, \\ \Delta V_t^A = -c_t Y_t^B - d'_t V_t^A, \end{cases} \\ t = 0, 1, ..., \tag{22}$$

где индексы A, B относятся к соответствующим сторонам двустороннего конфликта.

Учтем теперь возможное воздействие ударных сил друг по другу в ходе многошагового конфликта. Предположим, что дополнительные потери ударных сил условно «нападения» A («обороны» B) на t-м шаге составляют $-\delta_t^B Y_t^B (\delta_t^A Y_t^A)$. Тогда уравнения (22) принимают вид

$$\begin{cases} \Delta Y_t^A = -{g'}_t^A Y_t^A - e_t^B V_t^B - \delta_t^B Y_t^B, \\ \Delta V_t^B = -c_t^A Y_t^A - {d'}_t^B V_t^B, \end{cases} \begin{cases} \Delta Y_t^B = -{g'}_t^B Y_t^B - e_t^A V_t^A - \delta_t^A Y_t^A, \\ \Delta V_t^A = -c_t^B Y_t^B - {d'}_t^A V_t^A, \end{cases} \\ t = 0, 1, ..., \tag{23}$$

т.е. являются однородной системой, но вдвое большей размерности, что позволяет распространить нашу теорию на этот случай.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$|\lambda E - A_{t_0}| = \left| \begin{array}{l} (\lambda + g_{t_0}^A) 0 \, \delta_{t_0}^B e_{t_0}^B \\ 0 (\lambda + d_{t_0}^A) c_{t_0}^B \, 0 \\ \delta_{t_0}^A e_{t_0}^A (\lambda + g_{t_0}^B) 0 \\ c_{t_0}^A 00 \, (\lambda + d_{t_0}^B) \end{array} \right| = 0, \tag{24}$$

или

$$\begin{array}{l} |\lambda E - A_{t_0}| = c_{t_0}^A e_{t_0}^B (\lambda + d_{t_0}^A)(\lambda + g_{t_0}^B) - c_{t_0}^A e_{t_0}^B e_{t_0}^A c_{t_0}^B + \\ +(\lambda + d_{t_0}^B)(\lambda + g_{t_0}^A)(\lambda + d_{t_0}^A)(\lambda + g_{t_0}^B) - \\ -(\lambda + d_{t_0}^B)(\lambda + d_{t_0}^A) \delta_{t_0}^A \delta_{t_0}^B - (\lambda + d_{t_0}^B)(\lambda + g_{t_0}^A) e_{t_0}^A c_{t_0}^B = 0. \end{array} \tag{25}$$

Если характеристическое уравнение (25) имеет четыре различных действительных решения, то стороны имеют решения, являющиеся кусочно-линейной суммой четырех волн

$$\begin{array}{l} Y_t^A = A_1^a \lambda_1^t + B_1^a \lambda_2^t + E_1^a \lambda_3^t + G_1^a \lambda_4^t, V_t^A = \\ = A_2^a \lambda_1^t + B_2^a \lambda_2^t + E_2^a \lambda_3^t + G_2^a \lambda_4^t, , t = t_0, ..., t_1 + 1. \end{array}$$

и

$$Y_t^B = A_1^b\lambda_1^t + B_1^b\lambda_2^t + E_1^b\lambda_3^t + Gb_1^a\lambda_4^t, V_t^A =$$
$$= A_2^b\lambda_1^t + B_2^b\lambda_2^t + E_2^b\lambda_3^t + Gb_2^b\lambda_4^t, t = t_0, ..., t_1 + 1.$$

Если какой-то действительный корень λ_m имеет кратность $r_m > 1$, то ему соответствуют решения вида $(F_0 + ... + F_m t^{r_m - 1})\lambda_m^t$ по каждой переменной. Случай комплексных корней характеристического уравнения здесь не рассматривается.

Список литературы

[1] Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964.

[2] Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

[3] Горелик В.А. Теория игр и исследование операций. М.: Изд-во МИНГП, 1978.

[4] Васин А.А., Морозов В.В. Теория игр и модели математической экономики. М.: МАКС Пресс, 2005.

[5] Васин А.А., Краснощеков П.С., Морозов В.В. Исследование операций. М.: Издательский центр «Академия», 2008.

[6] Молодцов Д.А. Модель Гросса в случае непротивоположных интересов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1972. Т. 12, № 2. С. 309–320.

[7] Берзин Е.А. Оптимальное распределение ресурсов и элементы синтеза систем / Под ред. Е.В. Золотова. М.: Радио и связь, 1974.

[8] Берзин Е.А. Оптимальное распределение ресурсов и теория игр / Под ред. Е.В. Золотова. М.: Радио и связь, 1983.

[9] Данильченко Т.Н., Масевич К.К. Многошаговая игра двух лиц при «осторожном» втором игроке и последовательной передаче информации // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1974. Т. 19, № 5. С. 1323–1327.

[10] Крутов Б.П. Динамические квазиинформационные расширения игр с расширяемой коалиционной структурой. М.: ВЦ РАН, 1986.

[11] Перевозчиков А.Г., Лесик И.А. Простейшая модель системы эшелонированной противовоздушной обороны // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2013. № 3 (30). С. 83–95.

[12] Перевозчиков А.Г., Лесик И.А., Яночкин И.Е. Модель массового обслуживания для системы эшелонированной противовоздушной обороны // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 4. С. 65–83.

[13] Решетов В.Ю., Перевозчиков А.Г., Лесик И.А. Модель преодоления многоуровневой системы защиты нападением // Прикладная математика и информатика: Труды факультета ВМК МГУ имени М.И.Ломоносова / Под ред. В.И. Дмитриева. М.: МАКС Пресс, 2015. № 49. С. 80–96.

[14] Hohzaki R., Tanaka V. The effects of players recognition about the acquisition of his information by his opponent in an attrition game on a network // Proceedings of 27^{th} European conference on Operation Research (EURO2015). 12-15 July 2015, University of Strathclyde.

[15] Решетов В.Ю., Перевозчиков А.Г., Лесик И.А. Модель преодоления многоуровневой системы защиты нападением с несколькими фазовыми ограничениями // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 2017. № 1. С. 26–32.

[16] Огарышев В.Ф. Смешанные стратегии в одном обобщении задачи Гросса // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1973. Т. 13. № 1. С. 59–70.

Библиографическая ссылка

Перевозчиков А.Г., Решетов В.Ю., Лесик А.И. Многошаговое обобщение модели «нападение-оборона» // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 2. С. 89–100.

Сведения об авторах

1. **Перевозчиков Александр Геннадьевич**
старший научный сотрудник отдела проектирования Центра моделирования сложных систем НПО «РусБИТех».

Россия, 170001, г. Тверь, пр. Калинина, д. 17, НПО «РусБИТех».
E-mail: pere501@yandex.ru

2. **Решетов Валерий Юрьевич**
доцент кафедры исследования операций факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова.

Россия, 119991 г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы,1, стр. 52, факультет ВМК.
E-mail: kadry@cs.msu.ru

3. **Лесик Александра Ильинична**
доцент кафедры математической статистики и системного анализа факультета ПМиК ТвГУ.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ, ф-т ПМиК.
E-mail: lesik56@mail.ru

A MULTI-STEP GENERALIZATION OF THE “ATTACK-DEFENSE” MODEL

Perevozchikov Aleksandr Gennadyevich
Senior Researcher at the Design Department of Complex Systems Modeling Center, NPO “RusBITTech”.
Russia, 170001, Tver, 17 Kalinina str., NPO “RusBITTech”.

Reshetov Valerii Yurievich
Associate professor at Operations Research department, Computational Mathematics and Cybernetics faculty, Lomonosov Moscow State University.
Russia, 119991, Moscow, GSP-1, 1 Leninskie gory, building 1, CMC, MSU.
E-mail: kadry@cs.msu.ru

Lesik Aleksandra Ilyinichna
Associate Professor at Mathematical Statistics and Systems Analysis department, Tver State University.
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU. E-mail: lesik56@mail.ru

Received 20.03.2017, revised 10.06.2017.

The article reviewed a multi-step generalization of the “attack-defense” model, which was defined and studied by Y.B. Germeyer. It is a modification of Gross’s model. A similar model was proposed by V.A. Gorelik for the production of gasoline. The authors proposes a simplest multi-step expansion of the “attack-defense” model, consisting in the fact that the corresponding game is played repeatedly until one of the parties reaches a given level of loss (exhaustion) incompatible with the further continuation of the conflict. It is assumed that the conditions of the parties’ awareness at each step remains the same and the reserves are not introduced during the conflict. It is shown that under these assumptions the multistep game model reduces to a discrete Osipov-Lanchester’s model having a solution in the form of a linear function of two geometric progressions with piecewise constant coefficients and denominators of progressions.

Keywords: attack-defense game, guaranteed attack result, minimax defense strategy, guaranteed defense result, value of game, optimal mixed attack strategy, optimal pure defense strategy, simplest multi-step expansion of the game.

Bibliographic citation

Perevozchikov A.G., Reshetov V.Y., Lesik A.I. A multi-step generalization of the “attack-defense” model. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2017, no. 2, pp. 89–100. (in Russian)

References

[1] Karlin S. *Matematicheskie Metody v Teorii Igr, Programmirovanii i Ekonomike* [Mathematical Methods in the Theory of Games, Programming and Economics]. Mir Publ., Moscow, 1964. (in Russian)

[2] Germeyer Y.B. *Vvedenie v Teoriyu Issledovaniya Operatsii* [Introduction to the Theory of Operations Research]. Nauka Publ., Moscow, 1971. (in Russian)

[3] Gorelik V.A. *Teoriya Igr i Issledovanie Operatsii* [Game Theory and Operations Research]. Publishing house MINGP, Moscow, 1978. (in Russian)

[4] Vasin A.A., Morozov V.V. *Teoriya Igr i Modeli Matematicheskoi Ekonomiki* [Game Theory and Models of Mathematical Economics]. MAX Press, Moscow, 2005. (in Russian)

[5] Vasin A.A., Krasnoshchekov P.S., Morozov V.V. *Issledovanie Operatsii* [Operations Research]. Publishing Center "Academy", Moscow, 2008. (in Russian)

[6] Molodtsov D.A. Gross's Model in the case of non-npposite interests. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki* [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1972, vol. 12(2), pp. 309–320. (in Russian)

[7] Berzin E.A. *Optimal'noe Raspredelenie Resursov i Elementy Sinteza Sistem* [Optimal Resource Allocation and Elements of System Synthesis]. Ed. by E.V. Zolotov. Radio and Communication Publ., Moscow, 1974. (in Russian)

[8] Berzin E.A. *Optimal'noe Raspredelenie Resursov i Teoriya Igr* [Optimal Resource Allocation and Game Theory]. Ed. by E.V. Zolotov. Radio and Communication Publ., Moscow, 1983. (in Russian)

[9] Danilchenko T.N., Masevich K.K. Multistep game of two persons with a "cautious" second player and sequential transfer of information. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki* [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1974, vol. 19(5), pp. 1323–1327. (in Russian)

[10] Krutov B.P. *Dinamicheskie Kvaziinformatsionnye Rasshireniya Igr s Rasshiryaemoi Koalitsionnoi Strukturoi* [Dynamic Quasi-Informational Extensions of Games with an Expandable Coalition Structure]. Computing Center of RAS Publ., Moscow, 1986. (in Russian)

[11] Perevozchikov A.G., Lesik I.A. On a simplest model of the echeloned air defense system. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2013, no. 3 (30), pp. 83–95. (in Russian)

[12] Perevozchikov A.G., Lesik I.A., Yanochkin I.Ye. Model of the echeloned Air Defense queuing system. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2015, no. 4, pp. 65–83. (in Russian)

[13] Reshetov V.Y., Perevozchikov A.G., Lesik I.A. Model of overcoming the multilevel defense system by attack. *Applied Mathematics and Computer Science: Proceedings of the Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics of Lomonosov Moscow State University*. Ed. by V.I. Dmitrieva. MAX Press, Moscow, 2015. No. 49. Pp. 80–96. (in Russian)

[14] Hohzaki R., Tanaka V. The effects of players recognition about the acquisition of his information by his opponent in an attrition game on a network. *Proceedings of 27th European conference on Operation Research (EURO2015).* 12-15 July 2015, University of Strathclyde.

[15] Reshetov V.Y., Perevozchikov A.G., Lesik I.A. Model of violation of layered defense system by attack with several constraints on the state. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 15. Vychislitel'naya Matematika i Kibernetika*, 2017, no. 1, pp. 26–32. (in Russian)

[16] Ogaryshev V.F. Mixed strategies in a generalization of the Gross's problem. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki* [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1973, vol. 13(1), pp. 59–70. (in Russian)