УДК 510.675, 510.531

О ВЫРАЗИТЕЛЬНОЙ СИЛЕ ЛОГИКИ ОДНОМЕСТНОГО ТРАНЗИТИВНОГО ЗАМЫКАНИЯ ДЛЯ ДИСКРЕТНОГО ПОРЯДКА

Дудаков С.М.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 12.09.2017, после переработки 05.12.2017.

В работе показано, что в теории дискретного линейного порядка с одноместным оператором транзитивного замыкания с помощью формул длины n можно представить сложение, умножение и экспоненту для натуральных чисел вплоть до $H_2(n)$, где $H_2(n)$ — гиперэкспонента.

Ключевые слова: транзитивное замыкание, дискретный порядок, выразительная сила.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 4. С. 25–33.
https://doi.org/10.26456/vtpmk186

Введение

Исследование разрешимости математических теорий, равно как и сложности разрешающих процедур, является одной из центральных проблем математической логики и теории алгоритмов. Например, если в теории и сложение, и умножение могут быть представлены полностью, то такая теория оказывается неразрешимой (см., например, [1]).

Как известно из работ Рабина и Фишера [6] возможность представления арифметических операций над натуральными числами в теории имеет прямое отношение к сложности разрешающих процедур для этой теории. Вычислительная сложность оказывается напрямую зависящей от того, насколько короткими будут представляющие формулы или, что эквивалентно, насколько длинными будут фрагменты, на которых представимы арифметические операции. Так, например, для аддитивной теории действительных чисел для длин этих фрагментов получена оценка $O(2^n)$, а для аддитивной теории натуральных — $O(2^{2^n})$ для формул длины n.

В нашей работе мы исследуем возможность представления арифметических действий в теории дискретного порядка, обогащенной одноместным оператором транзитивного замыкания. Как показано в [2] такая теория разрешима. Вместе с тем при наличии сложения либо умножения становится выразимой и вторая из этих операций, что ведет к неразрешимости (см. [3]). Следовательно, можно сделать вывод, что каждая из арифметических операций может быть представлена лишь для ограниченных фрагментов. Нашей целью является поиск длин таких фрагментов.

Мы демонстрируем, что введение в теорию дискретного линейного порядка унарного оператора транзитивного замыкания делает возможным представить арифметические действия: сложение, умножения и экспоненту (по основанию 2) в весьма компактной форме. При помощи формул длины $O(n)$ мы получаем возможность определить эти операции вплоть до границы

$$H_2(n) = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{n\ \text{раз}}.$$

Таким образом, унарный оператор транзитивного замыкания существенно увеличивает выразительные возможности языка классической логики для дискретно упорядоченных систем.

1. Определения

Мы рассматриваем теорию дискретного линейного порядка без последнего элемента. Наличие первого элемента для нас несущественно, мы будем считать, что некоторый элемент в качестве такого зафиксирован и обозначен константой 0. Элементы меньшие 0 нам никогда не понадобятся, поэтому мы будем считать, что универсум, с которым мы работаем — это множество натуральных чисел $(\omega, 0, \leq)$. Как обычно, мы будем применять знаки для строгого $<$ и нестрогого $\leq$ порядка, вместо того, чтобы определять один через другой с помощью равенства. Также отметим, что в такой теории определима функция следования $s(x)$ значением который является наименьший элемент, больший x. Для удобства полагаем, что элементы $s(0)$ и $s(s(0))$ тоже обозначены константами 1 и 2 соответственно.

Введем следующие сокращения:

– $\mathrm{const}_\Delta(x)$ — формула, представляющая константу Δ:

$$\mathrm{const}_\Delta(x) \equiv [x = \Delta];$$

– $\mathrm{sum}_\Delta(x, y, z)$ — формула, представляющая сложение натуральных чисел для всех $y \leq \Delta$ и всех x, z:

$$\mathrm{sum}_\Delta(x, y, z) \equiv [x + y = z \wedge y \leq \Delta];$$

– $\mathrm{sqr}_\Delta(x, y)$ — формула, представляющая возведение в квадрат натуральных чисел для всех $x, y \leq \Delta$:

$$\mathrm{sqr}_\Delta(x, y) \equiv [x^2 = y \wedge (x, y \leq \Delta)];$$

– $\mathrm{mult}_\Delta(x, y, z)$ — формула, представляющая умножение натуральных чисел для всех $x, y, z \leq \Delta$:

$$\mathrm{mult}_\Delta(x, y, z) \equiv [x \times y = z \wedge (x, y, z \leq \Delta)];$$

– $\mathrm{pow}_\Delta(x, y)$ — формула, представляющая возведение двойки в степень для всех $x, y \leq \Delta$:

$$\mathrm{pow}_\Delta(x, y) \equiv [2^x = y \wedge (x, y \leq \Delta)];$$

– $\mathrm{div}_\Delta(x,y)$ — формула, представляющая отношение делимости для всех $x \le \Delta$ и всех y:
$$\mathrm{div}_\Delta(x,y) \equiv [x \mid y \wedge x \le \Delta];$$

– $\mathrm{mod}_\Delta(x,y,z)$ — формула, представляющая функцию нахождения остатка от деления для всех $y \le \Delta$ и всех x, z:
$$\mathrm{mod}_\Delta(x,y) \equiv [x \bmod y = z \wedge y \le \Delta];$$

– $\text{НОК}_\Delta(x,y)$ — формула, представляющая наименьшее общее кратное всех чисел от 1 до x для $x \le \Delta$ и всех y:
$$\text{НОК}_\Delta(x,y) \equiv [x \le \Delta \wedge y = \min\{z > 0 : u \mid z \text{ для всех } u = 1,\dots,x\}].$$

С помощью $|\phi|$ как обычно обозначаем длину формулы ϕ.

При построении формул кроме возможностей классической логики первого порядка мы будем использовать одноместный оператор транзитивного замыкания.

Определение 1 (см., например, [5]). *Если $\psi(x,y,\bar{z})$ — формула со свободными переменными $x, y, \bar{z}$, то $\mathsf{T}_{x,y}\,\psi$ — также формула со свободными переменными $x, y, \bar{z}$. Формула $(\mathsf{T}_{x,y}\,\psi)(x,y,\bar{z})$ истинна, если существует конечная последовательность элементов предметной области $a_0 = x, a_1, \dots, a_n = y$ такая, что выполнены все формулы $\psi(a_i, a_{i+1}, \bar{z})$ для всех $i = 0, \dots, n-1$.*

2. Представление сложения

Далее мы докажем ряд однотипных лемм, которые позволяют по одним формулам строить другие с увеличением длины в заранее известную константу раз.

Лемма 1. *Существует такая константа c_1, что для любой формулы $\mathrm{sum}_\Delta(x,y,z)$ найдется формула $\mathrm{div}_\Delta(x,y)$. При этом $|\mathrm{div}_\Delta| \le c_1|\mathrm{sum}_\Delta|$.*

Доказательство. Рассмотрим формулу:
$$\phi(u,x,v) \equiv [\mathsf{T}_{u,v}(\mathrm{sum}_\Delta(u,x,v))],$$
которая истинна тогда и только тогда, когда x делит $v-u$. Тогда можно положить $\mathrm{div}_\Delta(x,y) \equiv \phi(0,x,y)$. □

Лемма 2. *Существует такая константа c_2, что для любой формулы $\mathrm{sum}_\Delta(x,y,z)$ найдется формула $\mathrm{mod}_\Delta(x,y,z)$. При этом $|\mathrm{mod}_\Delta| \le c_2|\mathrm{sum}_\Delta|$.*

Доказательство. Формула легко строится с помощью sum_Δ и div_Δ:
$$\mathrm{mod}_\Delta(x,y,z) \equiv [(\exists x')(\mathrm{sum}_\Delta(x',z,x) \wedge \mathrm{div}_\Delta(y,x') \wedge z < y)]$$
Длина этой формулы удовлетворяет требуемым условиям из-за леммы 1. □

Лемма 3. *Существует такая константа c_3, что для любой формулы $\mathrm{sum}_\Delta(x,y,z)$ найдется формула $\mathrm{sum2}_\Delta(x,y)$. При этом $|\mathrm{sum2}_\Delta| \le c_3|\mathrm{sum}_\Delta|$.*

Доказательство. Число y в формуле $\mathrm{sum}_{2\Delta}(x,y,z)$ может быть четным или нечетным. Напишем две формулы для каждого из этих случаев:

$$\mathrm{sum}'_{2\Delta}(x,y,z) \equiv \\ \equiv [(\exists y')(\exists z')(\mathrm{sum}_\Delta(y',y',y) \wedge \mathrm{sum}_\Delta(x,y',z') \wedge \mathrm{sum}_\Delta(z',y',z))],$$

$$\mathrm{sum}''_{2\Delta}(x,y,z) \equiv \\ \equiv [(\exists y')(\exists z')(\mathrm{sum}_\Delta(s(y'),y',y) \wedge \mathrm{sum}_\Delta(s(x),y',z') \wedge \mathrm{sum}_\Delta(z',y',z))].$$

После чего достаточно их скомбинировать:

$$\mathrm{sum}_{2\Delta}(x,y,z) \equiv [\mathrm{sum}'_{2\Delta}(x,y,z) \vee \mathrm{sum}''_{2\Delta}(x,y,z)].$$ □

Лемма 4. *Существует такая константа c_4, что для любой формулы $\mathrm{sum}_\Delta(x,y,z)$ найдется формула $\text{НОК}_\Delta(x,y)$. При этом $|\,\text{НОК}_\Delta\,| \le c_4|\,\mathrm{sum}_\Delta\,|$.*

Доказательство. Строим с помощью div_Δ:

$$\text{НОК}_\Delta(x,y) \equiv [0 < y \wedge (\forall u)(1 \le u \wedge u \le x \to \\ \to \mathrm{div}_\Delta(u,y)) \wedge (\forall z)(0 < z \wedge z < y \to \\ \to (\exists u)(\exists v)(\exists w)(1 \le v \wedge v < u \wedge u \le x \wedge \mathrm{sum}_\Delta(w,v,z) \wedge \mathrm{div}_\Delta(w,u)))].$$

□

Лемма 5. *Существует такая константа c_5, что для достаточно больших Δ для любой формулы $\mathrm{sum}_\Delta(x,y,z)$ найдутся формулы $\mathrm{const}_\delta(x)$ и $\mathrm{sum}_\delta(x,y,z)$ для некоторого $\delta \ge 2^\Delta$. При этом $|\,\mathrm{sum}_\delta\,|, |\,\mathrm{const}_\delta\,| \le c_5|\,\mathrm{sum}_\Delta\,|$.*

Доказательство. Как известно,

$$\text{НОК}\{1,\ldots,n\} = e^{\Psi(n)} = 2^{\Psi(n)\log_2 e},$$

где $\Psi(n)$ — функция Чебышева, для которой имеет место асимптотическая оценка $\Psi(n) = n + O(ne^{-c\sqrt{\ln n}})$ для некоторой константы $c > 0$ (см., например, [4]). Следовательно,

$$\Psi(n)\log_2 e = n\log_2 e + O(ne^{-c\sqrt{\ln n}}\log_2 e),$$

что асимптотически больше n. Следовательно, $\text{НОК}\{1,\ldots,n\} \ge 2^n$ асимптотически, пусть, например, это выполнено для всех $\Delta > \Delta_0$. Поэтому в качестве δ можно взять наименьшее общее кратное всех чисел от 1 до Δ:

$$\mathrm{const}_\delta(x) \equiv [(\exists d)(\mathrm{const}_\Delta(d) \wedge \text{НОК}_\Delta(d,x))].$$

Теперь можно построить формулу sum_δ. Сначала определим сложение по модулю δ:

$$\mathrm{sum}'_\delta(x,y,z) \equiv [(\exists d)(\mathrm{const}_\Delta(d) \wedge (\forall u)(1 < u \wedge u \le d \to \\ \to (\exists x',y',z',z'')(\mathrm{mod}_\Delta(x,u,x') \wedge \mathrm{mod}_\Delta(y,u,y') \wedge \\ \wedge \mathrm{sum}_{2\Delta}(x',y',z'') \wedge \mathrm{mod}_\Delta(z'',u,z') \wedge \mathrm{mod}_\Delta(z,u,z'))))].$$

Сразу отметим (это нам понадобится в дальнейшем), что отрицание последней формулы можно представить так:

$$\neg\,\mathrm{sum}'_\delta(x,y,z) \equiv [(\exists d)(\exists u)(1 < u \wedge \mathrm{const}_\Delta(d) \wedge u \leq d \wedge \\ \wedge (\exists x', y', z', z'', z''')(\mathrm{mod}_\Delta(x,u,x') \wedge \mathrm{mod}_\Delta(y,u,y') \wedge \\ \wedge \mathrm{sum}_{2\Delta}(x',y',z'') \wedge \mathrm{mod}_\Delta(z'',u,z''') \wedge \mathrm{mod}_\Delta(z,u,z') \wedge z''' \neq z'))]. \quad (1)$$

Теперь возьмем наименьшее подходящее:

$$\mathrm{sum}_\delta(x,y,z) \equiv [x \leq z \wedge \mathrm{sum}'_\delta(x,y,z) \wedge (\forall u)(\mathrm{sum}'_\delta(x,y,u) \to z \leq u \vee u < x)]. \quad (2)$$

Корректность метода прямо следует из китайской теоремы об остатках. При разложении на простые множители δ будет представлено произведением чисел вида p^n, где p — простое число и $p^n \leq \Delta$. Поскольку такие числа попарно взаимно просты, то каждое число от 0 до $\delta - 1$ имеет уникальный набор остатков при делении на p^n. □

Теперь, используя доказанные выше леммы, продемонстрируем, как можно в формулах sum_Δ экспоненциально увеличивать константу Δ всего лишь при константном увеличении длины всей формулы.

Теорема 1. *Существует такая константа c_6, что для любого $\Delta \geq \Delta_0$ (см. доказательство леммы 5) и для любой формулы $\mathrm{sum}_\Delta(x,y,z)$ найдется формула $\mathrm{sum}_\delta(x,y,z)$ для некоторого $\delta \geq 2^\Delta$. При этом $|\,\mathrm{sum}_\delta\,| \leq |\,\mathrm{sum}_\Delta\,| + c_6$.*

Доказательство. Заметим, что оператор транзитивного замыкания в предыдущих леммах использовался лишь однажды — при построении формулы div_Δ. Поэтому формула sum_δ, построенная в лемме 5, устроена так: мы в некоторую фиксированную формулу первого порядка $\phi(Q,P,x,y,z)$ подставили вместо всякой подформулы $Q(u,v,w)$ подформулу $\mathrm{sum}_\Delta(u,v,w)$, а вместо всякой подформулы $P(u,v)$ подформулу $\mathrm{div}_\Delta(u,v)$.

Без ограничения общности можно считать, что формула ϕ находится в предваренном виде, а ее матрица — в дизъюнктивной нормальной форме.

Из вида формул, которые построены в леммах, можно сразу видеть, что ϕ можно считать положительной по P и Q. В самом деле, единственное место, где перед ними появляется отрицание — это левая часть $\mathrm{sum}'_\delta(x,y,u)$ импликации в формуле (2). Но ее можно переписать без отрицания с помощью (1).

Далее, нетрудно показать, что в каждой элементарной конъюнкции можно ограничиться только одним вхождением $\mathrm{sum}_\Delta(u,v,w)$:

$$C \wedge \mathrm{sum}_\Delta(u,v,w) \wedge \mathrm{sum}_\Delta(u',v',w') \equiv \\ \equiv (\forall t)(t = 0 \wedge C \wedge \mathrm{sum}_\Delta(u,v,w) \vee t \neq 0 \wedge C \wedge \mathrm{sum}_\Delta(u',v',w')),$$

где t — новая переменная, не входящая свободно в sum_Δ и C. Точно так же показывается, что и формула div_Δ входит в каждую из элементарных конъюнкций не более одного раза. Заметим, можно полагать, что каждая из формул sum_Δ и div_Δ входит в каждую элементарную конъюнкцию в точности один раз, так как к любой конъюнкции всегда можно добавить фиктивные истинные формулы $\mathrm{sum}_\Delta(0,0,0)$ или $\mathrm{div}_\Delta(1,1)$.

После выполнения перечисленных выше преобразований снова приведем формулу к ДНФ.

Далее можно вынести все вхождения формул $\mathrm{sum}_\Delta(u,v,w)$ и $\mathrm{div}_\Delta(r,t)$ в ДНФ в одно место:

$$\bigvee_i \big(D_i \wedge \mathrm{sum}_\Delta(u_i,v_i,w_i) \wedge \mathrm{div}_\Delta(r_i,t_i)\big) \equiv$$

$$\equiv (\exists u,v,w,r,t)\Big(\mathrm{sum}_\Delta(u,v,w) \wedge \mathrm{div}_\Delta(r,t) \wedge$$

$$\wedge \bigvee_i \big(D_i \wedge u = u_i \wedge v = v_i \wedge w = w_i \wedge r = r_i \wedge t = t_i\big)\Big),$$

где u,v,w,r,t — переменные, не входящие свободно в sum_Δ, div_Δ и C.

Теперь наша формула приобрела такой вид:

$$K(\mathrm{sum}_\Delta(u,v,w) \wedge \mathrm{div}_\Delta(r,t) \wedge \phi'), \tag{3}$$

где K — кванторная приставка, а формула первого порядка ϕ' заранее фиксирована.

Чтобы сделать последний шаг и «склеить» $\mathrm{sum}_\Delta(u,v,w)$ и $\mathrm{div}_\Delta(r,t)$ в одну формулу, рассмотрим следующую формулу $\psi'(u,v,w,q,r,t)$:

$$\mathsf{T}_{q,t}((\forall a,b,c)((a = u \wedge b = v \wedge c = w) \vee (a = q \wedge b = r \wedge c = t) \to \mathrm{sum}_\Delta(a,b,c))).$$

Формула под оператором транзитивного замыкания эквивалентна $\mathrm{sum}_\Delta(u,v,w) \wedge \mathrm{sum}_\Delta(q,r,t)$, поэтому $\psi'(u,v,w,q,r,t)$ истинна тогда и только тогда, когда $u+v = w$ и r делит $t-q$. Следовательно, формула $\psi(u,v,w,r,t) \equiv \psi'(u,v,w,0,r,t)$ эквивалентна $\mathrm{sum}_\Delta(u,v,w) \wedge \mathrm{div}_\Delta(r,t)$.

Теперь можно сделать последний шаг и преобразовать (3) к виду:

$$K(\psi(u,v,w,r,t) \wedge \phi').$$

Последняя формула содержит всего одно вхождение sum_Δ, а остальная часть ее фиксирована. Следовательно, ее длина равняется $|\mathrm{sum}_\Delta| + c_6$ для некоторой константы c_6. □

Теорема 2. *Для любого n существует формула sum_δ длины $O(n)$, где $\delta \geq H_2(n)$.*

Доказательство. Используем индукцию по n. При $n = \Delta_0$ (см. доказательство леммы 5) строим формулу тем или иным известным способом.

Индукционный шаг для $n > \Delta_0$ получается тривиально с помощью теоремы 1. □

3. Умножение и возведение в степень

Умножение легко представить с помощью возведения в квадрат, а его — с помощью div_Δ.

Теорема 3. *Существует такая константа* c_8*, что для любой формулы* $\mathrm{sum}_\Delta(x,y,z)$ *найдутся формулы* $\mathrm{sqr}_\Delta(x,y)$ *и* $\mathrm{mult}_\Delta(x,y,z)$*. При этом* $|\,\mathrm{sqr}_\Delta\,|, |\,\mathrm{mult}_\Delta\,| \le c_8 |\,\mathrm{sum}_\Delta\,|$.

Доказательство. Прежде всего построим с помощью лемм 5 и 1 формулы sum_δ и div_δ для $\delta \ge 2^\Delta \ge \Delta^2$. Длины этих формул возрастут не более чем в константу раз по сравнению с исходной. Теперь запишем формулу $\mathrm{sqr}_\Delta(x,y)$:

$$\begin{aligned}\mathrm{sqr}_\Delta(x,y) \equiv [&(\exists d)(\mathrm{const}_\Delta(d) \wedge y \le d)\wedge \\ &\wedge (\exists z)(\mathrm{sum}_\delta(y,x,z) \wedge \mathrm{div}_\delta(x,z) \wedge \mathrm{div}_\delta(s(x),z)\wedge \\ &\wedge (\forall u)(0 < u \wedge \mathrm{div}_\delta(x,u) \wedge \mathrm{div}_\delta(s(x),u) \to z \le u))].\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем фактом, что

$$x^2 = x(x+1) - x = \text{НОК}(x, x+1) - x.$$

Теперь легко представить умножение, используя тождество $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$:

$$\begin{aligned}\mathrm{mult}_\Delta(x,y,z) \equiv (&\exists x', y', z', u', v', w, w')(\mathrm{sqr}_\Delta(x,x')\wedge \\ &\wedge \mathrm{sqr}_\Delta(y,y') \wedge \mathrm{sum}_\delta(x,y,w) \wedge \mathrm{sqr}_\Delta(w,w')\wedge \\ &\wedge \mathrm{sum}_\delta(x',y',u') \wedge \mathrm{sum}_\delta(z,z,v') \wedge \mathrm{sum}_\delta(u',v',w')).\end{aligned}$$

Оценка длины формул получается из лемм 1 и 5. □

Теорема 4. *Существует такая константа* c_9*, что для любой формулы* $\mathrm{sum}_\Delta(x,y,z)$ *найдется формула* $\mathrm{pow}_\Delta(x,y)$*. При этом* $|\,\mathrm{pow}_\Delta\,| \le c_9 |\,\mathrm{sum}_\Delta\,|$.

Доказательство. Сначала построим отношение $P(x)$, выделяющее степени двойки:

$$P(x) \equiv [(\forall y)(\mathrm{div}_\Delta(y,x) \to y = 1 \vee \mathrm{div}_\Delta(2,y))].$$

Далее будем рассматривать числа вида $2^x + x$. Построим формулу $Q(x,y)$ связывающую два последовательных числа такого вида:

$$Q(x,y) \equiv [(\exists z)(P(z) \wedge z \le x \wedge \neg(\exists u)(P(u) \wedge z < u \wedge u \le x) \wedge \mathrm{sum}_\Delta(x, s(z), y))].$$

Далее построим транзитивное замыкание отношения Q:

$$Q^*(x,y) \equiv [\mathsf{T}_{x,y}\, Q(x,y)].$$

Поскольку наименьшим числом вида $2^x + x$ является единица (при $x = 0$), то множество чисел z такого вида можно выделить с помощью формулы $Q^*(1,z)$.

Теперь отношение pow_Δ можно представить так:

$$\mathrm{pow}_\Delta(x,y) \equiv [(\exists z)(Q^*(1,z) \wedge \mathrm{sum}_\Delta(y,x,z)].$$

Верхнюю границу длины формулы получаем из леммы 1. □

Комбинируя предыдущие теоремы можно получить следующую:

Теорема 5. *Для любого n существуют формулы* mult_δ *и* pow_δ *длины* $O(n)$, *где* $\delta \geq H_2(n)$.

Доказательство. Следует из теорем 2, 3 и 4. □

Заключение

Мы продемонстрировали, что при наличии одноместного оператора транзитивного замыкания для теории дискретного порядка появляется возможность выражать арифметические операции вплоть до чисел порядка $H_2(n)$, используя формулы длины $O(n)$. В дальнейшем эти результаты могут быть применены для оценки сложности разрешения такой теории.

Список литературы

[1] Булос Дж., Джеффри Р. Вычислимость и логика / под ред. С.Н. Артемова. М.: Мир, 1994. 396 с.

[2] Золотов А.С. Применение оператора транзитивного замыкания для формул с одной функцией следования и предикатами делимости // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2013. № 1(28). С. 101–117.

[3] Золотов А.С. О неразрешимости аддитивных и мультипликативных теорий натуральных чисел с оператором транзитивного замыкания // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 3. С. 117–125.

[4] Карацуба А.А. Основы аналитической теории чисел. М.: УРСС, 2004. 184 с.

[5] Fagin R. Monadic generalized spectra // Zeitschrift fuer Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik. 1975. № 21. Pp. 89–96.

[6] Fischer M.J., Rabin M.O. Super-exponential complexity of Presburger arithmetic // Proceedings of the SIAM-AMS Symposium in Applied Mathematics. 1974. Vol. 7. Pp. 27–41.

Образец цитирования

Дудаков С.М. О выразительной силе логики одноместного транзитивного замыкания для дискретного порядка // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 4. С. 25–33. https://doi.org/10.26456/vtpmk186

Сведения об авторах

1. **Дудаков Сергей Михайлович**
заведующий кафедры информатики Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
E-mail: sergeydudakov@yandex.ru.

ON EXPRESSIVE POWER OF MONADIC TRANSITIVE CLOSE LOGIC OVER DISCRETE ORDER

Dudakov Sergey Mikhailovich
Head of Computer Science department,
Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TverSU.
E-mail: sergeydudakov@yandex.ru

Received 12.09.2017, revised 05.12.2017.

We establish that the monadic transitive close operator over linear discrete order allows to express addition, multiplication and exponential function up to $H_2(n)$. Here n is formulas length and $H_2(n)$ is the hyperexponential function.

Keywords: transitive close logic, linerar discrete order, expressive power.

Citation

Dudakov S.M. On expressive power of monadic transitive close logic over discrete order. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2017, no. 4, pp. 25–33. (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk186

References

[1] Bulos D., Dzheffri R. *Vychislimost i Logika* [Computability and Logic]. Ed. by S.N. Artemova. Mir Publ. Moscow, 1994. 396 p. (in Russian)

[2] Zolotov A.S. The use of the transitive closure operator on formulas with a single successor function and divisibility predicates. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2013, no. 1(28), pp. 101–117. (in Russian)

[3] Zolotov A.S. On undecidability of additive and multiplicative theories of natural numbers with the transitive closure operator. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2014, no. 3, pp. 117–125. (in Russian)

[4] Karatsuba A.A. *Osnovy Analiticheskoi Teorii Chisel* [Fundamentals of Analytic Number Theory]. URSS, Moscow, 2004. 184 p. (in Russian)

[5] Fagin R. Monadic generalized spectra. *Zeitschrift fuer Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 1975, no. 21, pp. 89–96.

[6] Fischer M.J., Rabin M.O. Super-exponential complexity of Presburger arithmetic. *Proceedings of the SIAM-AMS Symposium in Applied Mathematics*, 1974, vol. 7, pp. 27–41.