УДК 519.2

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНОГО УРОВНЯ ФРАНШИЗЫ

Королев Р.А., Карамова Л.К.
Российский университет дружбы народов, г. Москва

Поступила в редакцию 28.06.2017, после переработки 29.07.2017.

В работе рассмотрена задача определения оптимального размера франшизы при частичном страховании ущерба. В теореме 1 указан случай, когда функция частичного возмещения ущерба не зависит от вида функции полезности. В теореме 3 рассмотрен случай, когда страховая премия зависит от выбора размера франшизы. Для каждого случая приведены приближенные формулы расчета оптимального уровня франшизы (теоремы 2, 4 и 5).

Ключевые слова: франшиза, страховая премия, актуарная стоимость, коэффициент нагрузки, детерминированный эквивалент, экспоненциальная функция полезности, экспоненциальное распределение.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 3. С. 61–72.
https://doi.org/10.26456/vtpmk179

Введение

В данной работе рассматривается задача выбора оптимального уровня франшизы со стороны клиента страховой компании, в случае, когда функция частичного возмещения ущерба носит пороговый характер. Последняя возникает в модели Эрроу следующего вида. Пусть w (wealth) – начальный капитал предприятия (клиента страховой компании), $u(y)$ (utility) – его функция полезности от дохода y (yield), а $X \geq 0$ – случайные убытки предприятия. Страховая компания предлагает предприятию частичное возмещение ущерба в виде функции $I(x)$, $0 \leq I(X) \leq X$ п.в., за плату p (premium) такую, что $p = \mathsf{E}I(X) \leq \mathsf{E}X$. Предприятие вместо случайных потерь X получает меньшие потери вида $X - I(X)$ за уплату страховой премии p. Оптимальность по Эрроу понимается в следующем смысле: требуется определить такую функцию $I^*(x)$, что

$$0 \leq I^*(X) \leq X, \tag{1}$$

$$p = \mathsf{E}I^*(X), \tag{2}$$

$$w - X + I(X) - p \preceq w - X + I^*(X) - p,$$

или

$$\mathsf{E}u(w - X + I(X) - p) \leq \mathsf{E}u(w - X + I^*(X) - p) \tag{3}$$

для любой функции $I(x)$, удовлетворяющей условиям (1)-(2).
Справедлива следующая теорема Эрроу. Доказательство Эрроу содержится в [1,2]. Здесь приведено доказательство из работы [3].

Теорема 1 (Эрроу, 1963). *Пусть $u'(y) \geq 0$, $u''(y) \leq 0$, случайные убытки $X \geq 0$. Тогда оптимальная по Эрроу функция, удовлетворяющая условиям (1)-(3), существует и имеет вид*

$$I^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq l^*, \\ x - l^*, & x > l^*, \end{cases} \tag{4}$$

где l^* определяется из условия (2) и $p > 0$ задано.

Доказательство. Теорема Лагранжа позволяет записать неравенство

$$u(y) - u(z) = u'(\xi)(y - z) \leq (y - z)u'(z), \ \forall y, \ z, \ \xi \in (y, z) \text{ или } \xi \in (z, y).$$

Возьмем в этом неравенстве $y = w - x + I(x) - p$ и $z = w - x + I^*(x) - p$, получим

$$u(w - x + I(x) - p) - u(w - x + I^*(x) - p) \leq (I(x) - I^*(x))u'(w - x + I^*(x) - p). \tag{5}$$

С другой стороны верно неравенство

$$(I(x) - I^*(x))u'(w - x + I^*(x) - p) \leq (I(x) - I^*(x))u'(w - l^* - p). \tag{6}$$

Из неравенств (5) и (6) для любого x имеем

$$u(w - x + I(x) - p) - u(w - x + I^*(x) - p) \leq (I(x) - I^*(x))u'(w - l^* - p).$$

Подставим в последнее неравенство случайную величину X и возьмем от обеих частей математическое ожидание:

$$\mathsf{E}u(w - X + I(X) - p) - \mathsf{E}u(w - X + I^*(X) - p) \leq u'(w - l^* - p)\mathsf{E}(I(X) - I^*(X)). \tag{7}$$

Так как по предположению $\mathsf{E}I(X) = \mathsf{E}I^*(X)$, то доказательство закончено. □

Замечание 1. Оптимальная по Эрроу функция $I^*(X)$ имеет пороговый характер и не зависит от начального капитала w и функции полезности клиента $u(y)$. При этом l^* выбирается из условия $\mathsf{E}I^*(X) = p$, где p – установленная страховая премия.

Замечание 2. Рассматривая функции $I(x)$ с одинаковой актуарной стоимостью $\mathsf{E}I(X)$, условие (2) может быть ослаблено. На практике в общем случае выполняется соотношение $p > \mathsf{E}I(X)$. Для выполнения утверждения теоремы достаточно потребовать, чтобы страховая компания предлагала два страховых контракта с одинаковой актуарной стоимостью $\mathsf{E}I(X)$ по одной цене p (см. (7)). В таком случае, условие (2) будет иметь вид:

$$\mathsf{E}I_1(X) = \mathsf{E}I_2(X) \Leftrightarrow p_1 = p_2, \ \forall \ I_1(x), \ I_2(x). \tag{2$'$}$$

Теорема 2. *Пусть премия пропорциональна актуарной стоимости страхового контракта, $p = \alpha\mathsf{E}I(X)$, $\alpha \geq 1$. Тогда оптимальное значение франшизы l^* вычисляется по следующим приближенным формулам*

$$l^* \approx \mathsf{E}X + \frac{\int_{\mathsf{E}X}^{\infty}(x - \mathsf{E}X)\,\mathrm{d}F(x) - p/\alpha}{1 - F(\mathsf{E}X)} \approx \mathsf{E}X + \frac{\frac{\mathsf{E}X}{2}F(\mathsf{E}X) - p/\alpha}{1 - F(\mathsf{E}X)}, \tag{8}$$

где $F(x)$ – функция распределения случайной величины X и $X \geq 0$, $\mathsf{E}X < \infty$.

Доказательство. По предположению $p = \alpha \mathsf{E} I(X)$, $\alpha \geq 1$. Тогда l^* определяется из уравнения

$$p = \alpha \mathsf{E}[(X - l^*)\mathbf{1}_{(l^*,\infty)}(X)] = \alpha \int_{l^*}^{\infty} (x - l^*)\, \mathrm{d}F(x).$$

Введем в рассмотрение функцию $g(l)$,

$$g(l) = \int_{l}^{\infty} (x - l)\, \mathrm{d}F(x).$$

Раскладывая ее по формуле Тейлора в точке $\mathsf{E}X$, получим

$$g(l) \approx g(\mathsf{E}X) + g'(\mathsf{E}X)(l - \mathsf{E}X) = \int_{\mathsf{E}X}^{\infty} (x - \mathsf{E}X)\, \mathrm{d}F(x) + (l - \mathsf{E}X) g'(\mathsf{E}X).$$

Вычислим $g'(l)$, интегрируя по частям, получим

$$g(l) = -\int_{l}^{\infty} (x - l)\, \mathrm{d}(1 - F(x)) = -(x - l)(1 - F(x))\Big|_{l}^{\infty} + \int_{l}^{\infty} (1 - F(x))\, \mathrm{d}x.$$

Так как $\mathsf{E}X < \infty$, то $\lim_{x\to\infty} x(1 - F(x)) = 0$. Тогда по формуле Ньютона-Лейбница

$$g'(l) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\Big(\int_{l}^{\infty} (1 - F(x))\, \mathrm{d}x\Big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\Big(\int_{l}^{0} + \int_{0}^{\infty}\Big) = -(1 - F(l))(l)' = F(l) - 1.$$

Таким образом, для $g(l)$ справедливо приближение

$$g(l) \approx \int_{\mathsf{E}X}^{\infty} (x - \mathsf{E}X)\, \mathrm{d}F(x) + (l - \mathsf{E}X)(F(\mathsf{E}X) - 1).$$

Используя полученное выражение и условие теоремы $p = \alpha g(l)$, получаем первое соотношение

$$l^* \approx \mathsf{E}X + \frac{\int_{\mathsf{E}X}^{\infty} (x - \mathsf{E}X)\, \mathrm{d}F(x) - p/\alpha}{1 - F(\mathsf{E}X)} = \mathsf{E}X - \frac{\int_{0}^{\mathsf{E}X} (x - \mathsf{E}X)\, \mathrm{d}F(x) + p/\alpha}{1 - F(\mathsf{E}X)},$$

так как для $X \geq 0$ справедливо

$$\int_{0}^{\infty} (x - \mathsf{E}X)\, \mathrm{d}F(x) = 0.$$

Воспользуемся теоремой о среднем значении, чтобы представить интеграл в числителе следующим образом

$$\int_{0}^{\mathsf{E}X} (x - \mathsf{E}X)\, \mathrm{d}F(x) = C(F(\mathsf{E}X) - F(0)) \approx -\frac{\mathsf{E}X}{2} F(\mathsf{E}X),$$

где $C \in [-\mathsf{E}X, 0]$, а $F(0) = 0$, т.к. $X \geq 0$. Отсюда получаем второе соотношение

$$l^* \approx \mathsf{E}X + \frac{\frac{\mathsf{E}X}{2} F(\mathsf{E}X) - p/\alpha}{1 - F(\mathsf{E}X)}.$$

$\square$

1. Выбор оптимального уровня франшизы в модели Эрроу

Каждый раз, когда в (4) размер франшизы l^* фиксирован, величина $g_0 \equiv \mathsf{E}I^*(X)$ определена, и для всех страховых контрактов (1) с той же актуарной стоимостью $\mathsf{E}I(X) = g_0$ при предположении, что они все имеют одинаковую премию p, страховой контракт вида (4) является оптимальным в смысле (3). В этом разделе рассматриваются страховые контракты вида (4), которые различаются уровнем франшизы l. Всюду далее такие контракты обозначаются $I(x)$. В предыдущем разделе премия определялась экзогенно, теперь же размер премии зависит от уровня франшизы l. На практике такая связь обуславливается зависимостью p от величины частичного возмещения ущерба I, например, через актуарную стоимость $\mathsf{E}I(X)$.

Предположим, что страховая компания предлагает частичное возмещение ущерба $X \geq 0$ в виде функции (4) для любого уровня франшизы $l \in [0, \infty)$, которое предприятие выбирает самостоятельно. Пусть страховая премия задается функцией $p(l)$, которая является убывающей по l, непрерывной и дважды дифференцируемой. Дополнительно предполагается, что выбор предприятием уровня франшизы не влияет на вид функции $p(l)$.

Актуарная стоимость страхового контракта $I(x)$ вида (4) определяется как и ранее по формуле

$$g(l) = \mathsf{E}I(X) = \int_l^\infty (x - l)dF(x)$$

и зависит от выбора уровня франшизы l. Заметим, что дифференцирование $g(l)$ дает

$$g'(l) = F(l) - 1 < 0$$

и, если случайная величина X имеет абсолютно непрерывное распределение, то

$$g''(l) = f(l) \geq 0,$$

где плотность распределения $f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x)$ почти всюду.

Пример 1. Поскольку функция $g(l)$ убывает по l, непрерывна и дважды дифференцируема в случае, когда X имеет абсолютно непрерывное распределение, то в качестве примера функции, описывающей страховую премию, можно указать $p(l) = \alpha g(l)$, $\alpha \geq 1$.

В конце планируемого срока действия страхового контракта экономический результат предприятия будет

$$Y(X, l) \equiv w - p(l) - X + I(X).$$

Задача предприятия состоит в выборе оптимального уровня франшизы L, чтобы максимизировать ожидаемую полезность от конечного экономического результата (см. [4])

$$L = \arg\max_l \mathsf{E}u(Y(X, l)).$$

Теорема 3 (Schlesinger, 1981)**.** *Пусть клиент страховой компании имеет несклонность к риску, $u'(y) > 0$, $u''(y) < 0$, случайный ущерб $X \geq 0$. Тогда оптимальный уровень франшизы L определяется из соотношения*

$$p'(l)\mathsf{E}\Big[\frac{u'(w-p(l)-X+I(X))}{u'(w-p(l)-l)}\Big] = g'(l), \tag{9}$$

при условии $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}l^2}\mathsf{E}u(Y(X,l)) < 0$.

Доказательство. Задача заключается в максимизации функции

$$v(l) = \mathsf{E}u(Y(X,l)) = \int_0^l u(w-p(l)-x)\,\mathrm{d}F(x) + u(w-p(l)-l)\int_l^\infty \mathrm{d}F(x). \tag{10}$$

Необходимое условие на экстремум имеет вид $v'(l) = 0$, рассмотрим $v'(l)$,

$$v'(l) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\Big(\int_0^l u(w-p(l)-x)\,\mathrm{d}F(x)\Big) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\Big(u(w-p(l)-l)(1-\int_0^l \mathrm{d}F(x))\Big) =$$

$$= \int_0^l \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}u(w-p(l)-x)\,\mathrm{d}F(x) + u(w-p(l)-l)f(l) +$$
$$+ \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}u(w-p(l)-l)\Big)\int_l^\infty \mathrm{d}F(x) + u(w-p(l)-l)(-f(l)) =$$

$$= -p'(l)\int_0^l u'(w-p(l)-x)\,\mathrm{d}F(x) + u'(w-p(l)-l)(-p'(l)-1)\int_l^\infty \mathrm{d}F(x) =$$

$$= -p'(l)\Big(\int_0^l u'(w-p(l)-x)\,\mathrm{d}F(x) + u'(w-p(l)-l)\int_l^\infty \mathrm{d}F(x)\Big) -$$
$$- u'(w-p(l)-l)\int_l^\infty \mathrm{d}F(x) =$$

$$= -p'(l)\Big(\int_0^l u'(w-p(l)-x)\,\mathrm{d}F(x) + \int_l^\infty u'(w-p(l)-l)\,\mathrm{d}F(x)\Big) +$$
$$+ u'(w-p(l)-l)(F(l)-1) =$$
$$= -p'(l)\mathsf{E}u'(Y(X,l)) + g'(l)u'(w-p(l)-l). \tag{11}$$

Отсюда следует утверждение теоремы при условии $v''(l) < 0$. □

В следующей теореме рассмотрены принципы определения страховой премии (см. [6]).

Теорема 4. *Пусть клиент страховой компании имеет несклонность к риску, которая описывается функцией полезности вида $u(y) = a - b\exp\{-\beta y\}$, b, $\beta > 0$, $a \in \mathbb{R}^1$, случайный ущерб $X \geq 0$.*

1. *Согласно принципу ожидаемого значения оптимальный уровень франшизы L определяется из соотношения*

$$\int_0^l \exp\{\beta(x-l)\}\,\mathrm{d}F(x) - F(l) + \frac{\lambda}{1+\lambda} = 0, \tag{12}$$

где $\lambda > 0$ – коэффициент нагрузки.
При условии, что β достаточно мало можно использовать приближенную формулу

$$L \approx \mathsf{E}X + \frac{\int_0^{\mathsf{E}X} \exp\{\beta(x-\mathsf{E}X)\}\,\mathrm{d}F(x) - F(\mathsf{E}X) + \frac{\lambda}{1+\lambda}}{\beta\exp\{-\beta\mathsf{E}X\}\int_0^{\mathsf{E}X}\exp\{\beta x\}\,\mathrm{d}F(x)}. \tag{13}$$

2. *Согласно принципу вариации оптимальный уровень франшизы L определяется из соотношения*

$$\Big(F(l)\big(1-2\lambda\int_l^\infty (x-l)\,\mathrm{d}F(x)\big)-1\Big)\mathsf{E}e^{\beta(X-I(X)-l)} = F(l)-1, \tag{14}$$

где $\lambda > 0$ – коэффициент нагрузки.

Доказательство. Доказательство произведено с указанным порядком:
1. Согласно принципу ожидаемого значения премия определяется по формуле

$$p(l) = (1+\lambda)\mathsf{E}I(X) = (1+\lambda)g(l),$$

где $\lambda > 0$ – коэффициент нагрузки и $g(l) = \int_l^\infty (x-l)\,\mathrm{d}F(x)$ как и ранее. Поскольку $u'(y) = b\beta\exp\{-\beta y\}$ и $p'(l) = (1+\lambda)g'(l)$, то из (9) имеем

$$\mathsf{E}e^{\beta(X-I(X)-l)} = \frac{1}{1+\lambda}.$$

2. Согласно принципу вариации премия определяется по формуле

$$p(l) = \mathsf{E}I(X) + \lambda\mathsf{D}I(X) = g(l) + \lambda\int_l^\infty (x-l)^2\,\mathrm{d}F(x) - \lambda g^2(l),$$

где $\mathsf{D}Y$ обозначает дисперсию случайной величины Y. Из (9) имеем

$$\big(F(l)(1-2\lambda g(l))-1\big)\mathsf{E}e^{\beta(X-I(X)-l)} = F(l)-1. \tag{15}$$

$\square$

2. Формула для определения оптимального уровня франшизы

Для предложенной ниже формулы расчета оптимального уровня франшизы необходимо ввести понятие детерминированного эквивалента.

Определение 1. *Пусть Y – случайная величина, $u(y)$ – функция полезности, тогда число $C^* \equiv C^*_Y$ называется детерминированным эквивалентом случайной величины Y, если выполняется соотношение*

$$u(C^*_Y) = \mathsf{E}u(Y). \tag{16}$$

Пусть как и ранее экономический результат предприятия имеет вид

$$Y(X,l) \equiv w - p(l) - X + I(X),$$

и предприятие стремится максимизировать ожидаемую полезность от конечного экономического результата

$$L = \arg\max_l \mathsf{E}u(Y(X,l))$$

с помощью выбора оптимального уровня франшизы L. Для определения приближенной формулы оптимального уровня франшизы L использован метод Ньютона (см., например, [5]).

Теорема 5. *Пусть клиент страховой компании имеет несклонность к риску, $u'(y) > 0$, $u''(y) < 0$, случайный ущерб $X \geq 0$ с плотностью вероятностей $f(x)$. При условии $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}l^2}\mathsf{E}u(Y(X,l)) < 0$ оптимальный уровень франшизы L может быть вычислен по следующей приближенной формуле*

$$L = C^* - \frac{v'(C^*)}{v''(C^*)}, \tag{17}$$

где

$$v'(C^*) = -p'(C^*)Eu'(Y(X,C^*)) + (F(C^*) - 1)u'(w - p(C^*) - C^*), \tag{18}$$

$$\begin{aligned} v''(C^*) = &-p''(C^*)\mathsf{E}u'(Y(X,C^*)) + [p'(C^*)]^2\mathsf{E}u''(Y(X,C^*)) + \\ &+ u''(w - p(C^*) - C^*)(-2p'(C^*) - 1)(F(C^*) - 1) + u'(w - p(C^*) - C^*)f(C^*), \end{aligned} \tag{19}$$

$C^* = C^*_X$ – детерминированный эквивалент случайной величины X,

$$u(C^*_X) = \mathsf{E}u(X).$$

Доказательство. Из доказательства теоремы 3 (см. 11) следует

$$\begin{aligned} v'(l) = -p'(l)\mathsf{E}u'(Y(X,l)) + g'(l)u'(w - p(l) - l) = \\ = -p'(l)\mathsf{E}u'(Y(X,l)) + (F(l) - 1)u'(w - p(l) - l), \end{aligned}$$

где $F(x) = \int_0^x f(z)dz$ – функция распределения случайной величины X. Дифференцирование функции $v'(l)$ дает

$$\begin{aligned} v''(l) = -p''(l)\mathsf{E}u'(Y(X,l)) - p'(l)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\mathsf{E}u'(Y(X,l)) + \\ + (F(l) - 1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}u'(w - p(l) - l) + u'(w - p(l) - l)f(l). \end{aligned}$$

Вычислим величину

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\mathsf{E}u'(Y(X,l)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\int_0^l u'(w-p(l)-x)\,\mathrm{d}F(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\int_l^\infty u'(w-p(l)-l)\,\mathrm{d}F(x) =$$

$$= \int_0^l \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}u'(w-p(l)-x)\,\mathrm{d}F(x) + u'(w-p(l)-l)f(l) +$$
$$+ \int_l^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}u'(w-p(l)-l)\,\mathrm{d}F(x) + u'(w-p(l)-l)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\int_l^\infty \mathrm{d}F(x) =$$

$$= -p'(l)\Big(\int_0^l u''(w-p(l)-x)\,\mathrm{d}F(x) + \int_l^\infty u''(w-p(l)-l)\,\mathrm{d}F(x)\Big) +$$
$$+ u''(w-p(l)-l)(F(l)-1) =$$
$$= -p'(l)\mathsf{E}u''(Y(X,l)) + u''(w-p(l)-l)(F(l)-1).$$

Таким образом, получаем

$$v''(l) = -p''(l)\mathsf{E}u'(Y(X,l)) + [p'(l)]^2\mathsf{E}u''(Y(X,l)) +$$
$$+ (F(l)-1)u''(w-p(l)-l)(-2p'(l)-1) + u'(w-p(l)-l)f(l).$$

□

На следующем примере показано применение последней теоремы.

Пример 2. Пусть функция полезности имеет вид $u(x) = a - be^{-\beta x}$, потери X имеют экспоненциальное распределение

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

b, β, $\lambda > 0$, $a \in \mathbb{R}^1$, $\beta \neq \lambda$. Тогда оптимальный размер франшизы рассчитывается по следующей приближенной формуле

$$L = C^* - \frac{v'(C^*)}{v''(C^*)},$$

где

$$v'(C^*) = -b\beta e^{-\beta(w-p(C^*))+(\beta-\lambda)C^*}\Big(p'(C^*)\frac{\lambda}{\beta-\lambda}\big(1-e^{-(\beta-\lambda)C^*}\big) + p'(C^*) + 1\Big),$$

$$v''(C^*) = b\beta e^{-\beta(w-p(C^*))+(\beta-\lambda)C^*}\Big(\frac{\lambda}{\beta-\lambda}\big(1-e^{-(\beta-\lambda)C^*}\big)\big(-\beta(p'(C^*))^2 - p''(C^*)\big) -$$
$$- \beta(p'(C^*)+1)^2 + \lambda - p''(C^*)\Big),$$

$$C_X^* = \frac{1}{\beta}\ln\frac{\lambda+\beta}{\lambda}.$$

Доказательство. Поскольку

$$F(x) - 1 = -e^{-\lambda x},\ u'(x) = b\beta e^{-\beta x} \text{ и } u''(x) = -b\beta^2 e^{-\beta x},$$

а детерминированный эквивалент случайной величины X определяется по формуле

$$C_X^* = \frac{1}{\beta} \ln \frac{\lambda + \beta}{\lambda},$$

тогда

$$v'(C^*) = -p'(C^*) E u'(Y(X, C^*)) + (F(C^*) - 1) u'(w - p(C^*) - C^*) =$$

$$= -p'(C^*) \Big(\int_0^{C^*} u'(w - p(C^*) - x) \,\mathrm{d}F(x) + \int_{C^*}^{\infty} u'(w - p(C^*) - C^*) \,\mathrm{d}F(x) \Big) - \\ - \exp\{-\beta(w - p(C^*) - C^*) - \lambda C^*\} =$$

$$= -p'(C^*) \Big(\frac{b\lambda\beta}{\beta - \lambda} e^{-\beta(w - p(C^*))} (e^{(\beta-\lambda)C^*} - 1) + \exp\{-\beta(w - p(C^*) - C^*) - \lambda C^*\} \Big) - \\ - \exp\{-\beta(w - p(C^*) - C^*) - \lambda C^*\} =$$

$$= -b\beta e^{-\beta(w - p(C^*)) + (\beta - \lambda)C^*} \Big(p'(C^*) \frac{\lambda}{\beta - \lambda} (1 - e^{-(\beta-\lambda)C^*}) + p'(C^*) + 1 \Big).$$

Аналогичные рассуждения применяются для вычисления $v''(C^*)$. □

Замечание 3. Результаты в последнем примере могут быть получены прямыми вычислениями. Для этого требуется вычислить первые две производные следующей функции $v(l)$ (см. 10),

$$v(l) = a - b e^{-\beta(w - p(l)) + (\beta - \lambda)l} \Big(\frac{\lambda}{\beta - \lambda} \big(1 - e^{-(\beta - \lambda)l}\big) + 1 \Big).$$

Заключение

Задача определения уровня франшизы актуальна в случае оптимизации страховой программы предприятия. В данной работе рассмотрены два случая, когда страховая премия не зависит от уровня франшизы и, как следствие, от функции полезности и начального капитала предприятия. Во втором разделе показана зависимость премии от франшизы. Для обоих случаев предложены приближенные формулы для определения оптимального размера франшизы. В теореме 5 использован метод Ньютона для определения франшизы по первой итерации при начальном значении корня уравнения (9) равном детерминированному эквиваленту. Доказательство проведено на эвристическом уровне. В качестве примеров рассмотрены экспоненциальная функция полезности и экспоненциальное распределение. В дальнейшем исследовании планируется изучение ряда вопросов, изложенных в данной работе. В частности, остаются открытыми вопросы достаточного условия существования единственного корня уравнения (9). Теорема 4 может быть пополнена следующими принципами определения страховой премии (см. [6]): принцип стандартного отклонения, принцип нулевой полезности, принцип Эсшера, Швейцарский принцип, принцип Орлича. В теореме 5 начальное значение корня уравнения (9) может быть уточнено.

Список литературы

[1] Arrow K.J. Uncertainty and the welfare economics of medical care // American Economic Review. 1963. Vol. 53, № 5. Pp. 941–973.

[2] Arrow K.J. Optimal insurance and generalized deductibles // Collected Papers of Kenneth J. Arrow, Volume 3: Individual Choice under Certainty and Uncertainty. Cambridge, Massachusetts: Belknap Press, 1984. Pp. 212–260.

[3] Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J. Actuarial Mathematics. Itasca, Illinois: The Society of Actuaries, 1997. 753 p.

[4] Schlesinger H. The optimal level of deductibility in insurance contracts // The Journal of Risk and Insurance. 1981. Vol. 48, № 3. Pp. 465–481. https://doi.org/10.2307/252724

[5] Zorich V.A. Mathematical Analysis I. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2015. 616 p.

[6] Королёв В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я. Математические основы теории риска. М.: Физматлит, 2011. 620 с.

Образец цитирования

Королев Р.А., Карамова Л.К. Приближенные формулы для расчета оптимального уровня франшизы // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 3. С. 61–72. https://doi.org/10.26456/vtpmk179

Сведения об авторах

1. **Королев Роман Анатольевич**
доцент кафедры Прикладной информатики и теории вероятностей Российского университета дружбы народов.

Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, РУДН.
E-mail: stochastique@gmail.com.

2. **Карамова Лилия Камоевна**
студентка факультета физико-математических и естественных наук Российского университета дружбы народов.

Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, РУДН.
E-mail: lkkaramova@mail.ru.

APPROXIMATE FORMULAS FOR CALCULATION OF THE OPTIMAL LEVEL OF DEDUCTIBLE

Korolev Roman Anatolyevich
Associate Professor at the Department of Applied Informatics and Theory of Probability, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
Russia, 117198, Moscow, 6 Miklukho-Maklaya st.
E-mail: stochastique@gmail.com

Karamova Liliya Kamoevna
Student at Physics and Mathematics and Natural Sciences faculty, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
Russia, 117198, Moscow, 6 Miklukho-Maklaya st.
E-mail: lkkaramova@mail.ru

Received 28.06.2017, revised 29.07.2017.

In the paper we considered a problem of definition of the optimal level of deductible in the case of excess-of-loss insurance. Theorem 1 concerns the case when the function of excess-of-loss insurance does not depend on the type of utility function. Theorem 3 concerns the case when the insurance premium depends on the level of deductible. For each case we defined approximate formulas for calculation of the optimal level of deductible (theorems 2, 4, and 5).

Keywords: deductible, insurance premium, actuarial value, loading factor, deterministic equivalent, exponential utility function, exponential distribution.

Citation

Korolev R.A., Karamova L.K. Approximate formulas for calculation of the optimal level of deductible. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2017, no. 3, pp. 61–72. (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk179

References

[1] Arrow K.J. Uncertainty and the welfare economics of medical care. *American Economic Review*, 1963, vol. 53(5), pp. 941–973.

[2] Arrow K.J. Optimal insurance and generalized deductibles. In: *Collected Papers of Kenneth J. Arrow, Volume 3: Individual Choice under Certainty and Uncertainty.* Belknap Press, Cambridge, Massachusetts, 1984. Pp. 212–260.

[3] Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J. *Actuarial Mathematics*. The Society of Actuaries, Itasca, Illinois, 1997. 753 p.

[4] Schlesinger H. The optimal level of deductibility in insurance contracts. *The Journal of Risk and Insurance*, 1981, vol. 48(3), pp. 465–481. https://doi.org/10.2307/252724

[5] Zorich V.A. *Mathematical Analysis I*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2015. 616 p.

[6] Korolev V.Yu., Bening V.E., Shorgin S.Ya. *Matematicheskie Osnovy Teorii Riska* [Mathematical Foundations of Risk Theory]. Fizmatlit Publ., Moscow, 2011. 620 p. (in Russian)