УДК 517.5

АППРОКСИМАЦИЯ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ. ПРОБЛЕМА БЕРНШТЕЙНА

Дрожжин И.А.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 06.06.2017, после переработки 10.07.2017.

В произвольном банаховом пространстве получена обратная теорема теории приближений в случае аппроксимации элементами замкнутых локально компактных конусов. Теорема является аналогом известной теоремы С.Н. Бернштейна, которая была доказана им в банаховом пространстве непрерывных на отрезке функций при аппроксимации конечномерными подпространствами алгебраических полиномов.

Ключевые слова: банахово пространство, наилучшее приближение, замкнутое выпуклое локально компактное множество, конус, конечномерное подпространство, полная система в нормированном пространстве.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 3. С. 93–106.
https://doi.org/10.26456/vtpmk181

Введение

Во второй половине двадцатого столетия теория аппроксимации являлась одной из наиболее интенсивно развивающейся областью математической теории. Идеи и методы этой теории нашли свое применение в различных разделах математики, особенно в задачах прикладного характера.

Применение функционального анализа в теории приближений позволяет получить признаки наилучшего приближения, например, в терминах двойственных соотношений в произвольных нормированных пространствах при аппроксимации замкнутыми выпуклыми множествами и показать единый подход в решении экстремальных задах при аппроксимации с ограничениями.

В статье в произвольном банаховом пространстве рассматривается задача наилучшего приближения при аппроксимации элементами замкнутого выпуклого множества.

Формулируются хорошо известные общие теоремы существования и единственности элемента наилучшего приближения.

В случае аппроксимации элементами замкнутого локально компактного конуса доказываются основные свойства величины и элементов наилучшего приближения.

Используя приведенные результаты, получена обратная теорема теории приближений при аппроксимации элементами замкнутых локально компактных конусов, которая является аналогом известной теоремы Бернштейна С.Н.

1. Основные понятия. Общие теоремы существования и единственности элемента наилучшего приближения

Пусть X – некоторое банахово пространство, F – выпуклое замкнутое множество в X. Под задачей наилучшего приближения элемента $x \in X$ элементами множества F будем понимать задачу отыскания величины

$$E(x,F) = inf\{\|x-h\| : h \in F\}.$$

Число $E(x,F)$ назовем величиной наилучшего приближения элемента $x \in X$ элементами множества F, а элемент $u \in F$, для которого

$$E(x,F) = \|x-u\|,$$

назовем элементом наилучшего приближения (э.н.п.) для x в F.

Геометрически наилучшее приближение элемента x трактуется как его расстояние до множества F, а элемент наилучшего приближения – как точка множества F, ближайшая к x.

Приведем без доказательства известные [1] – [3] теоремы существования и единственности элемента наилучшего приближения.

Предложение 1.1. *Пусть F – замкнутое выпуклое множество в X, $x \in X$. Величина наилучшего приближения $E(x,F) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in F$.*

В связи с этим результатом, как правило, в характеристических признаках наилучшего приближения требуют чтобы элемент x пространства X не принадлежал аппроксимирующему множеству F.

Множество $G \subset X$ называется локально компактным, если компактно в X любое ограниченное подмножество из G, т.е. любая ограниченная последовательность элементов из G содержит сходящуюся подпоследовательность.

Примером локально компактного множества в X может служить любое его конечномерное подпространство.

Теорема 1.1. *Если F – замкнутое выпуклое локально компактное множество в X, то для любого элемента $x \in X$ существует э.н.п. в F.*

Нетрудно указать довольно широкий класс банаховых пространств, в которых для любого элемента $x \in X$ э.н.п. во множестве F всегда единствен.

Говорят, что пространство X имеет выпуклую сферу, если из равенства $\|x\| = \|y\|$ и неравенства $x \neq y$ следует, что

$$\|x+y\| < \|x\| + \|y\|.$$

Геометрически это означает, в частности, что если точки x, y принадлежат одной и той же сфере $S(\Theta, R)$ с центром в нуле и радиуса R, то середина отрезка, их соединяющего, лежит внутри этой сферы, т.е.

$$\|\frac{1}{2}(x+y)\| < R.$$

Теорема 1.2. *Если пространство X имеет выпуклую сферу, а множество F – замкнуто выпукло и локально компактно, то для любого элемента $x \in X$ э.н.п. в F единствен.*

Из известных функциональных пространств выпуклую сферу имеют пространства функций, суммируемых в p–й степени на промежутке $< a; b >$ при $p > 1$. Поэтому в этих пространствах для любого элемента x элемент наилучшего приближения всегда единствен при аппроксимации элементами замкнутого выпуклого локально компактного множества. Однако пространство непрерывных на отрезке функций, наделенное чебышевской нормой, а также пространство функций, суммируемых на промежутке $< a; b >$, выпуклой сферой не обладают. Можно привести соответствующие примеры, доказывающие этот факт.

Теорема 1.3. *Если множество F – замкнуто выпукло локально компактно, то для любого элемента $x \in X$ множество элементов наилучшего приближения в F выпукло.*

2. Основные свойства наилучших приближений при аппроксимации замкнутым локально компактным конусом

Непустое выпуклое множество $H \subset X$ назовем конусом, если с каждым элементом $x \in H$ оно содержит элемент λx для любого $\lambda \geq 0$. Нетрудно видеть, что любой конус замкнут относительно операций сложения и умножения на неотрицательное число.

Остановимся теперь на основных свойствах величины и элементов наилучшего приближения при аппроксимации замкнутым локально компактным конусом.

Пусть H – замкнутый локально компактный конус в X.

1^0. *Величина* $E(f; H) \leq \|f\|$, т.к. нулевой элемент $\Theta \in H$.

2^0. *Если $h_0 \in H$ есть э.н.п. для f в H, то для любого числа $\lambda \geq 0$ элемент λh_0 является э.н.п. для λf в H, при этом*

$$\lambda E(f; H) = E(\lambda f; H).$$

Действительно, при $\lambda = 0$ свойство очевидно. Пусть $\lambda > 0$. Обозначим соответственно через h_0, ψ – элементы наилучшего приближения для f, λf. Из очевидных неравенств:

$$E(f; H) = \|f - h_0\| = \frac{1}{\lambda}\|\lambda f - \lambda h_0\| \geq \frac{1}{\lambda}E(\lambda f; H);$$

$$E(\lambda f; H) = \|\lambda f - \psi\| = \lambda\|f - \frac{\psi}{\lambda}\| \geq \lambda E(f; H)$$

следует, что $\lambda E(f;H) = E(\lambda f;H)$. Из равенств

$$\lambda E(f;H) = \lambda\|f - h_0\| = \|\lambda f - \lambda h_0\| = E(\lambda f;H)$$

получаем, что элемент λh_0 – э.н.п. для λf в H.

3^0. *Для любого элемента $f \in X$ и произвольного $\psi \in H$ справедливы неравенства*

$$E(f + \psi;H) \le E(f;H) \le E(f - \psi;H). \qquad (1)$$

Действительно, обозначая через h_0, h соответственно элементы наилучшего приближения для f, $f - \psi$ в H, получим справедливость неравенств:

$$E(f;H) = \|f - h_0\| = \|f + \psi - (h_0 + \psi)\| \ge E(f + \psi;H);$$

$$E(f - \psi;H) = \|f - \psi - h\| = \|f - (\psi + h)\| \ge E(f;H).$$

Ясно, что если элементы ψ, $-\psi \in H$, то имеют место равенства

$$E(f + \psi;H) = E(f;H) = E(f - \psi;H).$$

Если ψ – э.н.п. для $f \in X$ в H , то $E(f;H) = E(f - \psi;H)$, т.к.

$$E(f - \psi;H) \le \|f - \psi\| = E(f;H) \le E(f - \psi, H).$$

Приведем примеры показывающие, что в неравенствах (1) имеет место и знак строго неравенства.

Пусть $C[0;1]$ – пространство вещественных непрерывных на $[0;1]$ функций, наделенное чебышевской нормой, конус $H \subset C[0;1]$ имеет вид

$$H = \{h : h = \alpha\, h_1 + \beta\, h_2 + \gamma\, h_3,\ \alpha, \beta, \gamma \ge 0\},$$

где

$$h_1(x) = 1,\ h_2(x) = x,\ h_3(x) = x^2,\ x \in [0;1].$$

Функции h_1, h_2, h_3 называются образующими конуса H. Конус H является замкнутым локально компактным множеством. Рассмотрим функцию $f(x) = x - 1$, $x \in [0;1]$ и элемент $\psi = 1 \in H$. Нетрудно видеть справедливость следующих соотношений

$$0 = E(f + \psi;H) < E(f;H) = 1 < E(f - \psi, H) = 2.$$

4^0. *Для любых элементов f, $g \in X$ верно неравенство*

$$E(f + g;H) \le E(f;H) + E(g;H).$$

Приведем доказательство данного свойства. Обозначим через φ, ψ соответственно элементы наилучшего приближения для f, $g \in X$ в H. Тогда

$$E(f + g;H) \le \|f + g - (\varphi + \psi)\| = \|(f - \varphi) + (g - \psi)\| \le$$

$$\leq \|f-\varphi\| + \|g-\psi\| = E(f;H) + E(g;H).$$

5^0. *Для любых элементов $f,\, g \in X$ верно неравенство*

$$|E(f;H) - E(g;H)| \leq \|f-g\|.$$

Из свойств $1^0,\ 4^0$ следует, что

$$E(f;H) \leq E(f-g;H) + E(g;H) \leq \|f-g\| + E(g;H),$$

$$E(g;H) \leq E(g-f;H) + E(f;H) \leq \|f-g\| + E(f;H),$$

и свойство доказано.

Если $\varphi,\ \psi \in H$, соответственно, являются элементами наилучшего приближения для $f,\ g \in X$ в H, то элемент $\varphi+\psi \in H$, вообще говоря, не есть э.н.п. для $f+g$ в H.

Для доказательства этого утверждения достаточно привести пример.
Пусть конус $H = \{h:\ h = ah_1 + bh_2,\ a \in R,\ b \geq 0\} \subset C[0;1]$, где

$$h_1(x) = 1,\ h_2(x) = x,\ x \in [0;1].$$

Ясно, что каждый элемент $h \in H$ является возрастающей функцией на $[0;1]$. Положим

$$f(x) = \begin{cases} -1+4x, & \text{если } 0 \leq x \leq 0,5, \\ 3-4x, & \text{если } 0,5 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

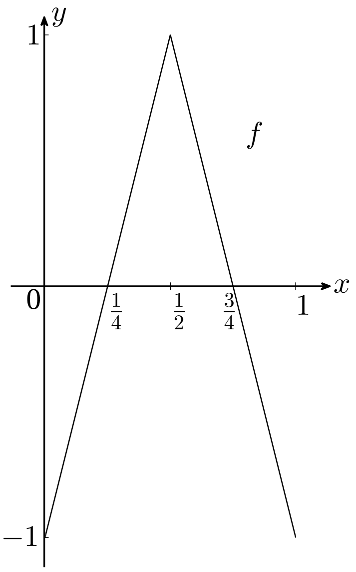
$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq x \leq 0,25, \\ 3-8x, & \text{если } 0,25 \leq x \leq 0,5, \\ -5+8x, & \text{если } 0,5 \leq x \leq 0,75, \\ 1, & \text{если } 0,75 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Тогда

$$f(x)+g(x) = \begin{cases} 4x, & \text{если } 0 \leq x \leq 0,25, \\ 2-4x, & \text{если } 0,25 \leq x \leq 0,5, \\ -2+4x, & \text{если } 0,5 \leq x \leq 0,75, \\ 4-4x, & \text{если } 0,75 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Заметим, что нулевой элемент $\Theta \in H$ есть э.н.п. для $f,\ g$ в H. Однако, элемент $h(x) = \frac{1}{2}$, $x \in [0;1]$ является э.н.п. для $f+g$ в H.

На Рис. 1 и Рис. 2 изображены графики непрерывных на отрезке $[0;1]$ функций $f,\ g,\ f+g$.



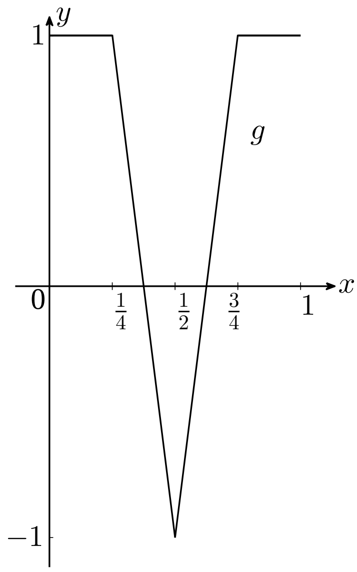


Рис. 1: *Графики функций f и g*

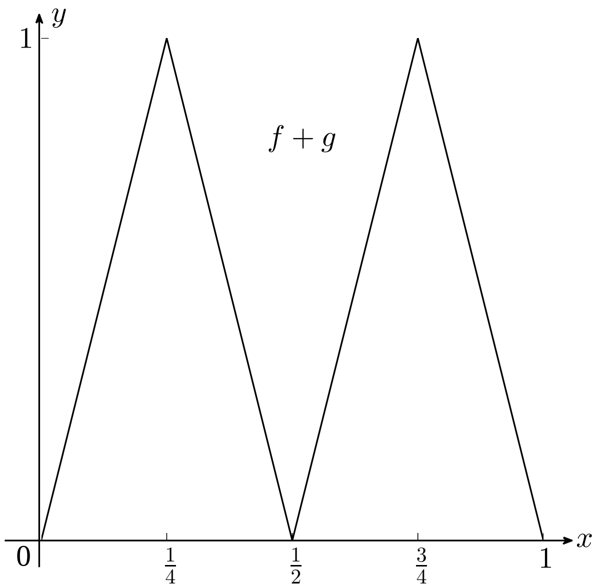


Рис. 2: *График функции $f+g$*

6^0. *Пусть даны последовательности $\{f_n\}$ элементов из X и $\{\psi_n\}$ элементов из H, причем ψ_n – э.н.п. элемента f_n в H для каждого $n \in N$. Если*

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f, \text{ то } \lim_{n\to\infty} E(f_n;H) = E(f;H),$$

при этом, если элемент $\psi \in H$ есть единственный э.н.п. для f в H, то

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n = \psi.$$

Докажем это свойство. Соотношение

$$\lim_{n\to\infty} E(f_n; H) = E(f; H)$$

следует из свойства 5^0. Так как

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0,$$

то последовательности $\{\|f_n - f\|\}$, $\{E(f_n; H)\}$ ограничены. Считаем, что

$$E(f_n; H) \le c_1,\ \|f_n - f\| \le c_2,$$

для любого $n \in N$. Тогда

$$\|\psi_n\| \le \|\psi_n - f_n\| + \|f_n - f\| + \|f\| \le c_1 + c_2 + \|f\|.$$

Из ограниченности этой последовательности следует, что она содержит сходящуюся подпоследовательность. Пусть подпоследовательность $\{\psi_{n_k}\}$ сходится и в силу замкнутости конуса

$$\lim_{k\to\infty} \psi_{n_k} = \varphi \in H.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$ в равенстве

$$E(f_{n_k}; H) = \|f_{n_k} - \psi_{n_k}\|,$$

получим $E(f; H) = \|f - \varphi\|$, т.е. φ – э.н.п. для f в H. Если э.н.п. для f единствен, то $\psi = \varphi$. Из локальной компактности последовательности $\{\psi_n\}$ и единственности предельного элемента следует ее сходимость к ψ.

Замечание 2.1. Функционал $E(x) = E(x, F)$, заданный на пространстве X, называется функционалом наилучшего приближения и является непрерывным на X и в случае аппроксимации элементами замкнутого выпуклого множества F.

3. Обратная задача теории приближений при аппроксимации замкнутыми локально компактными конусами. Аналог теоремы С.Н. Бернштейна

Пусть дана последовательность замкнутых локально компактных конусов $\{H_n\}$. Считаем, что $H_n \subset H_{n+1}$ для каждого $n \in N$.

Предложение 3.1. *Для любого элемента $f \in X$ и каждого натурального n верно неравенство*

$$E(f; H_{n+1}) \le E(f; H_n).$$

Теорема 3.1. *Для того чтобы для любого $f \in X$ выполнялось соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} E(f; H_n) = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы множество $\bigcup\limits_{n\in N} H_n$ было плотно в X.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f \in X$ и $\varepsilon > 0$. Так как

$$\lim_{n\to\infty} E(f; H_n) = 0,$$

то $E(f; H_n) = \|f - \psi_n\| < \varepsilon$ для всех $n \geq n_0$, где ψ_n – э.н.п. для f в конусе H_n. Последнее означает, что $\bigcup\limits_n H_n$ плотно в X.

Достаточность. Пусть $\bigcup\limits_n H_n$ плотно в X и $f \in X$. Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем элемент $h \in \bigcup\limits_n H_n$, для которого $\|f - h\| < \varepsilon$. Считаем, что $h \in H_{n_0}$. Тогда

$$E(f; H_n) \leq E(f; H_{n_0}) \leq \|f - h\| < \varepsilon$$

для всех $n \geq n_0$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} E(f; H_n) = 0.$$

□

В [1] была доказана следующая

Теорема 3.2. *Если $\{H_k\}$ последовательность подпространств конечной размерности пространства X, причем*

$$H_k \subset H_{k+1} \text{ для всех } k \in N$$

и множество $\bigcup\limits_k H_k$ плотно в X, то для любой последовательности положительных чисел $\{\mu_k\}$, монотонно стремящейся к 0, существует элемент $f \in X$, для которого

$$E(f; H_k) = \mu_k \text{ для всех } k \in N.$$

Необходимо отметить, что идея и первое доказательство теоремы 3.2 в банаховом пространстве $C[a; b]$ для алгебраического случая принадлежит С. Н. Бернштейну. В дальнейшем данную задачу назвали проблемой Бернштейна.

Докажем теорему, которая является аналогом теоремы 3.2.

Лемма 3.1. *Пусть H – замкнутый локально компактный конус в X, элементы $f_1,\ f_2 \in X$ и $f_2 \notin H$. Тогда для любого числа $\mu \geq E(f_1; H)$ найдется число $\nu \geq 0$ такое, что $E(f_1 + \nu f_2; H) = \mu$.*

Доказательство. Действительно, используя свойство 5^0, получим непрерывность функции $E(f_1 + \nu f_2; H)$ по ν на промежутке $[0; +\infty)$, причем при $\nu = 0$ она обращается в $E(f_1; H)$ и

$$\lim_{\nu\to+\infty} E(f_1 + \nu f_2; H) = +\infty,$$

т.к.

$$E(f_1 + \nu f_2; H) = \|f_1 + \nu f_2 - h_0\| \geq \nu\|f_2\| - \|f_1 - h_0\|,$$

где $h_0 \in H$ – э.н.п. для $f_1 + \nu f_2$. Следовательно утверждение леммы верно. □

Теорема 3.3. *Пусть $\{H_k\}$ – последовательность замкнутых локально компактных конусов пространства X, причем*

$$H_k \subset H_{k+1},\ H_k \neq H_{k+1} \text{ для всех } k \in N$$

и $\bigcup\limits_k H_k$ плотно в X, $\{F_k\}$ – последовательность подпространств из X , удовлетворяющих включениям:

$$H_k \subset F_{k+1} \subset H_{k+1},\ k = 1, 2, 3...,$$

а F_1 – некоторое ненулевое подпространство в конусе H_1.

Тогда для любой последовательности положительных чисел $\{\mu_k\}$, монотонно стремящейся к 0, существует элемент $f_0 \in X$, не принадлежащий $\bigcup\limits_k H_k$, для которого

$$E(f_o; H_k) \leq \mu_k \text{ для всех } k \in N.$$

Доказательство. Отметим, что

$$\bigcup_k F_k = \bigcup_k H_k$$

и следовательно множество $\bigcup\limits_k F_k$ плотно в X. Из локальной компактности конуса H_k следует локальная компактность подпространства F_k.

Используя схему доказательства теоремы 3.2, покажем существование функции $f_0 \in X$, не принадлежащей $\bigcup\limits_k F_k$, для которой

$$E(f_o; F_k) = \mu_k \text{ для всех } k \in N.$$

Пусть m – натуральное число, $m > 1$. Покажем сначала существование такого элемента $f_m \in F_m$, что

$$E(f_m; F_n) = \mu_n,\ n = 1,\ 2,\ \ldots,\ m - 1.$$

Для этого в каждом подпространстве F_n найдем элемент h_n, не принадлежащий F_{n-1}. Применяя лемму 3.1, подберем $\alpha_m \geq 0$ так, чтобы для элемента $g_m = \alpha_m h_m$ будет

$$E(g_m; F_{m-1}) = \mu_{m-1}.$$

Рассмотрим

$$g_{m-1} = g_m - \varphi_{m-1} + \alpha_{m-1} h_{m-1} \in F_m,$$

где φ_{m-1} – э.н.п. для g_m при аппроксимации элементами подпространства F_{m-1}. Так как

$$\mu_{m-2} \geq \mu_{m-1} = \|g_m - \varphi_{m-1}\| = E(g_m; F_{m-1}),$$

то применяя вновь лемму 3.1, найдем $\alpha_{m-1} \geq 0$ такое, что

$$E(g_{m-1}; F_{m-2}) = \mu_{m-2}.$$

Применяя свойство 3^0, получим следующие равенства

$$E(g_{m-1}; F_{m-1}) = E(g_m - \varphi_{m-1} + \alpha_{m-1} h_{m-1}; F_{m-1}) = E(g_m; F_{m-1}) = \mu_{m-1}.$$

Итак, имеем

$$E(g_{m-1}; F_n) = \mu_n,\ n = m-2,\ m-1,$$

Докажем теперь индукцией по j существование такого элемента $g_{m-j} \in F_m$, $j \le m-2$, для которого

$$E(g_{m-j}; F_n) = \mu_n,\ n = m-j-1,\ m-j,\ \ldots,\ m-1.$$

Уже рассмотренный случай $j = 1$ представляет базу индукции, остается установить возможность индукционного перехода.

Пусть элемент $g_{m-(j-1)} \in F_m$ уже построен и

$$E(g_{m-(j-1)}; F_n) = \mu_n,\ n = m-j,\ m-j+1,\ \ldots,\ m-1.$$

Обозначим через φ_{m-j} – э.н.п. для $g_{m-(j-1)}$ при аппроксимации элементами подпространства F_{m-j}, так что

$$\|g_{m-(j-1)} - \varphi_{m-j}\| = E(g_{m-(j-1)}; F_{m-j}) = \mu_{m-j}.$$

Будем искать следующий элемент $g_{m-j} \in F_m$ в виде

$$g_{m-j} = g_{m-(j-1)} - \varphi_{m-j} + \alpha_{m-j} h_{m-j}.$$

Учитывая, что

$$E(g_{m-(j-1)} - \varphi_{m-j}; F_{m-j-1}) \le \|g_{m-(j-1)} - \varphi_{m-j}\| = \mu_{m-j} \le \mu_{m-j-1}$$

и, применяя лемму 3.1, выберем $\alpha_{m-j} \ge 0$ таким, чтобы

$$E(g_{m-j}; F_{m-j-1}) = \mu_{m-j-1}.$$

Так как $-\varphi_{m-j} + \alpha_{m-j} h_{m-j} \in F_n$ при $n \ge m-j$, то при $n = m-j$, $m-j+1, ..., m-1$ также будет

$$E(g_{m-j}; F_n) = E(g_{m-j+1}; F_n) = \mu_n.$$

Этим доказана возможность индукционного перехода и, следовательно, существование всех $g_{m-j} \in F_m$. Если положим теперь $f_m = g_2$, то получим элемент с требуемыми свойствами.

Обозначим через χ_m – э.н.п. для f_m при аппроксимации элементами подпространства F_1. Положим $\psi_m = f_m - \chi_m \in F_m$. Тогда

$$\begin{gathered} E(f_m - \chi_m; F_n) = E(f_m; F_n) = \mu_n,\ n = 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1, \\ E(f_m - \chi_m; F_n) = 0,\ n \ge m, \\ \|\psi_m\| = \|f_m - \chi_m\| = \mu_1. \end{gathered} \tag{2}$$

Все элементы последовательности $\{\psi_m\}$ принадлежат множеству

$$M = \{f \in C(T): \ \|f\| \le \mu_1, \ E(f; F_n) \le \mu_n, \ n \in N\}.$$

Покажем, что множество M компактно. Для этого по произвольному $\varepsilon > 0$ найдем такой номер K, что $\mu_K < \varepsilon$. Положим

$$M_\varepsilon = \{\psi \in F_K: \ \|\psi\| \le \mu_1 + \varepsilon\}.$$

Множество M_ε компактно, так как ограничено и содержится в локально компактном подпространстве F_K, и в то же время является ε – сетью для M. Действительно, для любого $f \in M$ его э.н.п. $\varphi \in F_K$ таков, что

$$\|f - \varphi\| \le \mu_K < \varepsilon,$$

$$\|\varphi\| \le \|f\| + \|f - \varphi\| \le \mu_1 + \varepsilon,$$

т.е. $\varphi \in M_\varepsilon$. Обладая при каждом ε компактной ε – сетью, само множество M также компактно. Итак, из последовательности $\{\psi_m\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность к некоторому $f_0 \in X$. Переходя к пределу по соответствующей подпоследовательности индексов в неравенствах (2) получим

$$E(f_0; F_n) = \mu_n, \ n \in N, \ \text{при этом } f_0 \text{ не принадлежит } \bigcup_k F_k.$$

Далее, так как $F_n \subset H_n$ при любом $n \in N$, то

$$E(f_0; H_n) \le E(f_0; F_n) = \mu_n$$

и теорема доказана. □

Замечание 3.1. В качестве подпространств F_k можно взять замыкания линейных оболочек замкнутых локально компактных конусов $H_k, \ k = 2, 3, ...$

Приведем пример построения последовательности конусов с указанными свойствами и получим результат, вытекающий, в частности, из теоремы 3.2.

Пусть $\{x_1, x_2, \dots, \ x_n\}$ – линейно независимая система в X, m – целое неотрицательное число. Отметим, что конус

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, x_k : \ \alpha_k \in R \ , \alpha_j \ge 0 \text{ при } \ j > m \right\}$$

является замкнутым выпуклым локально компактным множеством.

Линейно независимую систему $\{h_n\}$ элементов из X будем называть полной, если для каждого элемента $f \in X$ и произвольного $\varepsilon > 0$ найдется элемент $h = \sum\limits_{j=1}^{k} a_j h_j$ $(a_j \in R)$ такой, что $\|f - h\| < \varepsilon$.

Рассмотрим произвольную строго возрастающую последовательность $\{n_k\}$ натуральных чисел и систему $\{h_k\}$ полную в X. Пусть m – натуральное число.

Положим

$$H_1=\left\{\sum_{j=1}^{n_1} a_jh_j\ :\ a_j\in R\ ,\ a_k\geq 0,\ k>m\right\},$$

$$H_{k+1}=\left\{\sum_{j=1}^{n_{k+1}} b_jh_j:\ b_j\in R\ ,\ b_i\geq 0,\ i>n_k\right\},$$

для каждого $k=1,\ 2,\ \ldots$, где n_k – размерность конуса $H_k,\ k\in N$. Из указанного построения конусов следует, что $H_k\subset H_{k+1}$ для всех $k\in N$, $\bigcup\limits_k H_k$ плотно в X.

Последовательность конечномерных подпространств определим следующим способом:

$$F_1=\left\{\sum_{j=1}^{m} a_jh_j\ :\ a_j\in R\right\}\subset H_1,$$

$$F_k=\left\{\sum_{j=1}^{n_{k-1}} b_jh_j:\ b_j\in R\right\}\subset H_k,\quad k=2,\ 3,...$$

В этом случае существование элемента f_0 с указанными в теореме 3.3 свойствами следует, в частности, из теоремы 3.2.

Рассмотрим конечномерные подпространства

$$G_k=\left\{\sum_{j=1}^{n_k} b_jh_j:\ b_j\in R\right\},\ k\in N.$$

Ясно, что $H_k\subset G_k\subset G_{k+1}$ для всех $k\in N$, $\bigcup\limits_k G_k$ плотно в X.

Применяя теорему 3.2, получим, что для любой последовательности положительных чисел $\{\nu_k\}$, монотонно стремящейся к 0, существует элемент $g_0\in X$, для которого

$$E(g_0;G_k)=\nu_k \text{ для всех } k\in N.$$

Так как $H_n\subset G_n$ при любом $n\in N$, то

$$E(g_0;H_n)\geq E(g_0;G_n)=\nu_n,$$

при этом g_0 не принадлежит $\bigcup\limits_k G_k$ и следовательно $\bigcup\limits_k H_k$.

Таким образом, для любой последовательности положительных чисел $\{\nu_k\}$, монотонно стремящейся к 0, существует элемент $g_0\in X$, не принадлежащий $\bigcup\limits_k H_k$, для которого

$$E(g_0;H_k)\geq\nu_k \text{ для всех } k\in N.$$

Итак, справедливо

Следствие 3.1. *Пусть $\{h_k\}$ – полная система элементов в X, $\{n_k\}$ – произвольная строго возрастающая последовательность натуральных чисел, m – натуральное число. Последовательность замкнутых локально компактных конусов банахова пространства X задана следующими формулами:*

$$H_1 = \left\{ \sum_{j=1}^{n_1} a_j h_j \ : \ a_j \in R \ , \ a_k \geq 0, \ k > m \right\},$$

$$H_{k+1} = \left\{ \sum_{j=1}^{n_{k+1}} b_j h_j : \ b_j \in R \ , \ b_i \geq 0, \ i > n_k \right\},$$

для каждого $k = 1, \ 2, \ \dots,$ при этом $H_k \subset H_{k+1}$ для всех $k \in N$, $\bigcup\limits_k H_k$ плотно в X.

Тогда для любой последовательности положительных чисел $\{\mu_k\}$, монотонно стремящейся к 0, существует элементы $f_0, \ g_0 \in X$, не принадлежащие $\bigcup\limits_k H_k$, для которых

$$E(f_0; H_k) \leq \mu_k, \ E(g_0; H_k) \geq \mu_k \text{ для всех } k \in N.$$

Заключение

Полученные результаты носят законченный характер и могут быть использованы при решении прикладных задач.

Список литературы

[1] Даугавет И.К. Введение в теорию приближения функций. Л.: ЛГУ, 1977.

[2] Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближений. М.: Наука, 1976.

[3] Корнейчук Н.П., Лигун А.А., Доронин В.Г. Аппроксимация с ограничениями. Киев: Наукова думка, 1982.

Образец цитирования

Дрожжин И.А. Аппроксимация с ограничениями. Проблема Бернштейна // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 3. С. 93–106. https://doi.org/10.26456/vtpmk181

Сведения об авторах

1. **Дрожжин Игорь Александрович**

доцент кафедры математического анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

APPROXIMATION WITH LIMITATIONS.
THE PROBLEM OF BERNSTEIN

Drozhzhin Igor Alexandrovich
Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis,
Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU.

Received 06.06.2017, revised 10.07.2017.

An inverse theorem of approximation theory is obtained in an arbitrary Banach space in the case of approximations by elements of closed locally compact cones. The theorem is an analogue of the well-known theorem of S.N. Bernshtein, which he proved in the Banach space of continuous functions on an interval when approximating by finite-dimensional subspaces of algebraic polynomials.

Keywords: Banach space, best approximation, closed convex locally compact set, cone, finite-dimensional subspace, complete system in a normed space.

Citation

Drozhzhin I.A. Approximation with limitations. The problem of Bernstein. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2017, no. 3, pp. 93–106. (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk181

References

[1] Daugavet I.K. *Vvedenie v Teoriju Priblizhenija Funkcij* [Introduction to the Theory of Approximation of Functions]. LGU Publ., Leningrad, 1977. (in Russian)

[2] Kornejchuk N.P. *Ekstremalnye Zadachi Teorii Priblizhenij* [Extremal Problems in Approximation Theory]. Nauka Publ., Moscow, 1976. (in Russian)

[3] Kornejchuk N.P., Ligun A.A., Doronin V.G. *Approksimacija s Ogranichenijami* [Approximation with Constraints]. Naukova Dumka, Kiev, 1982. (in Russian)