УДК 512.5, 510.3

РЕШЕТКИ МНОЖЕСТВ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР ЗАМЫКАНИЯ[1]

Горбунов И.А.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 29.06.2017, после переработки 12.09.2017.

Как известно, если оператор замыкания является алгебраическим, то решетка его замкнутых множеств является алгебраической. Однако в общем случае неверно, что если некоторое семейство множеств образует алгебраическую решетку по включению, то естественный оператор замыкания, определенный этой решеткой, будет алгебраическим. В работе приводится пример алгебраической решетки множеств, естественный оператор замыкания которой не является алгебраическим. Кроме того, приводится точный критерий алгебраичности естественного оператора замыкания, определенного алгебраической решеткой.

Ключевые слова: алгебраическая решетка, алгебраический оператор замыкания, система замыканий.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 4. С. 35–42.
https://doi.org/10.26456/vtpmk187

Введение

Пусть U — некоторое непустое множество. Заданную на множестве всех его подмножеств одноместную операцию C будем называть *оператором (или операцией) замыкания на множестве* U, если эта операция удовлетворяет следующим условиям:

C1. $X \subseteq C(X)$;

C2. $X \subseteq Y \Rightarrow C(X) \subseteq C(Y)$;

C3. $C(C(X)) = C(X)$.

Множество $X \subseteq U$ будем называть *замкнутым множеством*, если $C(X) = X$.

Для любого множества X посредством $\mathcal{P}(X)$ будем обозначать множество его подмножеств, а посредством $\mathcal{P}_{fin}(X)$ — множество всех его конечных подмножеств.

Частично упорядоченное множество $\langle A, \leq \rangle$ будем называть решеткой, если для любых элементов a и b существуют наибольшая нижняя грань $a \wedge b = \inf\{a, b\}$ и

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 16–07–01272-а и № 17–03–00818-а).

наименьшая верхняя грань $a \vee b = \sup\{a, b\}$. Решетку будем называть полной, если любое подмножество X множества A имеет инфинум и супремум, которые мы будем обозначать $\bigwedge X$ и $\bigvee X$, соответственно.

Элемент a полной решетки называется *компактным*, если для всякого множества A элементов этой решетки верно, что $a \leq \bigvee A \Rightarrow \exists B \in \mathcal{P}_{fin}(A)(a \leq \bigvee B)$. Решетка называется *алгебраической*, если она является полной и для любого ее элемента a существует такое множество компактных элементов A, что $a = \bigvee A$.

Оператор замыкания называется *алгебраическим*, если выполняется равенство $C(X) = \bigcup\{C(Y) : Y \in \mathcal{P}_{fin}(X)\}$.

Говорят, что семейство множеств $\mathcal{L}$ образует *систему замыканий* (closure system), если для любого его подсемейства $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{L}$ верно, что $\bigcap \mathcal{Y} \in \mathcal{L}$.[2] Известно (см. [1], с. 57, Теорема 1.1), что если семейство множеств $\mathcal{L}$ образует систему замыканий, то оно определяет оператор замыкания на множестве $\bigcup \mathcal{L}$ следующим образом: $C(X) = \bigcap\{Y \in \mathcal{L} : X \subseteq Y\}$.

Замкнутыми элементами при этом являются в точности все элементы семейства $\mathcal{L}$, которые образуют полную решетку по включению относительно пересечения и операции взятия супремума, которая для любого подсемейства $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{L}$ определяется следующим образом: $\bigvee \mathcal{Y} = C(\bigcup \mathcal{Y})$.

Пусть задано некоторое семейство множеств $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(U)$, которое образует полную решетку по включению $\langle \mathcal{T}, \vee, \wedge \rangle$. Будем говорить, что решетка $\langle \mathcal{T}, \vee, \wedge \rangle$ *определяет естественный (для этой решетки) оператор замыкания на множестве* U, если существует одноместная функция $C : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(U)$, которая является операцией замыкания на U и неподвижными точками которой являются в точности элементы $\mathcal{T}$.

Известно, что полная решетка по включению $\langle \mathcal{T}, \vee, \wedge \rangle$ некоторого семейства множеств $\mathcal{T}$ определяет естественный оператор замыкания на $\bigcup \mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда для любого подсемейства $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}$ верно, что $\bigwedge \mathcal{X} = \bigcap \mathcal{X}$. То есть, когда семейство множеств $\mathcal{T}$ образует систему замыканий. Решетку, элементы которой образуют систему замыканий, будем обозначать $\langle \mathcal{T}, \vee, \cap \rangle$.

Хорошо известны следующие факты.

Если оператор замыкания является алгебраическим, то решетка его замкнутых множеств является алгебраической ([2] с. 11–12, Теорема 5.1).

Всякая алгебраическая решетка изоморфна решетке замкнутых множеств некоторого алгебраического оператора замыкания ([2] с. 12–13, Теорема 5.2).

Однако, следующее утверждение: *если некоторое семейство множеств* $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(U)$ *образует алгебраическую решетку по включению, то определенный по этой решетке естественный оператор замыкания будет алгебраическим*, в общем случае не верно, что мы докажем ниже.

Также мы рассмотрим некоторое условие, которому должна удовлетворять алгебраическая решетка по включению, чтобы определенный ею естественный оператор замыкания был алгебраическим.

1. Конечная порожденность компактных элементов

Пусть $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(U)$ — некоторое семейство подмножеств, которое образует полную

[2]Семейство множеств, образующее систему замыканий, является нижней полной полурешеткой.

решетку по включению с естественным оператором замыкания C. Будем говорить, что некоторый элемент $X \in \mathcal{T}$ *конечнопорожден*, если существует такое конечное множество $A \subseteq U$, что $X = C(A)$.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{T}$ — семейство подмножеств множества U, образующее полную решетку по включению $\langle \mathcal{T}, \vee, \cap \rangle$ с естественным оператором замыкания C, и X — компактный элемент решетки. Тогда X конечнопорожден.*

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathcal{X} = \{B : B \in \mathcal{P}_{fin}(X)\}$ и множество $\mathcal{B} = \{C(B) : B \in \mathcal{P}_{fin}(X)\}$. Известно, что если решетка определяет оператор замыкания, то для любого подсемейства $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{T}$ верно, что $\bigvee \mathcal{Y} = C(\bigcup \mathcal{Y})$, (см. [2] с. 10, Теорема 4.1). Так как $X = \bigcup \mathcal{X}$ и $\bigcup \mathcal{X} \subseteq \bigcup \mathcal{B} \subset C(\bigcup \mathcal{B})$, то $X \subseteq \bigvee \mathcal{B}$. Поскольку элемент X является компактным, то существует такое конечное подсемейство $\{C(B_1), \dots, C(B_n)\} \subseteq \mathcal{B}$, что $X \subseteq \bigvee \{C(B_1), \dots, C(B_n)\} = C(\bigcup \{C(B_1), \dots, C(B_n)\}) = C(\bigcup \{B_1, \dots, B_n\})$.

Для любого $1 \leq i \leq n$ верно, что $B_i \subseteq X$, следовательно, $C(\bigcup \{B_1, \dots, B_n\}) \subseteq C(X) = X$. Таким образом, $X = C(\bigcup \{B_1, \dots, B_n\})$, где $\bigcup \{B_1, \dots, B_n\}$ — конечное множество. $\square$

2. Пример алгебраической решетки множеств с неалгебраическим оператором замыкания

Построим алгебраическую решетку подмножеств, естественный оператор замыкания которой не будет алгебраическим.

Посредством H обозначим множество всех нечетных натуральных чисел. Пусть $L = \{2 + 3^k : k \geq 1\}$, $\mathcal{X} = \{X \in \mathcal{P}(H) : L \subseteq X\}$ и $\Phi = \{X \cup \{2\} : X \in \mathcal{X}\}$. Элементы множества $\Psi = \mathcal{P}(H) \setminus \mathcal{X}$ будем называть *стандартными* элементами, элементы множества Φ будем называть *выделенными* элементами. Всякое выделенное множество Y имеет вид: $Y = \{2\} \cup L \cup M$, где M — некоторое стандартное множество. Семейство множеств $\mathcal{T} = \Psi \cup \Phi$, с отношением включения, и будет образовывать нужную нам решетку.

Лемма 2. *Семейство $\mathcal{T}$ образует систему замыканий.*

Доказательство. Несложно убедится, что для любого подсемейства $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}$ верно следующее: если существует такое $X \in \mathcal{X}$, что $X \in \Psi$, то $\bigcap \mathcal{X} \in \Psi$, в противном случае $\bigcap \mathcal{X} \in \Phi$. $\square$

Поскольку, семейство $\mathcal{T}$ образует систему замыканий, то оно определяет оператор замыкания C на множестве $H \cup \{2\}$, при этом:

$$C(X) = \begin{cases} \{2\} \cup X, & L \subseteq X \text{ и } 2 \notin X; \\ L \cup X, & 2 \in X \text{ и } L \not\subseteq X; \\ X, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, в этой решетке операция $\bigvee$ определяется следующим образом: для любого $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}$,

$$\bigvee \mathcal{X} = \begin{cases} (\bigcup \mathcal{X}) \cup \{2\}, & L \subseteq \bigcup \mathcal{X}; \\ \bigcup \mathcal{X}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Лемма 3. *Множество компактных элементов этой решетки совпадает со множеством всех конечных стандартных множеств.*

Доказательство. В силу Леммы 1, всякий компактный элемент решетки конечнопорожден. Все конечнопорожденные множества этой решетки делятся на стандартные и нестандартные.

В силу определения операции замыкания на данной решетке, замыкание конечного стандартного множества совпадает с ним самим. Пусть $\{k_1, \ldots, k_n\} \in \Psi$ и для некоторого бесконечного семейства $\mathcal{X}$ верно, что $\{k_1, \ldots, k_n\} \subseteq \bigvee \mathcal{X}$. Поскольку $\bigvee \mathcal{X} = \bigcup \mathcal{X}$ или $\bigvee \mathcal{X} = (\bigcup \mathcal{X}) \cup \{2\}$, то есть, в любом случае, $\bigvee \mathcal{X}$ включает объединение множеств из $\mathcal{X}$, то для каждого числа k_i верно, что оно принадлежит некоторому элементу объединения. Таким образом, в $\mathcal{X}$ найдется такое конечное подсемейство, что множество $\{k_1, \ldots, k_n\}$ содержится в супремуме этого подсемейства.

Рассмотрим теперь конечные нестандартные множества, то есть содержащие число 2. Такое множество имеет вид $\{2, k_1, \ldots, k_n\}$. Заметим что $C(\{2, k_1, \ldots, k_n\}) \subseteq \bigvee\{\{x\} : x \in L \cup \{k_1, \ldots, k_n\}\}$ и из этого бесконечного семейства нельзя выделить конечное подсемейство, супремум которого содержал бы $C(\{2, k_1, \ldots, k_n\})$.

Таким образом, все конечнопорожденные стандартные множества являются компактными элементами данной решетки. Поскольку все остальные конечнопорожденные элементы этой решетки компактными не являются, то семейство ее компактных элементов совпадает с семейством всех конечных стандартных множеств. □

Лемма 4. *Любой элемент решетки $\mathcal{T}$ является супремумом некоторого семейства компактных элементов.*

Доказательство. Очевидно, что для любого стандартного множества X имеем: $X = \bigcup\{\{x\} : x \in X\} = \bigvee\{C(x) : x \in X\}$.

Поскольку всякое выделенное множество $Y = \{2\} \cup L \cup M$, где M — некоторое стандартное множество, то $Y = \bigvee\{C(x) : x \in L \cup M\}$. □

Теорема 1. *Семейство $\mathcal{T}$ является алгебраической решеткой по включению, оператор замыкания которой не является алгебраическим.*

Доказательство. Тот факт, что решетка $\mathcal{T}$ является алгебраической, следует из лемм 3 и 4.

Из Леммы 2 следует, что она определяет оператор замыкания C на множестве $\bigcup \mathcal{T} = H \cup \{2\}$.

Заметим, что

$$C(L) = \{2\} \cup L \neq \bigcup\{Y : Y \in \mathcal{P}_{fin}(L)\} = \bigcup\{C(Y) : Y \in \mathcal{P}_{fin}(L)\}.$$

Следовательно, естественный оператор замыкания этой решетки алгебраическим не является. □

3. Отображения в подсемейства компактных элементов

Пусть некоторое семейство множеств $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(U)$ образует алгебраическую решетку по включению $\langle \mathcal{T}, \vee, \cap \rangle$, которая определяет естественный оператор замыкания на U.

Как известно, если $\mathcal{L}$ — некоторая алгебраическая решетка и $\mathcal{K}$ — множество всех ее компактных элементов, то на множестве $\mathcal{K}$ можно определить оператор замыкания $C^{\mathcal{K}}$ таким образом, что решетка замкнутых множеств этого оператора, будет изоморфна решетке $\mathcal{L}$. Определим этот изоморфизм для решетки $\langle \mathcal{T}, \vee, \cap \rangle$.

Пусть $\mathcal{K}$ — множество всех компактных в $\langle \mathcal{T}, \vee, \cap \rangle$ элементов. На множестве $\mathcal{P}(\mathcal{K})$ определим алгебраический оператор замыкания $C^{\mathcal{K}}$ следующим образом: для любого $\Gamma \in \mathcal{P}(\mathcal{K})$,

$$C^{\mathcal{K}}(\Gamma) = \{K \in \mathcal{K} : K \subseteq \bigvee \Gamma\}.$$

Тогда семейство всех замкнутых элементов из $\mathcal{P}(\mathcal{K})$ образует алгебраическую решетку по включению S, которая изоморфна решетке $\langle \mathcal{T}, \vee, \cap \rangle$. Отображение $\phi : \mathcal{T} \to S$ такое, что

$$\phi(X) = \{K \in \mathcal{K} : K \subseteq X\} = C^{\mathcal{K}}(\Gamma),$$

где Γ — такое множество компактных элементов, что $X = \bigvee \Gamma$, является изоморфизмом между решетками $\langle \mathcal{T}, \vee, \cap \rangle$ и S. (Доказательство этих фактов можно посмотреть в [2], стр. 12–13, доказательство Теоремы 5.2.)

Расширим отображение ϕ до отображения $\phi^{\mathcal{P}} : \mathcal{P}(U) \to S$, положив для любого $A \in \mathcal{P}(U)$,

$$\phi^{\mathcal{P}}(A) = \{K \in \mathcal{K} : K \subseteq A\}.$$

Далее, для любого семейства множеств $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(U)$ посредством $\phi(\mathcal{X})$ и $\phi^{\mathcal{P}}(\mathcal{X})$ будем обозначать семейства образов.

Семейство множеств $\mathcal{X}$ будем называть *направленным*, если для любых $A \in \mathcal{X}$ и $B \in \mathcal{X}$ существует такое $C \in \mathcal{X}$, что $A \cup B \subseteq C$.

Лемма 5. *Пусть $\mathcal{T}$ — семейство подмножеств множества U, образующее алгебраическую решетку по включению $\langle \mathcal{T}, \vee, \wedge \rangle$, и $\mathcal{X}$ — его направленное подсемейство. Тогда $\phi^{\mathcal{P}}(\bigcup \mathcal{X}) = \bigcup \phi(\mathcal{X})$.*

Доказательство. Несложно заметить, что $\phi^{\mathcal{P}}$ является монотонным относительно включения отображением. Кроме того, верно, что для любого $X \in \mathcal{T}$, $\phi(X) = \phi^{\mathcal{P}}(X)$. Также для любого $X \in \mathcal{T}$, верно, что если $X \subseteq \bigcup \mathcal{X}$, то $\phi(X) \subseteq \phi^{\mathcal{P}}(\bigcup \mathcal{X})$ и, значит, $\bigcup \phi(\mathcal{X}) \subseteq \phi^{\mathcal{P}}(\bigcup \mathcal{X})$.

Пусть $K \in \phi^{\mathcal{P}}(\bigcup \mathcal{X})$. Тогда $K \subseteq \bigcup \mathcal{X}$. Для любого семейства $\mathcal{X}$ элементов полной решетки подмножеств верно, что $\bigcup \mathcal{X} \subseteq \bigvee \mathcal{X}$ и, значит, $K \subseteq \bigvee \mathcal{X}$. Так как K — компактный элемент решетки $\langle \mathcal{T}, \vee, \wedge \rangle$, то существует подсемейство $\{Y_1, \ldots, Y_n\} \subseteq \mathcal{X}$ такое, что $K \subseteq \bigvee \{Y_1, \ldots, Y_n\}$. Вследствие того, что $\mathcal{X}$ — направленное семейство, существует такое $Z \in \mathcal{X}$, что $\bigcup \{Y_1, \ldots, Y_n\} \subseteq Z$. Поскольку $\bigvee \{Y_1, \ldots, Y_n\} = \sup \{Y_1, \ldots, Y_n\}$, то $\bigvee \{Y_1, \ldots, Y_n\} \subseteq Z$. Таким образом, получим, что $K \subseteq Z$ и, значит, $K \in \phi(Z) \subseteq \bigcup \phi(\mathcal{X})$. □

4. Критерий алгебраичности оператора замыкания алгебраической решетки множеств

Для любого $x \in U$ любое компактное подмножество K_x, для которого $x \in K_x$, будем называть *компактным представителем* элемента x.

Лемма 6. *Пусть $\mathcal{T}$ — семейство подмножеств множества U, образующее алгебраическую решетку по включению $\langle \mathcal{T}, \vee, \wedge \rangle$. Если для любого $X \in \mathcal{T}$ верно, что для любого $x \in X$ во множестве $\phi(X)$ есть его компактный представитель, то семейство $\mathcal{T}$ замкнуто относительно объединения его направленных подсемейств.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}$ и $\mathcal{X}$ является направленным. Покажем, что $\bigcup \mathcal{X} \in \mathcal{T}$. Для этого докажем, что $\bigcup \mathcal{X} = \bigvee \mathcal{X}$.

Включение $\bigcup \mathcal{X} \subseteq \bigvee \mathcal{X}$ очевидно, докажем обратное включение.

Пусть $x \in \bigvee \mathcal{X}$. Тогда в $\phi(\bigvee \mathcal{X})$ существует его компактный представитель — множество K_x.

Так как ϕ — изоморфизм, то раз семейство $\mathcal{X}$ — направленное, то и семейство $\phi(\mathcal{X})$ будет направленным. Поскольку $C^{\mathcal{K}}$ — алгебраический оператор, то решетка его неподвижных точек замкнута относительно объединения направленных подсемейств (см. [1], с. 59–60, Теорема 1.2). Учитывая также Лемму 5, получим цепочку равенств:

$$\phi(\bigvee \mathcal{X}) = \bigvee \phi(\mathcal{X}) = \bigcup \phi(\mathcal{X}) = \phi^{\mathcal{P}}(\bigcup \mathcal{X}).$$

Таким образом, $K_x \in \phi^{\mathcal{P}}(\bigcup \mathcal{X})$, то есть $K_x \subseteq \bigcup \mathcal{X}$ и, значит, $x \in \bigcup \mathcal{X}$. □

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{T}$ — семейство подмножеств множества U, образующее алгебраическую решетку по включению $\langle \mathcal{T}, \vee, \cap \rangle$, которая определяет естественный оператор замыкания C на U. Оператор C является алгебраическим тогда и только тогда, когда для любого $X \in \mathcal{T}$ верно, что для любого $x \in X$ во множестве $\phi(X)$ есть его компактный представитель.*

Доказательство. В силу Леммы 6, семейство $\mathcal{T}$ замкнуто относительно объединения его направленных подсемейств. Как известно (см. [1], с. 59–60, Теорема 1.2), если полная решетка замкнутых подмножеств замкнута относительно объединения направленных подсемейств, то ее естественный оператор замыкания является алгебраическим.

Пусть оператор замыкания C, определенный решеткой $\langle \mathcal{T}, \vee, \cap \rangle$, является алгебраическим. Пусть $X \in \mathcal{T}$ и $x \in X$. Тогда $C(x) \subseteq X$. Поскольку все конечно-порожденные алгебраическим оператором замыкания множества являются компактными в решетке его замкнутых подмножеств (см. [3], с. 243–244, Теорема 7), то $C(x)$ является компактным представителем x в $\phi(X)$. □

Заключение

В данной работе получен еще один точный критерий алгебраичности оператора замыкания, который порожден некоторой системой замыканий.

Таким образом, как следует из Леммы 3.1 (см. [4], с. 27–28), Леммы 1 и Теоремы 7 (см. [3], с. 243–244), а также Теоремы 2 настоящей работы, следующие утверждения будут эквивалентны:

– *оператор замыкания, порожденный решеткой* $\langle \mathcal{T}, \vee, \cap \rangle$, *является алгебраическим*;

– *решетка* $\langle \mathcal{T}, \vee, \cap \rangle$ *замкнута относительно объединения ее направленных подсемейств*;

– *все конечнопорожденные естественным оператором замыкания решетки* $\langle \mathcal{T}, \vee, \cap \rangle$ *множества являются компактными*;

– *в алгебраической решетке* $\langle \mathcal{T}, \vee, \cap \rangle$ *для любого* $X \in \mathcal{T}$ *и для любого* $x \in X$ *существует такой его компактный представитель* K_x, *что* $K_x \subseteq X$.

Несложно заметить, что последнее утверждение эквивалентно следующему: *в алгебраической решетке* $\langle \mathcal{T}, \vee, \cap \rangle$ *для любого* $X \in \mathcal{T}$ *и для любого* $x \in \bigcup \mathcal{T}$ *верно, что* $x \in X$ *тогда и только тогда, когда существует такой компактный его представитель* K_x, *что* $K_x \subseteq X$.

Список литературы

[1] Кон П. Универсальная алгебра. М.: Мир, 1969. 351 с.

[2] Смирнов Д.М. Многообразия алгебр. Новосибирск: ВО «Наука». Сибирская издательская фирма, 1992. 202 с.

[3] Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984. 568 с.

[4] Blok W.J., Pigozzi D. Algebraizable logics // Memoirs of the American Mathematical Society. 1989. Vol. 77. № 396.

Образец цитирования

Горбунов И.А. Решетки множеств и алгебраический оператор замыкания // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 4. С. 35–42. https://doi.org/10.26456/vtpmk187

Сведения об авторах

Горбунов Игорь Анатольевич
доцент кафедры функционального анализа и геометрии Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова 33, ТвГУ. E-mail: i_gorbunov@mail.ru.

LATTICES OF SETS AND ALGEBRAIC CLOSURE OPERATOR

Gorbunov Igor Anatolievich
Associate professor at Functional Analysis and Geometry department,
Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TverSU.
E-mail: i_gorbunov@mail.ru

Received 29.06.2017, revised 12.09.2017.

It is well known that a lattice of closed sets is algebraic lattice if a closure operator is algebraic. The converse is not true. In this paper we give an example of an algebraic lattice the closure operator of which is not algebraic. The exact criterion that the closure operator of an algebraic lattice is algebraic is found. It is proved that the closure operator of an algebraic lattice $\mathcal{T}$ is algebraic if and only if for any $X \in \mathcal{T}$ and for any $x \in X$, there exists a compact element K_x such that $x \in K_x$ and $K_x \subseteq X$.

Keywords: algebraic lattice, algebraic closure operator, closure system.

Bibliographic citation

Gorbunov I.A. Lattices of sets and algebraic closure operator. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2017, no. 4, pp. 35–42. (in Russian) https://doi.org/10.26456/vtpmk187

References

[1] Cohn P.M. *Universal Algebra.* Harper and Row, New York, 1965.

[2] Smirnov D. *Mnogoobraziya Algebr* [Varieties of Algebras]. Nauka. Sibirskaya izdatelskaya firma, Novosibirsk, 1992. (in Russian)

[3] Birkhoff G. *Lattice Theory.* Providence, Rhode Island, 1967.

[4] Blok W.J., Pigozzi D. Algebraizable logics. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 1989, vol. 77(396).