УДК 517.95, 532.5

ОБ ОБЩИХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМЫ НАВЬЕ–СТОКСА И КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Шеретов Ю.В.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 30.07.2017, после переработки 31.08.2017.

Показано, что метод Тркала построения однородно-винтовых решений нестационарных уравнений Навье–Стокса применим для квазигидродинамической системы. Рассмотрен более широкий класс течений, подчиняющихся обобщенному условию Громеки–Бельтрами. Приведены примеры точных решений, общих для системы Навье–Стокса и квазигидродинамической системы, но не удовлетворяющих уравнениям Эйлера.

Ключевые слова: системы Навье–Стокса и Эйлера, квазигидродинамические уравнения, точные решения, метод Тркала, обобщенное условие Громеки–Бельтрами, винтовые течения.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 3. С. 13–25.
https://doi.org/10.26456/vtpmk176

Введение

Научное направление, связанное с построением точных решений классических уравнений Навье–Стокса и Эйлера, развивалось в работах многих ученых [1–9]. Особый интерес представляет класс так называемых винтовых течений, в которых отличный от тождественного нуля вихрь поля скорости жидкости пропорционален самой скорости. Подобные течения изучались И.С. Громекой, Э. Бельтрами, В. Тркалом и другими авторами [4–9].

В 1993 г. автором была предложена еще одна система уравнений, получившая название квазигидродинамической (КГД) [10]. Детальный анализ свойств КГД уравнений проведен в монографиях [11, 12]. В частности, показан диссипативный характер КГД системы и построены семейства ее точных решений. В стационарном случае имеются примеры решений, общих для систем Навье–Стокса и КГД, и не удовлетворяющих уравнениям Эйлера [13, 14]. На основе КГД системы строились вычислительные алгоритмы для моделирования как двумерных [15], так и трехмерных [16] течений жидкости. Иногда эти алгоритмы реализовывались на мощных современных параллельных компьютерах с распределенной памятью.

В настоящей работе показано, что метод Тркала построения однородно-винтовых решений нестационарных уравнений Навье–Стокса [6] применим для квазигидродинамической системы. Рассмотрен более широкий класс неустановившихся течений, подчиняющихся обобщенному условию Громеки–Бельтрами. Приведены примеры точных решений, общих систем Навье–Стокса и КГД, но не удовлетворяющих уравнениям Эйлера.

1. Системы Навье–Стокса и Эйлера для несжимаемой жидкости. Квазигидродинамическая система

Система Навье–Стокса в динамике вязкой несжимаемой жидкости без учета внешних сил имеет вид

$$\mathrm{div}\ \vec{u} = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathrm{div}\ (\vec{u} \otimes \vec{u}) + \frac{1}{\rho}\nabla p = \nu \Delta \vec{u}. \tag{1.2}$$

В записи системы (1.1) – (1.2), замкнутой относительно неизвестных функций – скорости $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ и давления $p = p(\vec{x}, t)$, использованы стандартные обозначения из тензорного анализа. Например, диада $(\vec{u} \otimes \vec{u})$ представляет собой тензор–инвариант второго ранга, полученный как прямое тензорное произведение двух одинаковых векторов $\vec{u}$ и $\vec{u}$. Вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ задает точку в пространстве $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$. Символы div и ∇ определяют операции дивергенции и градиента, $\Delta\vec{u}$ – лапласиан векторного поля $\vec{u}$. Система содержит две положительные константы – плотность ρ и коэффициент кинематической вязкости ν. Последний связан с коэффициентом динамической вязкости η соотношением $\nu = \eta/\rho$.

Если в (1.1) – (1.2) пренебречь вязкими членами, то получим классическую систему Эйлера

$$\mathrm{div}\ \vec{u} = 0, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathrm{div}\ (\vec{u} \otimes \vec{u}) + \frac{1}{\rho}\nabla p = 0. \tag{1.4}$$

Дивергентная запись квазигидродинамической системы такова:

$$\mathrm{div}\ \vec{u} = \mathrm{div}\ \vec{w}, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \mathrm{div}\ (\vec{u} \otimes \vec{u}) + \frac{1}{\rho}\nabla p = 2\nu\ \mathrm{div}\ \widehat{\sigma} + \mathrm{div}\ \big[(\vec{w} \otimes \vec{u}) + (\vec{u} \otimes \vec{w})\big]. \tag{1.6}$$

Тензор скоростей деформаций определяется с помощью выражения

$$\widehat{\sigma} = \widehat{\sigma}(\vec{u}) = \frac{1}{2}\big[(\nabla \otimes \vec{u}) + (\nabla \otimes \vec{u})^T\big]. \tag{1.7}$$

Вектор $\vec{w}$ вычисляется по формуле

$$\vec{w} = \tau\Big((\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p\Big), \tag{1.8}$$

в которой

$$\tau = \frac{\nu}{c_s^2}$$

– характерное время релаксации, c_s – скорость звука в жидкости.

Исследованию глубоких связей между системами Эйлера, Навье–Стокса и КГД посвящены монографии [11, 12]. В [13, 14] найдены семейства точных решений, общих для стационарных систем Навье–Стокса и КГД, которые не удовлетворяют уравнениям Эйлера. Покажем, что подобные решения существуют и в случае неустановившихся течений. Будем рассматривать указанные системы на множестве

$$\Omega = \{(\vec{x}, t) : \vec{x} \in \mathbb{R}^3_{\vec{x}},\ t \geqslant 0\}$$

пространства $\mathbb{R}^3_{\vec{x}} \times \mathbb{R}_t$. Добавим начальное условие

$$\vec{u}\Big|_{t=0} = \vec{u}_0(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3_{\vec{x}}. \tag{1.9}$$

Функция $\vec{u}_0(\vec{x})$ является бесконечно дифференцируемой. Для систем Эйлера и Навье–Стокса векторное поле $\vec{u}_0(\vec{x})$ соленоидально:

$$\mathrm{div}\ \vec{u}_0(\vec{x}) = 0. \tag{1.10}$$

В случае квазигидродинамической системы ограничение (1.10) не накладывается. Давление $p = p(\vec{x}, t)$ в (1.1) – (1.2), (1.3) – (1.4) и (1.5) – (1.6) определено с точностью до произвольной функции времени.

2. Общие решения системы Навье–Стокса и квазигидродинамической системы

Займемся построением частных решений поставленных задач Коши для систем Навье–Стокса и КГД. Предположим, что $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ – бесконечно дифференцируемая на Ω вектор-функция. Ротор поля $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ определяется по формуле

$$\vec{\omega} = \mathrm{rot}\ \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix}. \tag{2.1}$$

Здесь $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные орты правой прямоугольной системы координат $oxyz$. Величины u_x, u_y, u_z есть проекции вектора скорости на соответствующие оси. Символы $\cdot$ и $\times$ используются для обозначения операций скалярного и векторного произведения. Справедлива

Теорема 1. *Пусть бесконечно дифференцируемая на Ω вектор-функция $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ удовлетворяет трем условиям*

$$div\ \vec{u} = 0, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \nu \Delta \vec{u}, \tag{2.3}$$

$$rot\ [\vec{u} \times \vec{\omega}] = 0. \tag{2.4}$$

Тогда пара функций $(\vec{u}, p)$, где

$$p = \rho\Big(C(t) - \frac{\vec{u}^2}{2} + \Psi\Big) \tag{2.5}$$

является решением как системы Навье–Стокса (1.1) – (1.2), *так и квазигидродинамической системы* (1.5) – (1.6). *Здесь* $C(t)$ – *любая непрерывная при* $t \geqslant 0$ *функция*, $\vec{u}^2 = (\vec{u} \cdot \vec{u}) = |\vec{u}|^2$. *Потенциал* $\Psi = \Psi(\vec{x}, t)$ *определяется с помощью выражения*

$$\Psi = \int\limits_{\gamma} \big([\vec{u} \times \vec{\omega}] \cdot \vec{l}\big)\ ds = \int\limits_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \big([\vec{u} \times \vec{\omega}] \cdot \vec{l}\big)\ ds, \tag{2.6}$$

где γ – *произвольно выбранная кусочно-гладкая кривая в пространстве* $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$, *соединяющая точки* $\vec{x}_0$ *и* $\vec{x}$, $\vec{l}$ – *единичный касательный вектор к* γ, ds – *элемент ее длины.*

Доказательство. Запишем систему Навье–Стокса (1.1) – (1.2) в форме Громеки–Лэмба:

$$\mathrm{div}\ \vec{u} = 0, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{u} = -\nabla\Big(\frac{\vec{u}^2}{2} + \frac{p}{\rho}\Big) + [\vec{u} \times \vec{\omega}]. \tag{2.8}$$

В силу (2.2) равенство (2.7) выполняется автоматически. Из условия (2.4) и теоремы Стокса вытекает независимость криволинейного интеграла (2.6) от пути интегрирования. Кроме того, выполняется соотношение

$$\nabla\Psi = [\vec{u} \times \vec{\omega}]. \tag{2.9}$$

Принимая во внимание (2.9), перепишем (2.8) в виде

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \nu \Delta \vec{u} = -\nabla\Big(\frac{\vec{u}^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \Psi\Big). \tag{2.10}$$

Поскольку выполнено условие (2.3), левая часть (2.10) обращается в ноль. Правая часть (2.10) также равна нулю в силу (2.5). Таким образом, пара $(\vec{u}, p)$ является решением системы Навье–Стокса.

Покажем теперь, что функции $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ и $p = p(\vec{x}, t)$ удовлетворяют квазигидродинамической системе (1.5) – (1.6). Имеем

$$\vec{w} = \tau\Big((\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p\Big) = \tau\bigg(\nabla\Big(\frac{\vec{u}^2}{2} + \frac{p}{\rho}\Big) - [\vec{u} \times \vec{\omega}]\bigg) = \tau\nabla\Big(\frac{\vec{u}^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \Psi\Big) = 0, \tag{2.11}$$

$$2\nu\ \mathrm{div}\ \widehat{\sigma} = \nu\ \mathrm{div}\ \big[(\nabla \otimes \vec{u}) + (\nabla \otimes \vec{u})^T\big] = \nu\ \Delta\vec{u} + \nu\ \nabla\big(\mathrm{div}\ \vec{u}\big) = \nu\ \Delta\vec{u}. \tag{2.12}$$

При выводе (2.11) и (2.12) были использованы формулы (2.9), (2.5), (1.7) и (2.2), а также известное (см. [2], с. 32) векторное тождество

$$(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = \nabla\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}\Big) - [\vec{u} \times \vec{\omega}].$$

Итак, все содержащие τ члены в КГД системе обращаются в ноль и она переходит в систему Навье–Стокса. Для последней пара $(\vec{u}, p)$ является решением. □

Заметим, что обобщенное условие Громеки–Бельтрами (2.4) (см. [4], с. 15) может быть представлено в эквивалентной форме

$$(\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{u} = (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{\omega}. \tag{2.13}$$

Это следует из цепочки равенств

$$0 = \mathrm{rot}\ [\vec{u} \times \vec{\omega}] = (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{u} - (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{\omega} + \vec{u}\ \mathrm{div}\ \vec{\omega} - \vec{\omega}\ \mathrm{div}\ \vec{u} =$$
$$= (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{u} - (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{\omega} + \vec{u}\ \mathrm{div}(\mathrm{rot}\ \vec{u}) - \vec{\omega}\ \mathrm{div}\ \vec{u} = (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{u} - (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{\omega}.$$

Здесь были учтены известные векторные тождества (см. [2], с. 32), а также соленоидальность поля $\vec{u}$.

3. Винтовые течения. Построение точных решений нестационарных квазигидродинамических уравнений методом Тркала

Пусть $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ – бесконечно дифференцируемое и тождественно не равное нулю на Ω векторное поле. Течение называется однородно-винтовым, если существует такая постоянная $\lambda \neq 0$, что выполнено равенство

$$\vec{\omega} = \lambda \vec{u}. \tag{3.1}$$

Соответствующие решения систем Навье–Стокса и КГД также будем называть винтовыми.

Зададим бесконечно дифференцируемую и отличную от тождественного нуля на $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$ вектор-функцию $\vec{u}_0 = \vec{u}_0(\vec{x})$, фигурирующую в условии (1.9). Символом $\vec{\omega}_0$ обозначим вихрь поля $\vec{u}_0$, т.е. $\vec{\omega}_0 = \mathrm{rot}\ \vec{u}_0$.

Теорема 2. *Пусть существует такая постоянная $\lambda \neq 0$, что на $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$ выполнено соотношение*

$$\vec{\omega}_0 = \lambda \vec{u}_0. \tag{3.2}$$

Тогда пара функций

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{u}_0(\vec{x}) e^{-\nu\lambda^2 t}, \tag{3.3}$$

$$p = p(\vec{x}, t) = \rho\Big(C(t) - \frac{\vec{u}_0^2(\vec{x})}{2} e^{-2\nu\lambda^2 t}\Big) \tag{3.4}$$

задает на Ω точное однородно-винтовое решение как системы Навье–Стокса (1.1) – (1.2)*, так и квазигидродинамической системы* (1.5) – (1.6)*. Это решение удовлетворяет начальному условию* (1.9)*. Символом $C(t)$ обозначена любая непрерывная при $t \geqslant 0$ функция.*

Доказательство. Проверим выполнение всех условий теоремы 1. С помощью (3.2), (3.3) находим

$$\mathrm{div}\ \vec{u} = e^{-\nu\lambda^2 t} \mathrm{div}\ \vec{u}_0 = \frac{e^{-\nu\lambda^2 t}}{\lambda} \mathrm{div}\ \vec{\omega}_0 = \frac{e^{-\nu\lambda^2 t}}{\lambda} \mathrm{div\ rot}\ \vec{u}_0 = 0,$$

$$\vec{\omega} = \mathrm{rot}\ \vec{u} = e^{-\nu\lambda^2 t} \mathrm{rot}\ \vec{u}_0 = e^{-\nu\lambda^2 t} \vec{\omega}_0 = \lambda e^{-\nu\lambda^2 t} \vec{u}_0 = \lambda \vec{u}.$$

Таким образом, на множестве Ω выполняются соотношения

$$\operatorname{div}\,\vec{u} = 0, \tag{3.5}$$

$$\vec{\omega} = \lambda\vec{u}. \tag{3.6}$$

Принимая во внимание (3.5) и (3.6), а также известные векторные равенства (см. [2], с. 32), будем иметь

$$\Delta\vec{u} = \nabla(\operatorname{div}\,\vec{u}) - \operatorname{rot}\,\operatorname{rot}\,\vec{u} = -\operatorname{rot}\,\vec{\omega} = -\lambda\,\operatorname{rot}\,\vec{u} = -\lambda\vec{\omega} = -\lambda^2\vec{u}. \tag{3.7}$$

Используя (3.7), запишем (2.3) в эквивалентной форме

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \nu\lambda^2\vec{u} = 0. \tag{3.8}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функция (3.3) удовлетворяет уравнению (3.8). Поскольку

$$[\vec{u}\times\vec{\omega}] = \lambda[\vec{u}\times\vec{u}] = 0,$$

равенство (2.4) также справедливо. Из (2.6) следует, что $\Psi \equiv 0$ в Ω. Подстановка (3.3) в (2.5) дает (3.4). Пара функций $(\vec{u}, p)$, определяемая формулами (3.3) и (3.4), задает однородно-винтовое решение, общее для систем Навье–Стокса и КГД. При этом выполняется начальное условие (1.9). □

Описанный в данном пункте метод построения винтовых решений уравнений Навье–Стокса (1.1) – (1.2) был предложен в 1919 году чешским ученым В. Тркалом [6]. Научная новизна нашей работы заключается в том, что этот подход в полной мере применим для квазигидродинамической системы (1.5) – (1.6). Приведем примеры точных решений указанного типа, общих для систем Навье–Стокса и КГД.

Пример 1. Рассмотрим векторное поле

$$\vec{u}_0 = U\sin\Big(\frac{z}{H}\Big)\vec{i} + U\cos\Big(\frac{z}{H}\Big)\vec{j}. \tag{3.9}$$

Здесь U и H – константы, имеющие физические размерности скорости и длины соответственно, $U \neq 0$, $H > 0$. Вычислим

$$\vec{\omega}_0 = \operatorname{rot}\,\vec{u}_0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ U\sin\Big(\frac{z}{H}\Big) & U\cos\Big(\frac{z}{H}\Big) & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{H}\Big[U\sin\Big(\frac{z}{H}\Big)\vec{i} + U\cos\Big(\frac{z}{H}\Big)\vec{j}\Big] = \lambda\vec{u}_0,$$

где $\lambda = 1/H$. Таким образом, справедливо равенство (3.2) и $\vec{u}_0$ является собственной функцией оператора «ротор». Принимая во внимание (3.3) и (3.4), выписываем точное решение задачи Коши с начальным условием (1.9):

$$u_x = U\sin\Big(\frac{z}{H}\Big)e^{-\frac{\nu}{H^2}t}, \quad u_y = U\cos\Big(\frac{z}{H}\Big)e^{-\frac{\nu}{H^2}t}, \quad u_z = 0, \tag{3.10}$$

$$p = \rho\bigg(C(t) - \frac{U^2}{2}e^{-\frac{2\nu}{H^2}t}\bigg) = \rho\widetilde{C}(t), \tag{3.11}$$

где $\widetilde{C}(t)$ – произвольная непрерывная при $t \geqslant 0$ функция. Для системы Навье–Стокса (1.1) – (1.2) это решение было построено Виктором Тркалом [6].

Пример 2. Пусть

$$\vec{u}_0 = \left[A\sin\Bigl(\frac{z}{H}\Bigr) + C\cos\Bigl(\frac{y}{H}\Bigr)\right]\vec{i} + \left[B\sin\Bigl(\frac{x}{H}\Bigr) + A\cos\Bigl(\frac{z}{H}\Bigr)\right]\vec{j} +$$

$$+\left[C\sin\Bigl(\frac{y}{H}\Bigr) + B\cos\Bigl(\frac{x}{H}\Bigr)\right]\vec{k}. \tag{3.12}$$

Константа $H > 0$ имеет размерность длины. Постоянные величины A, B, C имеют размерность скорости, причем $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. Заметим, что (3.12) совпадет с (3.9), если положить $A = U$, $B = C = 0$. Имеем

$$\vec{\omega}_0 = \operatorname{rot}\,\vec{u}_0 =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A\sin\Bigl(\frac{z}{H}\Bigr) + C\cos\Bigl(\frac{y}{H}\Bigr) & B\sin\Bigl(\frac{x}{H}\Bigr) + A\cos\Bigl(\frac{z}{H}\Bigr) & C\sin\Bigl(\frac{y}{H}\Bigr) + B\cos\Bigl(\frac{x}{H}\Bigr) \end{vmatrix} = \lambda\vec{u}_0,$$

где $\lambda = 1/H$. Таким образом, выполняется равенство (3.2) и $\vec{u}_0$ есть собственная функция оператора «ротор». Этот факт установлен в 1881 году Ипполитом Степановичем Громекой (см. [17], с. 83). Соответствующее решение задачи Коши имеет вид

$$u_x = \left[A\sin\Bigl(\frac{z}{H}\Bigr) + C\cos\Bigl(\frac{y}{H}\Bigr)\right]e^{-\frac{\nu}{H^2}t}, \tag{3.13}$$

$$u_y = \left[B\sin\Bigl(\frac{x}{H}\Bigr) + A\cos\Bigl(\frac{z}{H}\Bigr)\right]e^{-\frac{\nu}{H^2}t}, \tag{3.14}$$

$$u_z = \left[C\sin\Bigl(\frac{y}{H}\Bigr) + B\cos\Bigl(\frac{x}{H}\Bigr)\right]e^{-\frac{\nu}{H^2}t}, \tag{3.15}$$

$$p = \rho\Bigl(C(t) - \frac{\vec{u}_0^2}{2}e^{-\frac{2\nu}{H^2}t}\Bigr). \tag{3.16}$$

Пример 3. Зададим векторное поле

$$\vec{u}_0 = -\frac{U}{\sqrt{2}}\cos\Bigl(\frac{x}{H\sqrt{2}}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{y}{H\sqrt{2}}\Bigr)\vec{i} + \frac{U}{\sqrt{2}}\sin\Bigl(\frac{x}{H\sqrt{2}}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{y}{H\sqrt{2}}\Bigr)\vec{j} +$$

$$+U\cos\Bigl(\frac{x}{H\sqrt{2}}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{y}{H\sqrt{2}}\Bigr)\vec{k}. \tag{3.17}$$

Описание констант U и H дано в первом примере. Находим

$$\vec{\omega}_0 = \operatorname{rot}\,\vec{u}_0 =$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{U}{\sqrt{2}}\cos\Bigl(\frac{x}{H\sqrt{2}}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{y}{H\sqrt{2}}\Bigr) & \frac{U}{\sqrt{2}}\sin\Bigl(\frac{x}{H\sqrt{2}}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{y}{H\sqrt{2}}\Bigr) & U\cos\Bigl(\frac{x}{H\sqrt{2}}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{y}{H\sqrt{2}}\Bigr) \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda\vec{u}_0,$$

причем $\lambda = 1/H$. Это соотношение получено в 1963 году Ратыпом Беркером. По описанной схеме строим точное решение:

$$u_x = -\frac{U}{\sqrt{2}} \cos\Big(\frac{x}{H\sqrt{2}}\Big) \sin\Big(\frac{y}{H\sqrt{2}}\Big) e^{-\frac{\nu}{H^2}t}, \tag{3.18}$$

$$u_y = \frac{U}{\sqrt{2}} \sin\Big(\frac{x}{H\sqrt{2}}\Big) \cos\Big(\frac{y}{H\sqrt{2}}\Big) e^{-\frac{\nu}{H^2}t}, \tag{3.19}$$

$$u_z = U \cos\Big(\frac{x}{H\sqrt{2}}\Big) \cos\Big(\frac{y}{H\sqrt{2}}\Big) e^{-\frac{\nu}{H^2}t}, \tag{3.20}$$

$$p = \rho\Big[C(t) - \frac{U^2}{4}\Big(\cos^2\Big(\frac{x}{H\sqrt{2}}\Big) + \cos^2\Big(\frac{y}{H\sqrt{2}}\Big)\Big) e^{-\frac{2\nu}{H^2}t}\Big]. \tag{3.21}$$

Заметим, что наборы функций (3.10) – (3.11), (3.13) – (3.16), (3.18) – (3.21) не удовлетворяют уравнениям Эйлера (1.3) – (1.4). Описанный в [9] метод векторного суммирования скоростей однородно-винтовых течений с одинаковыми значениями λ применим и для квазигидродинамической системы (1.5) – (1.6).

4. Примеры точных решений, не описывающих винтовые течения

Покажем, что теорема 1 может использоваться для построения решений систем Навье–Стокса и КГД, не относящихся к классу винтовых.

Пример 4. Пусть векторное поле $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ имеет в правой декартовой системе координат компоненты

$$u_x = -U \cos\Big(\frac{x}{H}\Big) \sin\Big(\frac{y}{H}\Big) e^{-\frac{2\nu}{H^2}t}, \tag{4.1}$$

$$u_y = U \sin\Big(\frac{x}{H}\Big) \cos\Big(\frac{y}{H}\Big) e^{-\frac{2\nu}{H^2}t}, \tag{4.2}$$

$$u_z = 0. \tag{4.3}$$

Свойства констант U и H описаны в первом примере. Прямой проверкой убеждаемся в истинности равенств

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \nu\Big(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\Big), \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} = \nu\Big(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}\Big), \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = \nu\Big(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\Big). \tag{4.7}$$

Итак, условия (2.2) и (2.3) выполняются.

Вычислим вихрь скорости:

$$\vec{\omega} = \mathrm{rot}\ \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -U\cos\left(\frac{x}{H}\right)\sin\left(\frac{y}{H}\right)e^{-\frac{2\nu}{H^2}t} & U\sin\left(\frac{x}{H}\right)\cos\left(\frac{y}{H}\right)e^{-\frac{2\nu}{H^2}t} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2U}{H}\cos\left(\frac{x}{H}\right)\cos\left(\frac{y}{H}\right)e^{-\frac{2\nu}{H^2}t}\ \vec{k}. \tag{4.8}$$

Используя (4.1) – (4.3) и (4.8), найдем векторное произведение

$$[\vec{u}\times\vec{\omega}] =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -U\cos\left(\frac{x}{H}\right)\sin\left(\frac{y}{H}\right) & U\sin\left(\frac{x}{H}\right)\cos\left(\frac{y}{H}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2U}{H}\cos\left(\frac{x}{H}\right)\cos\left(\frac{y}{H}\right) \end{vmatrix} e^{-\frac{4\nu}{H^2}t} =$$

$$= \frac{2U^2}{H}\sin\left(\frac{x}{H}\right)\cos\left(\frac{x}{H}\right)\cos^2\left(\frac{y}{H}\right)e^{-\frac{4\nu}{H^2}t}\ \vec{i} +$$

$$+ \frac{2U^2}{H}\sin\left(\frac{y}{H}\right)\cos\left(\frac{y}{H}\right)\cos^2\left(\frac{x}{H}\right)e^{-\frac{4\nu}{H^2}t}\ \vec{j}. \tag{4.9}$$

Так как правая часть (4.9) отлична от нуля, течение не является винтовым. Поскольку

$$\mathrm{rot}\ [\vec{u}\times\vec{\omega}] =$$

$$= \frac{2U^2}{H}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sin\left(\frac{x}{H}\right)\cos\left(\frac{x}{H}\right)\cos^2\left(\frac{y}{H}\right) & \sin\left(\frac{y}{H}\right)\cos\left(\frac{y}{H}\right)\cos^2\left(\frac{x}{H}\right) & 0 \end{vmatrix} e^{-\frac{4\nu}{H^2}t} = 0,$$

условие (2.4) также выполняется.

Вычислим теперь потенциал $\Psi = \Psi(\vec{x}, t)$. В пространстве $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$ фиксируем две точки

$$\vec{x}_0 = \left(\frac{\pi H}{2}, \frac{\pi H}{2}, 0\right) \quad \text{и} \quad \vec{x} = (x, y, z).$$

По формуле (2.6) находим

$$\Psi = \int\limits_{\vec{x}_0}^{\vec{x}} \left([\vec{u}\times\vec{\omega}]\cdot\vec{l}\right)\,ds = \frac{2U^2}{H}e^{-\frac{4\nu}{H^2}t}\int\limits_{\left(\frac{\pi H}{2},\frac{\pi H}{2},0\right)}^{(x,y,z)} \left[\sin\left(\frac{x_*}{H}\right)\cos\left(\frac{x_*}{H}\right)\cos^2\left(\frac{y_*}{H}\right)dx_* +\right.$$

$$\left.+\sin\left(\frac{y_*}{H}\right)\cos\left(\frac{y_*}{H}\right)\cos^2\left(\frac{x_*}{H}\right)dy_*\right] = -U^2 e^{-\frac{4\nu}{H^2}t}\int\limits_{\left(\frac{\pi H}{2},\frac{\pi H}{2},0\right)}^{(x,y,z)} d\left[\cos^2\left(\frac{x_*}{H}\right)\cos^2\left(\frac{y_*}{H}\right)\right] =$$

$$= -U^2 e^{-\frac{4\nu}{H^2}t}\cos^2\left(\frac{x_*}{H}\right)\cos^2\left(\frac{y_*}{H}\right)\Bigg|_{\left(\frac{\pi H}{2},\frac{\pi H}{2},0\right)}^{(x,y,z)} =$$

$$= -U^2 \cos^2\Big(\frac{x}{H}\Big) \cos^2\Big(\frac{y}{H}\Big) e^{-\frac{4\nu}{H^2}t}. \tag{4.10}$$

Подстановка (4.1) – (4.3) и (4.10) в (2.5) позволяет найти распределение давления:

$$p = \rho C(t) - \frac{\rho U^2}{2}\left[\cos^2\Big(\frac{x}{H}\Big) + \cos^2\Big(\frac{y}{H}\Big)\right] e^{-\frac{4\nu}{H^2}t}. \tag{4.11}$$

Набор функций (4.1) – (4.3), (4.11) не является решением уравнений Эйлера (1.3) – (1.4). Подобные решения системы Навье–Стокса были построены в 1923 году иным способом Джеффри Инграмом Тейлором (см. [4], с. 103). В задаче Стокса о колеблющейся плоской пластине и в задаче Озеена о диффузии вихревой нити точные решения, общие для систем Навье–Стокса и КГД, приведены в [11,12].

Заключение

Проведенные за последние двадцать лет исследования неоспоримо свидетельствуют о наличии глубоких связей квазигидродинамической системы с классическими уравнениями Эйлера и Навье–Стокса. В недавно вышедшей монографии [18] изложены результаты успешного моделирования ламинарных и турбулентных газодинамических течений на основе родственной квазигазодинамической системы. Есть основания полагать, что квазигидродинамическая система также может использоваться для анализа различных типов движений реальных жидкостей. Это является стимулом для разработки новых теоретических и численных методик.

Список литературы

[1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

[2] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.

[3] Шмыглевский Ю.Д. Аналитические исследования динамики газа и жидкости. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 232 с.

[4] Riley N., Drazin P.G. The Navier–Stokes equations: A classification of flows and exact solutions. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. 196 p.

[5] Пухначев В.В. Симметрии в уравнениях Навье–Стокса // Успехи механики. 2006. № 1. С. 6–76.

[6] Trkal V. A note on the hydrodynamics of viscous fluids // Czechoslovak Journal of Physics. 1994. Vol. 44, № 2. Pp. 97–106.

[7] Bogoyavlenskij O.I. Infinite families of exact periodic solutions to the Navier–Stokes equations // Moscow Mathematical Journal. 2003. Vol. 3, №2. Pp. 263–272.

[8] Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И. Некоторые решения уравнений движения для несжимаемой вязкой сплошной среды // Труды института математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 4. С. 48–63.

[9] Ковалев В.П., Просвиряков Е.Ю., Сизых Г.Б. Получение примеров точных решений уравнений Навье–Стокса для винтовых течений методом суммирования скоростей // Труды Московского физико-технического института. 2017. Т. 9, № 1. С. 71–88.

[10] Шеретов Ю.В. О единственности решений одной диссипативной системы гидродинамического типа // Математическое моделирование. 1994. Т. 6, № 10. С. 35–45.

[11] Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 400 с.

[12] Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской гос. ун–т, 2016. 222 с.

[13] Шеретов Ю.В. О точных решениях стационарных квазигидродинамических уравнений в цилиндрических координатах // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 1. С. 85–94. https://doi.org/10.26456/vtpmk125

[14] Шеретов Ю.В. О общих точных решениях стационарной системы Навье–Стокса и квазигидродинамической системы, не удовлетворяющих уравнениям Эйлера // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 2. С. 5–15. https://doi.org/10.26456/vtpmk169

[15] Жериков А.В. Применение квазигидродинамических уравнений: математическое моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости. Saarbrücken: «Lambert Academic Publishing», 2010. 124 с.

[16] Елизарова Т.Г., Милюкова О.Ю. Численное моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости в кубической каверне // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003. Т. 43, № 3. С. 453–466.

[17] Арнольд В.И., Хесин Б.А. Топологические методы в гидродинамике. М.: МЦНМО, 2007. 392 с.

[18] Елизарова Т.Г., Широков И.А. Регуляризованные уравнения и примеры их использования при моделировании газодинамических течений. М.: МАКС Пресс, 2017. 136 с.

Образец цитирования

Шеретов Ю.В. Об общих точных решениях системы Навье–Стокса и квазигидродинамической системы для нестационарных течений // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 3. С. 13–25. https://doi.org/10.26456/vtpmk176

Сведения об авторах

1. **Шеретов Юрий Владимирович**
заведующий кафедрой математического анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru.

ON COMMON EXACT SOLUTIONS OF NAVIER–STOKES AND QUASI–HYDRODYNAMIC SYSTEMS FOR NONSTATIONARY FLOWS

Sheretov Yurii Vladimirovich
Head of Mathematical Analysis department, Tver State University.
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU. E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

Received 30.07.2017, revised 31.08.2017.

It is shown that the Trkal method for constructing uniformly-helical solutions of nonstationary Navier–Stokes equations is applicable for quasi–hydrodynamic system. A wider class of flows, obeying the generalized Gromeki–Beltrami condition, is considered. Examples of exact solutions, common to the Navier–Stokes and quasi–hydrodynamic systems, but not satisfying the Euler equations, are given.

Keywords: Navier-Stokes and Euler systems, quasi–hydrodynamic equations, exact solutions, Trkal method, generalized Gromeka–Beltrami condition, helical flows.

Citation

Sheretov Yu.V. On common exact solutions of Navier-Stokes and quasi–hydrodynamic systems for nonstationary flows. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2017, no. 3, pp. 13–25. (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk176

References

[1] Landau L.D., Lifshits E.M. *Gidrodinamika* [Hydrodynamics]. Nauka Publ., Moscow, 1986. 736 p. (in Russian)

[2] Loytsyansky L.G. *Mekhanika Zhidkosti i Gaza* [Fluid and Gas Mechanics]. Nauka Publ., Moscow, 1987. 840 p. (in Russian)

[3] Shmyglevskii Yu.D. *Analiticheskie Issledovaniya Didamiki Gasa i Zhidkosti* [Analytical Investigations of Gas and Fluid Dynamics]. Editorial URSS Publ., Moscow, 1999. 232 p. (in Russian)

[4] Riley N., Drazin P.G. *The Navier–Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006. 196 p.

[5] Pukhnachev V.V. Symmetries in the Navier–Stokes equations. *Uspekhi Mekhaniki* [Advances in Mechanics], 2006, no. 1, pp. 6–76. (in Russian)

[6] Trkal V. A note on the hydrodynamics of viscous fluids. *Czechoslovak Journal of Physics*, 1994, vol. 44(2), pp. 97–106.

[7] Bogoyavlenskij O.I. Infinite families of exact periodic solutions to the Navier–Stokes equations. *Moscow Mathematical Journal*, 2003, vol. 3(2), pp. 263–272.

[8] Vereshchagin V.P., Subbotin Yu.N., Chernykh N.I. Some solutions of continuum equations for an incompressible viscous medium. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2014, vol. 287, suppl. 1, pp. 208–223. https://doi.org/10.1134/S008154381409020X

[9] Kovalev V.P., Prosviryakov E.Yu., Sizykh G.B. Obtaining examples of exact solutions of the Navier–Stokes equations for helical flows by the method of summation of velocities. *Trudy Moskovskogo Fiziko-Tehnicheskogo Instituta* [Proceedings of Moscow Institute of Physics and Technology], 2017, vol. 9(1), pp. 71–88. (in Russian)

[10] Sheretov Yu.V. About the uniqueness of the solutions for one dissipative equation system of hydrodynamic type. *Matematicheskoe Modelirovanie* [Mathematical Modeling], 1994, vol. 6(10), pp. 35–45. (in Russian)

[11] Sheretov Yu.V. *Dinamika Sploshnykh Sred pri Prostranstvenno–Vremennom Osrednenii* [Continuum Dynamics under Spatiotemporal Averaging]. "Regular and Chaotic Dynamics" Publ., Moscow, Izhevsk, 2009. 400 p.

[12] Sheretov Yu.V. *Regulyarizovannye Uravneniya Gidrodinamiki* [Regularized Hydrodynamic Equations]. Tver State University, Tver, 2016. 222 p. (in Russian)

[13] Sheretov Yu.V. On the exact solutions of stationary quasi–hydrodynamic equations in cylindrical coordinates. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2017, no. 1, pp. 85–94. (in Russian) https://doi.org/10.26456/vtpmk125

[14] Sheretov Yu.V. On the common exact solutions of stationary Navier–Stokes and quasi–hydrodynamic systems, not satisfying to Euler equations. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2017, no. 2, pp. 5–15. (in Russian) https://doi.org/10.26456/vtpmk169

[15] Zherikov A.V. *Primenenie Kvazigidrodinamicheskikh Uravnenii: Matematicheskoe Modelirovanie Techeniy Vyazkoi Neszhimaemoi Zhidkosti* [Application of Quasi–Hydrodynamic Equations: Mathematical Modeling of Viscous Incompressible Fluid]. Lambert Academic Publishing, Saarbrücken, 2010. 124 p. (in Russian)

[16] Elizarova T.G., Milyukova O.Yu. Numerical simulation of viscous incompressible flow in a cubic cavity. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2003, vol. 43(3), pp. 433–445.

[17] Arnold V.I., Khesin B.A. *Topological Methods in Hydrodynamics.* Springer–Verlag, New York, 1998, 376 p.

[18] Elizarova T.G., Shirokov I.A. *Regulyarizovannye Uravneniya i Primery ikh Ispolzovaniya pri Modelirovanii Gazodinamicheskikh Techenii* [Regularized Equations and Examples of their Use in the Modeling of Gas–Dynamic Flows]. MAKS Press Publ., Moscow, 2017, 136 p. (in Russian)