СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.2

ОЦЕНКА ВКЛАДА КОМПОНЕНТЫ В ОБЩИЙ РИСК ПО ПОРТФЕЛЮ, ЗАДАННОМУ МНОГОМЕРНЫМ ДРОБНЫМ ДВИЖЕНИЕМ ЛЕВИ

Румянцева О.И., Хохлов Ю.С.
МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва

Поступила в редакцию 16.05.2017, после переработки 20.06.2017.

В данной работе предлагается представление портфеля ценных бумаг в виде многомерного дробного движения Леви. Эта модель обладает такими свойствами как самоподобие, долговременная зависимость и наличие тяжелых хвостов одномерных распределений компонент портфеля. Подобные свойства были отмечены в эмпирических исследованиях динамики финансовых активов. Одной из важных задач в финансовом анализе является оценка вклада отдельной компоненты в общий риск портфеля. В качестве меры такого вклада используется условное среднее значение отдельной компоненты риска при условии, что задана величина общего риска. Такая мера риска обладает важным свойством когерентности.

Первые результаты на эту тему были получены в работе Панджера для случая многомерного нормального распределения возможных рисков портфеля. В нашей работе мы приводим подробное доказательство этого результата, а также обобщаем его на случай многомерного эллиптически контурированного устойчивого распределения. Получить здесь явные выражения для интересующей нас величины не удается. Мы предлагаем явно вычисленные выражения, но при больших значениях общего риска. Задача последовательно решается для одномерного устойчивого распределения, многомерного эллиптически контурированного устойчивого распределения и многомерного дробного движения Леви.

Ключевые слова: многомерное дробное движение Леви, оценка средних потерь по портфелю.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 3. С. 27–44.
https://doi.org/10.26456/vtpmk177

1. Введение

В этой работе мы будем изучать некоторые инструменты для оптимизации управления инвестиционным портфелем. В большинстве источников такую задачу оптимизации называют задачей распределения капитала (capital allocation).

Задача сводится к выбору распределения денежных средств (в общем случае некоторых ресурсов) в разные направления бизнеса или портфельные компоненты. Эта тематика по ряду причин с каждым годом становится более актуальной. Ужесточение регулирования финансовых рынков, усложнение инвестиционных портфелей и общая нестабильность рынка вынуждает инвесторов искать новые методы и инструменты управления своими активами. В открытых источниках есть большое количество публикаций на эту тему. Тем не менее, исследования различных финансовых организаций показывают, что на сегодняшний день только малая часть инвесторов используют методы оптимального распределения капитала для управления своими активами.

Цель инвестора (владельца портфеля ценных бумаг) состоит в том, чтобы максимизировать доход в целом по портфелю и, как следствие, по каждой отдельной компоненте. В случае, если инвестор попал в ситуацию, в которой его портфель становится убыточным, например, в следствие непредвиденных внешних факторов, целью инвестора становится минимизация убытков. Заранее мы не знаем, как сложится ситуация, поэтому возникает задача прогнозирования как доходов, так и убытков. Причем интересно оценить, какой вклад дает каждая компонента в общее изменение стоимости портфеля, при условии, что оно превысило некоторое заданное значение. Таким образом инвестор сможет оценить, каким компонентам портфеля стоит уделить особое внимание, и при удобном случае, например, заменить более надежными.

Для большей определенности, мы будем рассматривать задачу с точки зрения минимизации убытков. Тогда наша задача будет состоять в оценке убыточности каждой отдельной компоненты, при условии что общий убыток портфеля превысил некоторое значение x.

Основной практической проблемой задачи распределения капитала является правильный выбор модели, по которой будут вестись расчеты всех характеристик. Дело в том, что смоделировать реальный процесс практически невозможно, поэтому все исследователи в этой области стремятся максимально приблизить свою модель к ситуации реального рынка. За время работ в этой области было замечено, что реальные процессы обладают двумя очень важными свойствами: долговременной зависимостью и тяжелыми хвостами плотности распределения.

Мы постараемся подобрать модель, обладающую такими свойствами, и решить для нее нашу задачу. Существуют различные подходы для решения задачи оценки риска портфеля ценных бумаг. Для количественной оценки инвестиций используют различные характеристики. Например, в рамках Базельских рекомендаций для банков предлагается использовать величину VaR (Value-at-Risk). Но, к сожалению, она не обладает важным свойством когерентности. Поэтому в настоящее время используют некоторые другие характеристики. Одной из них является TCE – статистика, позволяющая оценить средние потери по портфелю, выходящие за пределы VaR. TCE представляет собой условное среднее количество потерь, которое может быть понесено в данный период, при условии, что потеря превышает указанное значение (см. [1]). Она определяется по правилу:

$$TCE_X(x) := E(X|X > x)$$

и называется условным математическим ожиданием хвоста распределения (Tail Conditional Expectation = TCE). Интерес к этой статистике обусловлен тем, что благодаря свойству когерентности, TCE очень удобна в случае, когда надо определить, какую часть от общего риска составляет риск по k-й компоненте портфеля.

2. Нормальное распределение

В этом разделе рассматриваются методы вычисления TCE, когда компоненты портфеля имеют нормальное распределение. Эти результаты хорошо известны, цитируются и используются во многих работах, но, как правило, без доказательства. Для удобства дальнейшего использования и чтобы сделать нашу работу замкнутой, мы формулируем заново эти результаты и приводим их полные доказательства.

Всюду далее $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ есть плотность и функция распределения случайной величины со стандартным нормальным распределением.

2.1 Одномерный случай

Пусть мы имеем одну случайную величину X, которая имеет нормальное распределение с параметрами (a, σ^2). Нам необходимо вычислить величину $E(X|X > x)$.

Теорема 1. *Если случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами (a, σ^2), то*

$$E(X|X > x) = a + \sigma \frac{\varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)}. \tag{1}$$

Доказательство. Обозначим $x(a, \sigma) = (x - a)/\sigma$. Тогда

$$E(X|X > x) = \frac{1}{1 - \Phi(x(a,\sigma))} \int_x^\infty y \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{y-a}{\sigma}\right) dy =$$

$$a + \frac{\sigma}{1 - \Phi(x(a,\sigma))} \int_{x(a,\sigma)}^\infty t\varphi(t)dt =$$

$$= a + \frac{\sigma}{1 - \Phi(x(a,\sigma))} \int_{x(a,\sigma)}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2t^2} d(t^2/2) =$$

$$= a + \frac{\sigma}{1 - \Phi(x(a,\sigma))} \int_{[x(a,\sigma)]^2/2}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u} du =$$

$$= a + \sigma \frac{\varphi(x(a,\sigma))}{1 - \Phi(x(a,\sigma))}.$$

□

2.2 Двумерный случай

Пусть случайный вектор $X = (X_1, X_2)$ имеет двумерное нормальное распределение с параметрами $(a_1, a_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_{12})$, где

$$a_1 = E(X_1)\ ,\ a_2 = E(X_2)\ ,\ \sigma_1^2 = D(X_1)\ ,\ \sigma_2^2 = D(X_2)\ ,\ \sigma_{12} = Cov(X_1, X_2).$$

Обозначим $S = X_1 + X_2$. Теперь нам необходимо вычислить величину $E(X_k|S > x)$, $k = 1, 2$.

Теорема 2. *Если случайный вектор $X = (X_1, X_2)$ имеет двумерное нормальное распределение с параметрами $(a_1, a_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_{12})$, то*

$$E(X_k|S > x) = a_k + \frac{\varphi\left(\frac{x-a_S}{\sigma_S}\right)}{1-\Phi\left(\frac{x-a_S}{\sigma_S}\right)} \cdot \frac{Cov(X_k, S)}{\sigma_S}, \tag{2}$$

где $a_S = E(S)$, $\sigma_S^2 = D(S)$.

Доказательство. Случайный вектор (X_k, S) имеет двумерное нормальное распределение с параметрами $(a_k, a_S, \sigma_k^2, \sigma_S^2, Cov(X_k, S)$. Условное распределение с.в. X_k при условии, что $S = z$, есть нормальное распределение со средним

$$a_k + \rho(X_k, S)\frac{\sigma_k}{\sigma_S}(z - a_S)$$

и дисперсией $\sigma_S^2(1-\rho^2(X_k, S))$. С.в. S имеет нормальное распределение со средним a_S и дисперсией σ_S^2.

Обозначим $x_S = (s - a_S)/\sigma_S$.

$$E(X_k|S > x) = \frac{1}{P(S > x)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_x^{\infty} y f_{X_k,S}(y, z) dy dz =$$

$$\frac{1}{P(S > x)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_x^{\infty} y f_{X_k|S}(y|z) f_S(z) dy dz =$$

$$\frac{1}{P(S > x)} \int_x^{\infty} (a_k + \rho(X_k, S)\frac{\sigma_k}{\sigma_S}(z - a_S)) f_S(z) dz =$$

$$a_k + \rho(X_k, S)\sigma_k \frac{1}{P(S > x)} \int_x^{\infty} \frac{(z - a_S)}{\sigma_S} \cdot f_S(z) dz =$$

$$a_k + \frac{Cov(X_k, S)}{\sigma_S} \cdot \frac{1}{P(S > x)} \cdot \int_x^{\infty} \frac{(z - a_S)}{\sigma_S} \cdot f_S(z) dz =$$

$$a_k + \frac{Cov(X_k, S)}{\sigma_S} \cdot \frac{\varphi\left(\frac{x-a_S}{\sigma_S}\right)}{1-\Phi\left(\frac{x-a_S}{\sigma_S}\right)} .$$

На последнем шаге мы использовали результаты доказательства в одномерном случае. □

2.3 Многомерный случай

Пусть случайный вектор $X = (X_1, \ldots, X_d)$ имеет многомерное нормальное распределение с вектором средних $a = (a_1, \ldots, a_d)$ и матрицей ковариаций $\Sigma = (\sigma_{ij})$. Обозначим $S = X_1 + \ldots + X_d$. Вновь необходимо вычислить величину $E(X_k|S > x)$, $k = \overline{1, d}$.

Теорема 3. *Если случайный вектор $X = (X_1, \ldots, X_d)$ имеет многомерное нормальное распределение с параметрами (a, Σ), то*

$$E(X_k|S > x) = a_k + \frac{\varphi\left(\frac{x-a_S}{\sigma_S}\right)}{1-\Phi\left(\frac{x-a_S}{\sigma_S}\right)} \cdot \frac{Cov(X_k, S)}{\sigma_S}, \tag{3}$$

где $a_S = E(S)$, $\sigma_S^2 = D(S)$.

Доказательство. Общий случай легко сводится к двумерному, если рассмотреть случайный вектор (Y_1, Y_2), где $Y_1 = X_k$, $Y_2 = \sum\limits_{j \neq k} X_j$, причем $Y_1 + Y_2 = S$. □

3. Многомерное устойчивое распределение

В этом разделе мы вычисляем TCE для портфеля ценных бумаг, который имеет многомерное устойчивое распределение.

3.1 Устойчивые распределения и процессы Леви

В предлагаемой ниже модели портфеля ценных бумаг важную роль играют устойчивые распределения и процессы Леви. Далее приводятся некоторые известные определения и рассматриваются необходимые свойства таких распределений и процессов.

Определение 1. *Случайный процесс $Y = (Y(t), t \geq 0)$ со значениями в R^d называется процессом Леви, если*

1. *$Y(0) = 0$ п. н.,*
2. *Y имеет независимые приращения,*
3. *Y имеет стационарные приращения, то есть для любых $t \geq 0$, $h > 0$ случайный вектор $Y(t+h) - Y(t)$ имеет распределение, не зависящее от t.*

Очень часто из соображений регулярности требуют выполнения следующего свойства: с вероятностью единица все траектории Y должны быть непрерывными справа и иметь конечные пределы слева. Это не является дополнительным ограничением, так как всегда можно построить реализацию процесса Леви с таким свойством.

Хорошо известно, что все конечномерные распределения процесса Y однозначно определяются по распределению случайного вектора $Y(1)$, которое является безгранично делимым.

Одним из наиболее известных одномерных примеров процессов Леви служит процесс броуновского движения (или винеровский процесс).

Определение 2. *Процесс Леви $B = (B(t), t \geq 0)$ со значениями в R^1 называется процессом броуновского движения (BM), если для любых $t \geq 0, h > 0$ приращение $B(t+h) - B(t)$ имеет гауссовское распределение с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 \cdot h$.*

Если $\sigma^2 = 1$, то имеет место стандартное броуновское движение. Нетрудно показать, что
$$K(t,s) = Cov(Y(t), Y(s)) = \sigma^2 \min(t,s).$$

По определению броуновское движение имеет гауссовские распределения. В силу центральной предельной теоремы такие распределения получаются асимптотически для нормированных сумм независимых и одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией. В случае бесконечных дисперсий приходим к понятию устойчивого распределения.

Определение 3. *Говорят, что случайная величина Y имеет α-устойчивое распределение, если ее характеристическая функция имеет следующий вид:*
$$\varphi(\omega) := E\left[e^{i\omega X}\right] = \exp\{i\mu\omega - \sigma|\omega|^{\alpha}[1 - i\beta sign(\omega)\theta(\omega,\alpha)]\}, \tag{4}$$
где $0 < \alpha \leq 2$, $\sigma \geq 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$, $\mu \in R^1$ и
$$\theta(\omega,\alpha) = \begin{cases} \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) & , \quad \alpha \neq 1, \\ -\frac{2}{\pi}\ln|\omega| & , \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

Параметр α называется *характеристическим показателем* и определяет скорость убывания хвостов распределения. σ и μ являются параметрами *масштаба* и *сдвига* соответственно. β называется *параметром асимметрии.* Если $\beta = 0$, то X имеет симметричное относительно μ распределение. Если $0 < \alpha < 1$, $\mu = 0$ и $\beta = 1$, то случайная величина X положительна с вероятностью 1. В дальнейшем будем говорить, что случайная величина Y имеет стандартное α-устойчивое распределение, если $\mu = 0$ и $\sigma = 1$.

α-устойчивое распределение является безгранично делимым. Оно порождает некоторый процесс Леви.

Определение 4. *Случайный процесс $L_\alpha = (L_\alpha(t), t \geq 0)$ со значениями в R^1 называется α-устойчивым движением Леви, если это процесс Леви, для которого $L_\alpha(1)$ имеет заданное устойчивое распределение.*

Если у распределения $L_\alpha(1)$ $0 < \alpha < 1$, $\beta = 1$, $\mu = 0$, то траектории процесса L_α являются положительными и неубывающими. Такой процесс называется *α-устойчивым субординатором.*

Если $\alpha = 2$, $\mu = 0$, то мы вновь возвращаемся к процессу броуновского движения B.

Между α-устойчивыми движениями Леви с различными α справедливо следующее соотношение.

Теорема 4. *Если $(L_{\alpha_1}(t), t \geq 0)$, $0 < \alpha_1 \leq 2$, есть α_1-устойчивое движение Леви с симметричными распределениями и $(L_{\alpha_2}(t), t \geq 0)$, $0 < \alpha_2 < 1$, есть α_2-устойчивый субординатор, то случайный процесс $Y = (Y(t) := L_{\alpha_1}(L_{\alpha_2}(t)), t \geq 0)$ есть $\alpha_1 \cdot \alpha_2$-устойчивое движение Леви с симметричными распределениями.*

Эта теорема есть прямое следствие результата В.М. Золотарева (см. [7], теорема 3.3.1):

Теорема 5. *Если Y_1 имеет симметричное α_1-устойчивое распределение, $0 < \alpha_1 \le 2$, Y_2 имеет одностороннее α_2-устойчивое распределение, $0 < \alpha_2 < 1$, то случайная величина $Y = Y_1 \cdot Y_2^{1/\alpha_1}$ имеет симметричное $\alpha_1 \cdot \alpha_2$-устойчивое распределение.*

В частности, для $\alpha_1 = 2$ и $0 < \alpha_2 = \alpha/2 < 1$ получается следующий результат.

Теорема 6. *Если $B = (B(t), t \ge 0)$ есть броуновское движение, $L_{\alpha/2} = (L_{\alpha/2}(t), t \ge 0)$ есть $\alpha/2$-устойчивый субординатор, то $L_\alpha = (L_\alpha(t) := B(L_{\alpha/2}(t)), t \ge 0)$, $0 < \alpha < 2$, есть α-устойчивое движение Леви с симметричными распределениями.*

Рассмотрим теперь многомерные аналоги приведенных выше определений и результатов.

Определение 5. *Процесс Леви $B = (B(t), t \ge 0)$ со значениями в R^d называется многомерным процессом броуновского движения (MBM), если для любых $t \ge 0, h > 0$ приращение $B(t+h) - B(t)$ имеет гауссовское распределение с нулевым средним и матрицей ковариаций $\Sigma \cdot h$, где Σ – некоторая положительно определенная матрица.*

Пусть $Y = (Y_1, \ldots, Y_d)$ есть случайный вектор.

Определение 6. *Случайный вектор Y имеет многомерное α-устойчивое распределение с параметром $\alpha \in (0, 2]$, если его характеристическая функция имеет следующий вид: для любого $\omega \in R^d$*

$$\varphi_Y(\omega) = E(\exp(i(Y, \omega))) = \exp(i(a, \omega) - I(\omega)),$$

где

1. *если $\alpha = 2$, то $a \in R^d$ – вектор средних, $I(\omega) = \frac{1}{2}(\Sigma\omega, \omega)$, Σ – матрица ковариаций случайного вектора Y;*
2. *если $0 < \alpha < 2$, то $a \in R^d$ и*

$$I(\omega) = \int\limits_{S^{d-1}} |(\omega, u)|^\alpha \theta_\alpha(\omega, u) \Gamma(du),$$

Γ – конечная мера на сфере S^{d-1} и

$$\theta_\alpha(\omega, u) = \begin{cases} 1 - i \cdot \tan\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \cdot sign(\omega, u) & , \quad \alpha \ne 1, \\ 1 + \frac{2}{\pi} \ln|(\omega, u)| \cdot sign(\omega, u) & , \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

Такое распределение является безгранично делимым и порождает некоторый процесс Леви $Y = (Y(t), t \ge 0)$ со значениями в R^d. Будем называть его многомерным α-устойчивым движением Леви. Для $\alpha = 2$ и $a = 0$ получаем многомерное броуновское движение.

Важным частным случаем являются так называемые многомерные эллиптически контурированные устойчивые распределения, которые кратко будем называть эллиптическими устойчивыми распределениями. Их характеристическая функция имеет вид

$$\varphi_Y(\omega) := E(\exp(i(Y,\omega)) = \exp(i(a,\omega) - (\Sigma\omega,\omega)^{\alpha/2}), \qquad (5)$$

где $a \in R^d$, Σ – некоторая положительно определенная матрица (смотри, например, [8]).

Справедлив следующий аналог теоремы 6:

Теорема 7. *Если $B = (B(t), t \geq 0)$ есть многомерное броуновское движение с матрицей ковариаций Σ, $L_{\alpha/2} = (L_{\alpha/2}(t), t \geq 0)$ есть $\alpha/2$-устойчивый субординатор, то $L_\alpha = (L_\alpha(t) := B(L_{\alpha/2}(t)), t \geq 0)$, $0 < \alpha < 2$, есть многомерное α-устойчивое движение Леви с эллиптически контурированными распределениями.*

Следствие 1. *В условиях теоремы 7 случайный вектор $B(L_{\alpha/2}(1))$ одинаково распределен со случайным вектором*

$$Y := \sqrt{L_{\alpha/2}} \cdot (Z_1, \ldots, Z_d),$$

где с.в. $L_{\alpha/2}$ имеет стандартное одностороннее устойчивое распределение, случайный вектор $(Z_1, \ldots, Z_2)$ имеет многомерное нормальное распределение с нулевыми средними и матрицей ковариаций Σ, причем эти величины независимы.

Следствие 2. *Если случайный вектор Y имеет эллиптически контурированное устойчивое распределение с матрицей Σ, то новый случайный вектор $U = A \cdot Y$, где A есть некоторая неслучайная матрица, также имеет эллиптически контурированное устойчивое распределение с матрицей $A\Sigma A^T$.*

Этот результат легко следует из представления (5) для характеристической функции.

3.2 TCE в случае многомерного устойчивого распределения

Как было отмечено выше, часто в реальных задачах мы имеем портфель ценных бумаг распределение компонент которого имеет так называемые тяжелые хвосты. В этом разделе мы предлагаем некоторую модель для такого портфеля и вычисляем TCE для него.

Начнем со случая одномерного устойчивого распределения. Пусть с.в. X имеет устойчивое распределение с параметром $\alpha > 1$. В этом случае существует конечное математическое ожидание $E(X) = a$. Предположим, что распределение с.в. X симметрично относительно a и имеет параметр масштаба σ. Обозначим через f_0 и F_0 плотность и функцию распределения для стандартного устойчивого распределения, т.е. когда $a = 0$, $\sigma = 1$. Тогда плотность и функция распределения случайной величины X имеют вид:

$$f(y) = \frac{1}{\sigma} f_0\left(\frac{y-a}{\sigma}\right), \ F(y) = F_0\left(\frac{y-a}{\sigma}\right).$$

По определению условного математического ожидания в непрерывном случае

$$E(X|X > x) = \frac{1}{1-F(x)} \int_x^\infty y f(y) dy = \frac{1}{1-F(x)} \int_x^\infty [y - a + a] f(y) dy =$$

$$= a + \frac{\sigma}{1 - F(x)} \int_x^\infty \frac{y-a}{\sigma} f_0\left(\frac{y-a}{\sigma}\right) d\left(\frac{y-a}{\sigma}\right) =$$

$$= a + \frac{\sigma}{1 - F_0(x(a,\sigma))} \int_{x(a,\sigma)}^\infty t f_0(t) dt,$$

где

$$x(a,\sigma) := \frac{x-a}{\sigma}.$$

При больших y

$$f_0(y) \sim c x^{-(\alpha+1)}\ ,\ 1 - F_0(y) \sim \frac{c}{\alpha} y^{-\alpha}\ ,\ \int_y^\infty t f_0(t) dt \sim \frac{c}{\alpha - 1} y^{-(\alpha-1)}\ .$$

Тогда при больших x мы получаем

$$E(X|X > x) \sim a + \frac{\alpha}{\alpha-1}(x-a) = \frac{\alpha x - a}{\alpha - 1}. \tag{6}$$

В этом выражении мы сохранили a, т.к. иногда удобно считать, что a также большое и сравнимо с x.

Теперь рассмотрим случай, когда $X = (X_1, \ldots, X_d)$ есть случайный вектор с многомерным эллиптически контурированным устойчивым распределением с параметром $\alpha > 1$. Как было отмечено выше (смотри следствие к теореме 7), для этого вектора имеет место следующее представление:

$$X = a + \sqrt{L_{\alpha/2}} \cdot Z,$$

где $a = (a_1, \ldots, a_d)$ есть вектор средних, с.в. $L_{\alpha/2}$ имеет одностороннее стандартное устойчивое распределение с параметром $\alpha/2$, $Z = (Z_1, \ldots, Z_d)$ есть случайный вектор с нормальным распределением с нулевыми средними и некоторой матрицей ковариаций Σ, причем эти случайная величина и вектор независимы.

Как и ранее мы начнем с двумерного случая, т.к. случай произвольной размерности легко к нему сводится.

Пусть случайный вектор $X = (X_1, X_2) = a + \sqrt{L} \cdot Y$, где с.в. L и случайный вектор $Y = (Y_1, Y_2)$ независимы, $a = (a_1, a_2)$, L имеет одностороннее устойчивое распределение с параметром $\alpha/2$, Y имеет двумерное нормальное распределение с нулевыми средними и матрицей ковариаций

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Тогда случайный вектор имеет эллиптически контурированное устойчивое распределение с матрицей Σ. При этом компоненты X_1, X_2 имеют одномерные устойчивые распределения с параметром α. Далее предполагается, что $\alpha > 1$.

По определению условного математического ожидания в непрерывном случае имеем

$$E(X_2|X_1 > x) = \frac{1}{1 - P(X_1 > x)} \int_x^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty x_2 \rho(x_1, x_2) dx_2\right] dx_1 =$$

$$= \frac{1}{1-P(X_1>x)}\int_x^\infty\left[\int_{-\infty}^\infty [x_2\rho_{X_1}(x_1)\rho_{X_2|X_1}(x_2|x_1)dx_2\right]dx_1 =$$

$$= a_2 + \frac{1}{1-P(X_1>x)}\int_x^\infty \rho_{X_1}(x_1)\left[\int_{-\infty}^\infty (x_2-a_2)\rho_{X_2|X_1}(x_2|x_1)dx_2\right]dx_1.$$

Выражение в квадратных скобках есть условное математическое ожидание X_2-a_2 при условии $X_1=x_1$. Используя формулу полного математического ожидания и выражение для условного математического ожидания для двумерного нормального распределения, получаем

$$E(X_2-a_2|X_1=x_1) = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2}\cdot(x_1-a_1)\ .$$

Таким образом, получаем

$$E(X_2|X_1>x_1) = a_2 + \frac{1}{1-P(X_1>x)}\cdot\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2}\cdot\int_x^\infty \rho_{X_1}(x_1)dx_1.$$

Выражение

$$\frac{1}{1-P(X_1>x)}\cdot\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2}\cdot\int_x^\infty \rho_{X_1}(x_1)dx_1$$

мы уже вычисляли выше и показали, что оно при больших x ведет себя как $(\alpha x-a_1)/(\alpha-1)$. Отсюда окончательно получаем

$$E(X_2|X_1>x_1) \sim a_2 + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2}\cdot\frac{\alpha x-a_1}{\alpha-1}\ . \tag{7}$$

Пусть $X=(X_1,\ldots,X_d)$ есть случайный вектор с многомерным эллиптически контурированным устойчивым распределением с параметром $\alpha>1$, вектором средних $a=(a_1,\ldots,a_d)$ и матрицей $\Sigma=(\sigma_{ij})$. Обозначим $S=X_1+\ldots+X_d$. Тогда случайный вектор (S,X_k) имеет двумерное эллиптически контурированное распределение (смотри следствие 2 выше) с тем же параметром α, средними $a_S=a_1+\ldots+a_d$ и a_k и матрицей

$$\tilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_S^2 & \sigma_{S,k} \\ \sigma_{S,k} & \sigma_k^2 \end{pmatrix},$$

где $\sigma_{S,k}=\sum\limits_{j=1}^d \sigma_{jk}$, $\sigma_S^2=\sum\limits_{i,j=1}^d \sigma_{ij}$.

Основным результатом этого раздела является следующая

Теорема 8. *Если $X=(X_1,\ldots,X_d)$ есть случайный вектор с многомерным эллиптически контурированным устойчивым распределением с параметром $\alpha>1$, вектором средних $a=(a_1,\ldots,a_d)$ и матрицей $\Sigma=(\sigma_{ij})$, $S=X_1+\ldots+X_d$, то для больших $x>0$*

$$E(X_k|S>x) \sim a_k + \frac{\sigma_{S,k}}{\sigma_S^2}\cdot\frac{\alpha x-a_S}{\alpha-1}\ . \tag{8}$$

Фактически последнее соотношение есть частный случай (7) и поэтому не требует отдельного доказательства.

4. Многомерное дробное движение Леви

Выше мы рассмотрели случай, когда портфель представляет собой распределение некоторого подчиненного процесса, в котором управляемый процесс есть многомерное броуновское движение, а управляющий процесс есть устойчивый субординатор. Далее мы рассматриваем несколько более сложную ситуацию, когда управляемый процесс является многомерным дробным броуновским движением. Это позволяет учесть такие ситуации, когда динамика портфеля проявляет свойство долговременной зависимости. Для формулировки точных определений нам потребуются некоторые вспомогательные понятия.

4.1 Самоподобные процессы

Определение 7. *Вещественный случайный процесс $Y = (Y(t), t \geq 0)$ называется самоподобным с параметром Херста $H \geq 0$, если он удовлетворяет следующему условию:*

$$Y(t) \stackrel{d}{=} c^{-H} Y(ct), \ \forall t \geq 0, \ \forall c > 0,$$

где $\stackrel{d}{=}$ обозначает равенство конечномерных распределений.

Двумя наиболее популярными примерами самоподобных процессов являются дробное броуновское движение (fBM) и α-устойчивое движение Леви.

Определение 8. *Дробное броуновское движение с параметром Херста H есть гауссовский процесс $(B_H(t), t \geq 0)$ с нулевыми средними и ковариационной функцией*

$$K_H(t,s) = \frac{\sigma^2}{2}\left[|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right].$$

При $H = 1/2$ возвращаемся к обычному броуновскому движению.

Определение α-устойчивого движения Леви было дано выше. Для него $H = 1/\alpha$.

Можно определить многомерный аналог самоподобного процесса.

Определение 9. *Случайный процесс $Y = (Y(t) = (Y_1(t), \ldots Y_d(t)), t \in R^1)$ со значениями в R^d называется самоподобным с параметром Херста $H = (H_1, \ldots, H_d) \in (0, \infty)^d$, если он удовлетворяет следующему условию:*

$$Y(t) \stackrel{d}{=} c^{-H} Y(ct) = (c^{-H_1} Y_1(ct_1), \ldots, c^{-H_d} Y_d(ct_d)), \ \forall t \geq 0, \ \forall c > 0,$$

где $\stackrel{d}{=}$ обозначает равенство конечномерных распределений.

Возможны и другие более общие определения. Дополнительную информацию об устойчивых и самоподобных процессах можно найти в книгах [9] и [10].

4.2 Многомерное дробное броуновское движение

Основой модели, которая рассматривается ниже, является многомерное дробное броуновское движение. Далее приводится только его определение. Более подробную информацию можно найти в [5, 6].

Определение 10. *Многомерным дробным броуновским движением (MFBM) с параметром Херста $H \in (0,1)^d$ называется d-мерный случайный процесс $Y = (Y_1(t), \dots Y_d(t), t \in R^1)$, который обладает следующими свойствами:*

1. *Y есть гауссовский процесс;*
2. *Y является самоподобным с параметром Херста H;*
3. *Y имеет однородные приращения.*

В данной работе наиболее интересен случай, когда $1/2 < H_p < 1$ для всех $p : 1 \le p \le d$. В этой ситуации при дополнительном ограничении, что процесс Y является обратимым по времени, он имеет нулевые средние и следующие ковариационные функции:

$$E(Y_p(s)Y_q(t)) = \frac{\sigma_{pq}}{2}\left[|s|^{H_p+H_q} + |t|^{H_p+H_q} - |t-s|^{H_p+H_q}\right], \tag{9}$$

где $\Sigma = (\sigma_{pq})$ есть некоторая положительно определенная матрица. В частности,

$$D(Y_p(t)) = E(|Y_p(t)|^2) = \sigma_p^2 \cdot |t|^{2H_p}. \tag{10}$$

Далее многомерное дробное броуновское движение с параметром H будем обозначать, как и в одномерном случае, B_H.

4.3 Многомерное дробное движение Леви

Определение этого процесса было впервые предложено в работе [11], где рассматривалось его приложение к некоторой задаче из теории телетрафика. Одномерный аналог этого процесса был определен в работе [12].

Пусть $(B_H(t), t \ge 0)$ есть многомерное дробное броуновское движение с параметром Херста H и матрицей ковариаций Σ; $(L_\alpha(t), t \ge 0)$ – стандартный α-устойчивый субординатор; процессы B_H и L_α независимы.

Определение 11. *Многомерным дробным движением Леви называется случайный процесс $X = (X(t), t \ge 0)$ со значениями в R^d такой, что*

$$X(t) := B_H(L_\alpha(t)),\ t \ge 0.$$

В работе [11] показано, что построенный выше случайный процесс является самоподобным с параметром Херста H/α и имеет однородные приращения. Там же доказан следующий полезный для дальнейших приложений результат.

Предложение 1. *Для любого $t > 0$*

$$X(t) \stackrel{d}{=} ((L_\alpha(t))^{H_1} \cdot Y_1, \dots, (L_\alpha(t))^{H_d} \cdot Y_d),$$

где случайный вектор $Y = (Y_1, \dots, Y_d)$ имеет многомерное нормальное распределение с нулевым средним и матрицей ковариаций Σ, причем $L_\alpha(t)$ и Y независимы.

Этот результат легко следует из определения многомерного дробного броуновского движения и независимости B_H и L_α.

В частности имеет место следующее

Предложение 2. *Если $B = (B(t), t \geq 0)$ есть многомерное броуновское движение с матрицей ковариаций Σ, то $H_1 = \ldots = H_d = 1/2$ и для любого $t > 0$ случайный вектор*

$$X(t) \stackrel{d}{=} (L_\alpha(t))^{1/2} \cdot (Y_1, \dots, Y_d)$$

имеет многомерное α-устойчивое эллиптически контурированное распределение с матрицей ковариаций Σ.

В случае дробного броуновского движения случайный вектор $X(t)$ имеет распределение, отличное от устойчивого, если все $H_k > 1/2$. Для доказательства достаточно рассмотреть одну из компонент этого вектора. Как отмечалось выше, случайная величина $(L_\alpha(t))^{1/2}B(1)$ имеет симметричное устойчивое распределение с характеристическим показателем $\alpha/2$. Но случайные величины $(L_\alpha(t))^{1/2}B(1)$ и $(L_\alpha(t))^{H_1}B(1)$ имеют разные распределения, если $H_1 \neq 1/2$.

Замечание 1. Параметр Херста H/α определенного выше процесса X может быть любым положительным числом. Будем предполагать, что $1/2 < H_k/\alpha < 1$, $k = 1, \dots, d$. В этом случае рассматриваемый процесс имеет конечные математические ожидания и обладает свойством долговременной зависимости.

4.4 Асимптотика хвостов распределений многомерного дробного движения Леви

В этом разделе изучается поведение хвостов одномерных сечений дробного движения Леви, построенного выше.

В силу свойства самоподобия достаточно рассмотреть только распределение случайного вектора $X(1)$. Рассмотрим случайную величину $Z_\alpha := L^1_\alpha$. Без ограничения общности можно считать, что она имеет стандартное одностороннее α-устойчивое распределение. В силу предложения 1 имеем

$$X(1) \stackrel{d}{=} ((Z_\alpha)^{H_1} \cdot Y_1, \dots, (Z_\alpha)^{H_d} \cdot Y_d),$$

где случайный вектор $Y = (Y_1, \dots, Y_d)$ имеет многомерное нормальное распределение со средним ноль и матрицей ковариаций Σ, причем Z_α и Y независимы. Покажем, что этот вектор имеет распределения, отличные от устойчивых. Для этого достаточно проверить, что это верно для отдельно взятой координаты.

Предположим противное: первая координата $V := (Z_\alpha)^{H_1}Y_1$ имеет симметричное устойчивое распределение с показателем $0 < \alpha_1 < 2$. Тогда, как показано выше, существует такая независимая от Y_1 случайная величина S, которая имеет одностороннее устойчивое распределение с показателем $\alpha_1/2$, что

$$V \stackrel{d}{=} S^{1/2} Y_1.$$

Отсюда получаем

$$(Z_\alpha)^{H_1} Y_1 \stackrel{d}{=} S^{1/2} Y_1.$$

Нормальное распределение обладает свойством идентифицируемости для масштабных смесей. В силу этого получаем

$$(Z_\alpha)^{H_1} \stackrel{d}{=} S^{1/2} \text{ и } (Z_\alpha)^{2H_1} \stackrel{d}{=} S.$$

Но, как хорошо известно, если случайная величина Z_α имеет устойчивое распределение, то случайная величина S имеет распределение, отличное от устойчивого. Это противоречие доказывает нужное утверждение.

Тем не менее можно показать, что хвосты распределений координат вектора $X(1)$ ведут себя в точности так же, как хвосты устойчивых распределений. Для доказательства этого свойства потребуется результат, известный как теорема Бреймана [13].

Теорема 9. *Пусть X и Y есть независимые неотрицательные случайные величины и*

$$\bar{F}(x) := P(X > x) = x^{-\alpha} \cdot L(x), \ x \to \infty,$$

где $\alpha > 0$, L – медленно меняющаяся функция, $E(Y^{\alpha+\varepsilon}) < \infty$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда при больших $x > 0$

$$\bar{H}(x) := P(XY > x) \sim E(Y^\alpha) \cdot \bar{F}(x).$$

Применим этот результат к распределению k-й координаты вектора $X(1)$. Если Z_α имеет стандартное α-устойчивое распределение, то для больших $x > 0$

$$P(Z_\alpha > x) \sim C(\alpha) \cdot x^{-\alpha},$$

где

$$C(\alpha) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \Gamma(\alpha).$$

(Смотри теорему 2.4.1 из [14].) Тогда, используя теорему Бреймана, для больших $x > 0$ получаем

$$P((Z_\alpha)^{H_k} Y_k > x) = \frac{1}{2} P((Z_\alpha)^{H_k} |Y_k| > x) =$$

$$\frac{1}{2} P(Z_\alpha |Y_k|^{1/H_k} > x^{1/H_k}) \sim \frac{1}{2} E(|Y_k|^{\alpha/H_k}) \cdot P(Z_\alpha > x^{1/H_k}) \sim$$

$$\frac{1}{2} C(\alpha) E(|Y_k|^{\alpha/H_k}) \cdot x^{-\alpha/H_k} = \frac{1}{2} C(\alpha) E(|Y_k|^{1/H_k^1}) \cdot x^{-1/H_k^1}.$$

Замечание 2. Нетрудно видеть, что распределение случайного вектора имеет плотность. С помощью рассуждения, аналогичного приведенному выше, можно показать, что плотность компоненты $X_k(1)$ имеет следующую асимптотику:

$$\tilde{C}(\alpha, \Sigma) \cdot x^{-(1/H_k^1 + 1)}. \tag{11}$$

4.5 TCE в случае многомерного дробного движения Леви

Пусть случайный вектор $X = (X_1, \ldots, X_d)$, описывающий убытки портфеля, имеет следующую структуру:

$$X = X(1) + a,$$

где $a = (a_1, \ldots, a_d) \in R^d$, а случайный вектор $X(1)$ и свойства его распределения описаны в разделе 4.3. Дословно повторяя рассуждения из параграфа 3 и используя то, что асимптотика хвостов та же, что и в случае устойчивых распределений, получаем следующий результат.

Теорема 10. *Если $X = (X_1, \ldots, X_d)$ есть случайный вектор, описанный выше с параметром $\alpha > 1$, вектором средних $a = (a_1, \ldots, a_d)$ и матрицей $\Sigma = (\sigma_{ij})$, $S = X_1 + \ldots + X_d$, то для больших $x > 0$*

$$E(X_k|S > x) \sim a_k + \frac{\sigma_{S,k}}{\sigma_S^2} \cdot \frac{\alpha x - a_S}{\alpha - 1} \ . \tag{12}$$

Заключение

Полученное представление для оценки вклада компоненты портфеля, заданного с помощью многомерного дробного движения Леви, позволяет осуществить расчет величины TCE и ее дальнейшее применение. Предложенная модель учитывает два важных свойства распределения портфеля ценных бумаг: свойство долговременной зависимости и тяжелые хвосты распределения.

Список литературы

[1] Landsman Z., Valdes E.A. Tail Conditional Expectations for Elliptical Distributions. Technical Report 02-04, October 2002.

[2] Королев В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я. Математические основы теории риска. М.: Физматлит, 2007.

[3] Panjer H.H. Measurement of Risk, Solvency Requirements, and Allocation of Capital within Financial Conglomerates. Institute of Insurance and Pension Research, University of Waterloo Research Report 01-15, 2002.

[4] Румянцева О.И., Хохлов Ю.С. Оценка вклада компоненты в общий риск по портфелю, заданному многомерным дважды стохастическим процессом // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2013. № 3(30). С. 65–71.

[5] Stoev S., Taqqu M. How rich is the class of multifractional brownian motions? // Stochastic Processes and their Applications. 2006. Vol. 116. Pp. 200–221. https://doi.org/10.1016/j.spa.2005.09.007

[6] Amblard P.O., Coeurjolly J.F., Lavancier F., Philippe A. Basic properties of the multivariate fractional Brownian motion // Bulletin Society Mathematique de France, Seminaires et Congres. 2012. Vol. 28. Pp. 65–87.

[7] Золотарев В.М. Одномерные устойчивые распределения. М.: Наука, 1983. 304 с.

[8] Nolan J.P. Multivariate elliptically contoured stable distributions: theory and estimation // Computational Statistics. 2013. Vol. 28, № 5. Pp. 2067–2089. https://doi.org/10.1007/s00180-013-0396-7

[9] Samorodnitsky G., Taqqu M.S. Stable Non-Gaussian Random Processes. London: Chapman & Hall, 1994. 632 p.

[10] Embrechts P., Maejima M. Selfsimilar Process. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2002. 111 p.

[11] Хохлов Ю.С. Многомерное дробное движение Леви и его приложения // Информатика и ее применения. 2016. Т. 10, № 2. С. 98–106. https://doi.org/10.14357/19922264160212

[12] De Nikola C., Khokhlov Yu.S., Pagano M., Sidorova O.I. Fractional Levy motion with dependent increments and its application to network traffic modeling // Информатика и ее применения. 2012. Т. 6, № 3. С. 59–63.

[13] Breiman L. On some limit theorems similar to the arc-sin law // Теория вероятностей и ее применения. 1965. Т. 10, № 2. С. 351–359.

[14] Ибрагимов И.А., Линник Ю.В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965. 524 с.

Образец цитирования

Румянцева О.И., Хохлов Ю.С. Оценка вклада компоненты в общий риск по портфелю, заданному многомерным дробным движением Леви // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 3. С. 27–44. https://doi.org/10.26456/vtpmk177

Сведения об авторах

1. **Румянцева Ольга Игоревна**
аспирантка кафедры математической статистики МГУ имени М.В. Ломоносова.

Россия, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 52, МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК. E-mail: rumyantseva_olga@mail.ru.

2. **Хохлов Юрий Степанович**
профессор кафедры математической статистики МГУ имени М.В. Ломоносова.

Россия, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 52, МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК. E-mail: yskhokhlov@yandex.ru.

ESTIMATION OF THE CONTRIBUTION OF A COMPONENT TO THE OVERALL RISK FOR A PORTFOLIO DEFINED BY THE MULTIVARIATE FRACTIONAL LEVY MOTION

Rumyantseva Olga Igorevna
PhD student at Mathematical Statistics department, Lomonosov MSU.
Russia, 119991, Moscow, GSP-1, 1-52, Leninskiye Gory, MSU.
E-mail: rumyantseva_olga@mail.ru

Khokhlov Yury Stepanovich
Professor at Mathematical Statistics department, Lomonosov MSU.
Russia, 119991, Moscow, GSP-1, 1-52, Leninskiye Gory, MSU.
E-mail: yskhokhlov@yandex.ru

Received 16.05.2017, revised 20.06.2017.

The representation of securities portfolio in the form of multivariate fractional Levy motion is considered. This model has properties such as self-similarity, long term dependence and heavy-tails of one-dimensional distributions of portfolio components. Such properties have been discovered in empirical studies of the financial assets dynamics. One of the important problems in financial analysis is to estimate the contribution of individual components in the total risk of the portfolio. As a measure of this contribution uses the conditional average value of the individual risk components under given total risk of the portfolio. This measure of risk has very important property of of coherence. The first results on this subject were obtained in the paper by Panjer for the case of multivariate normal distribution for possible risks of the portfolio. In our paper we give a detailed proof of this result, and generalize it in case of multivariate elliptical stable distribution. It is impossible to get explicit expressions in this situation. We propose some explicit expression for large values of the total risk. The task is solved sequentially for one-dimensional stable distribution, multivariate elliptical stable distributions and multivariate fractional Levy motion.

Keywords: multivariate fractional Levy motion, portfolio tail conditional expectation.

Citation

Rumyantseva O.I., Khokhlov Yu.S. Estimation of the contribution of a component to the overall risk for a portfolio defined by the multivariate fractional Levy motion. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2017, no. 3, pp. 27–44. (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk177

References

[1] Landsman Z., Valdes E.A. *Tail Conditional Expectations for Elliptical Distributions.* Technical Report 02-04, October 2002.

[2] Korolev V.Yu., Bening V.E., Shorgin S.Ya. *Matematicheskie Osnovy Teorii Riska* [Mathematical Foundations of Risk Theory]. Fizmatlit Publ., Moscow, 2007. 591 p. (in Russian)

[3] Panjer H.H. *Measurement of Risk, Solvency Requirements, and Allocation of Capital within Financial Conglomerates*. Institute of Insurance and Pension Research, University of Waterloo Research Report 01-15, 2002.

[4] Rumyantseva O.I., Khokhlov Yu.S. Assessing contribution of the components in the overall risk of the portfolio specified by multidimensional twice stochastic process. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2013, no. 3 (30), pp. 65–71. (in Russian)

[5] Stoev S., Taqqu M. How rich is the class of multifractional brownian motions? *Stochastic Processes and their Applications*, 2006, vol. 116, pp. 200–221. https://doi.org/10.1016/j.spa.2005.09.007

[6] Amblard P.O., Coeurjolly J.F., Lavancier F., Philippe A. Basic properties of the multivariate fractional Brownian motion. *Bulletin Society Mathematique de France, Seminaires et Congres*, 2012, vol. 28, pp. 65–87.

[7] Zolotarev B.M. *Odnomernye Ustojchivye Raspredelenija* [One-dimensional Stable Distributions]. Nauka Publ., Moscow, 1983. 304 p. (in Russian)

[8] Nolan J.P. Multivariate elliptically contoured stable distributions: theory and estimation. *Computational Statistics*, 2013, vol. 28(5), pp. 2067–2089. https://doi.org/10.1007/s00180-013-0396-7

[9] Samorodnitsky G., Taqqu M.S. *Stable Non-Gaussian Random Processes*. Chapman & Hall, London, 1994. 632 p.

[10] Embrechts P., Maejima M. *Selfsimilar Process*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2002. 111 p.

[11] Khokhlov Yu.S. Multivariate fractional Levy motion and its applications. *Informatika i Ee Primeneniya* [Informatics and its Applications], 2016, vol. 10(2), pp. 98–106. (in Russian) https://doi.org/10.14357/19922264160212

[12] De Nikola C., Khokhlov Yu.S., Pagano M., Sidorova O.I. Fractional Levy motion with dependent increments and its application to network traffic modeling. *Informatika i Ee Primeneniya* [Informatics and its Applications], 2012, vol. 6(3), pp. 59–63.

[13] Breiman L. On some limit theorems similar to the arc-sin law. *Theory of Probability and its Applications*, 1965, vol. 10(2), pp. 323–331. https://doi.org/10.1137/1110037

[14] Ibragimov I.A., Linnik Ju.V. *Nezavisimye i Stacionarno Svjazannye Velichiny* [Independent and Permanently Connected Quantities]. Nauka Publ., Moscow, 1965. 524 p.