УДК 517.5

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ МАРКОВА

Дрожжин И.А.
Тверской государственный университет, г. Тверь

Поступила в редакцию 16.06.2017, после переработки 17.07.2017.

В пространстве суммируемых на отрезке функций получен признак наилучшего приближения при аппроксимации элементами конечномерного конуса, который является аналогом известной теоремы Маркова А.А.

Ключевые слова: банахово пространство, замкнутое выпуклое множество, суммируемая функция, наилучшее приближение, конус конечной размерности, расширенный конус, интерполяционный полином.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 4. С. 73–83.
https://doi.org/10.26456/vtpmk190

Введение

В пространстве суммируемых на отрезке функций рассматривается задача наилучшего приближения при аппроксимации элементами конуса конечной размерности. Приводятся признаки наилучшего приближения, в частности, в терминах расширенного конуса. Получен достаточный признак наилучшего приближения, который является аналогом теоремы Маркова А.А.. В конце работы рассматриваются известные способы построения наилучших приближений при аппроксимации подпространствами тригонометрических и алгебраических полиномов, которые могут быть использованы и в случае приближения элементами конуса с указанными образующими.

1. Признаки наилучшего приближения в пространстве суммируемых функций

Пусть X — некоторое банахово пространство, F — выпуклое замкнутое множество в X. Под задачей наилучшего приближения элемента $x \in X$ элементами множества F будем понимать задачу отыскания величины

$$E(x, F) = inf\{\|x - h\| : h \in F\}.$$

Число $E(x,F)$ назовем величиной наилучшего приближения элемента $x \in X$ элементами множества F, а элемент $u \in F$, для которого

$$E(x,F) = \|x-u\|,$$

назовем элементом наилучшего приближения (э.н.п.) для x в F.

Геометрически наилучшее приближение элемента x трактуется как его расстояние до множества F, а элемент наилучшего приближения — как точка множества F, ближайшая к x.

В качестве пространства X рассмотрим банахово пространство $L[a;b]$ вещественных функций, суммируемых на отрезке $[a;b]$, с нормой

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)|dt, \quad x \in L[a;b].$$

Пусть F — замкнутое выпуклое множество в $L[a;b]$.

В [1] доказана

Теорема 1.1. *Для того чтобы элемент $h_0 \in F$ являлся э.н.п. для $x \in L[a;b] \setminus F$ во множестве F достаточно, а если мера множества*

$$\{t \in [a;b] : \ x(t) = h_0(t)\}$$

равна нулю, то и необходимо, выполнение следующего условия

$$\int_a^b (h(t) - h_0(t))\ sign(x(t) - h_0(t))\ dt \le 0 \text{ для любого } h \in F.$$

Рассмотрим случай, когда замкнутое выпуклое множество F является конечномерным конусом.

Пусть $\{\varphi_1,\ \varphi_2,\ \dots,\ \varphi_n\}$ — линейно независимая система в $L[a;b]$, m — целое неотрицательное число. Положим

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\ \varphi_k : \ \alpha_k \in R\ , \alpha_j \ge 0 \text{ при } \ j > m \right\},$$

$$h_0 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\ \varphi_k \in H,$$

$$J(h_0) = \{1, 2, \dots, m\} \cup \{k > m : \ \lambda_k > 0\},$$

$$H_{J(h_0)} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \beta_k\ \varphi_k : \ \beta_k \in R,\ \beta_j \ge 0 \text{ при } \ j \notin J(h_0) \right\}.$$

Множества $H, H_{J(h_0)}$ являются замкнутыми конусами, при этом $H \subset H_{J(h_0)}$. Конус $H_{J(h_0)}$ в дальнейшем будем называть расширенным [4] относительно элемента $h_0 \in H$. Функции $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \dots,\ \varphi_n$ назовем образующими конуса H.

Лемма 1.1. *Для любого $h_0 \in H$ имеет место равенство*

$$H_{J(h_0)} = \{u \in L[a;b]: \ u = \alpha(h - h_0), \ \alpha \geq 0, \ h \in H\}.$$

Доказательство.

$$\{u \in L[a;b]: \ u = \alpha(h - h_0), \alpha \geq 0, \ h \in H\} \subset H_J(h_0)$$

очевидно, т.к. элемент $h - h_0 \in H_{J(h_0)}$ для любого $h \in H$ и следовательно

$$\alpha \ (h - h_0) \in H_J(h_0)$$

при $\alpha \geq 0$. Покажем, что

$$H_{J(h_0)} \subset \{u \in L[a;b]: \ u = \alpha(h - h_0), \alpha \geq 0, \ h \in H\}.$$

Пусть $w \in H_{J(h_0)}$. Элемент w можно представить в виде

$$w = w + h_0 - h_0.$$

Подберем $m_0 \in N$ таким образом, чтобы

$$\frac{1}{m_0} \ w + h_0 \in H.$$

Поэтому

$$w = m_0(\frac{1}{m_0} \ w + h_0 - h_0) = m_0(v - h_0),$$

где $v = \frac{1}{m_0} \ w + h_0 \in H$ и включение доказано. Лемма верна. □

Так как конус H является замкнутым выпуклым локально компактным множеством, то для каждого $x \in L[a;b]$ существует э.н.п. в конусе H, а множество его элементов наилучшего приближения выпукло [3].

Следствие 1.1. *Пусть $x \in L[a;b] \setminus H$, $h_0 \in H$. Для того чтобы h_0 был э.н.п. для x при аппроксимации элементами конуса H, достаточно, а в случае, когда множество*

$$\{t \in [a;b] : x(t) = h_0(t)\}$$

имеет меру нуль и необходимо, выполнение условия

$$\int_a^b \varphi(t) \ sign(x(t) - h_0(t)) \ dt \leq 0$$

для любого $\varphi \in H_{J(h_0)}$.

Для установления справедливости следствия достаточно применить лемму 1.1 о структуре расширенного конуса.

Сформулируем без доказательства критерий наилучшего приближения в терминах расширенного конуса.

Теорема 1.2. *Пусть $x \in L[a;b]$. Элемент h_0 есть э.н.п. для x в конусе H тогда и только тогда, когда h_0 — э.н.п. для x в расширенном конусе $H_{J(h_0)}$.*

Лемма 1.2. *Пусть $x \in L[a;b]$ и $h_0 \in H$. Следующие условия эквивалентны:*

1. $\displaystyle\int_a^b (h(t) - h_0(t))\ sign(x(t) - h_0(t))\ dt \leq 0$ *для любого* $h \in H$;
2. $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\ sign(x(t) - h_0(t))\ dt \leq 0$ *для любого* $\varphi \in H_{J(h_0)}$;
3. $\displaystyle\int_a^b h_0(t)\ sign(x(t) - h_0(t))\ dt = \sup_{h \in H} \int_a^b h(t)\ sign(x(t) - h_0(t))\ dt$;
4. $\displaystyle\int_a^b h_0(t)\ sign(x(t) - h_0(t))\ dt = 0$;

   $\displaystyle\int_a^b h(t) sign(x(t) - h_0(t))\ dt \leq 0$ *для любого* $h \in H$.

Доказательство. Импликации (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1) очевидны. Покажем, что (2) $\Leftrightarrow$ (4). Предположим в начале, что

$$\int_a^b \varphi(t)\ sign(x(t) - h_0(t))\ dt \leq 0 \ \text{ для любого } \varphi \in H_{J(h_0)}.$$

Тогда из условия $h_0,\ -h_0 \in H_{J(h_0)}$ следует

$$\int_a^b h_0(t)\ sign(x(t) - h_0(t))\ dt = 0.$$

Далее, для каждого $h \in H$ элемент $h - h_0 \in H_{J(h_0)}$ и поэтому

$$\int_a^b h(t)\ sign(x(t) - h_0(t))\ dt = \int_a^b (h(t) - h_0(t))\ sign(x(t) - h_0(t))\ dt \leq 0.$$

Таким образом, импликация (2) $\Rightarrow$ (4) верна.

Покажем теперь справедливость импликации (4) $\Rightarrow$ (2). Пусть $\varphi \in H_{J(h_0)}$. Тогда по лемме 1.1 найдутся $\alpha \geq 0$ и $h \in H$ такие, что

$$\varphi = \alpha(h - h_0).$$

Следовательно

$$\int_a^b \varphi\ sign(x(t) - h_0(t))\ dt =$$

$$= \int_a^b \alpha(h(t) - h_0(t)) sign(x(t) - h_0(t))\ dt =$$

$$= \alpha \int_a^b h(t) sign(x(t) - h_0(t))\ dt \leq 0.$$

Итак, лемма доказана полностью. □

В силу следствия 1.1 каждое из условий (1)–(4) леммы 1.2 является достаточным, а в случае, когда множество

$$\{t \in [a;b] : \ x(t) = h_0(t)\}$$

имеет меру нуль и необходимо, для того чтобы элемент h_0 был э.н.п. для функции $x \in L[a;b] \setminus H$ в конусе H, при этом

$$E(x,H) = \|x - h_0\| = \int_a^b x(t)\ sign(x(t) - h_0(t))\, dt.$$

Подводя итог вышесказанному, сформулируем следующую теорему.

Теорема 1.3. *Пусть конус H имеет вид*

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\ \varphi_k : \ \alpha_k \in R, \alpha_j \geq 0, k > m \right\},$$

$h_0 \in H$, H_1 — подпространство, содержащееся в конусе H, базисом которого являются функции множества $\{\varphi_k : \ k \in J(h_0)\}$, т.е.

$$H_1 = \left\{ \sum_{k \in J(h_0)} \alpha_k\ \varphi_k : \ \alpha_k \in R \right\}.$$

Для того чтобы h_0 являлся э.н.п. для $x \in L[a;b] \setminus H$ при аппроксимации конусом H, достаточно, а в случае, когда множество

$$\{t \in [a;b] : \ x(t) = h_0(t)\}$$

имеет нулевую меру и необходимо, выполнение следующих условий:

$$1) \int_a^b \varphi(t)\ sign(x(t) - h_0(t))\, dt = 0 \ \text{ для любого } \varphi \in H_1;$$

$$2) \int_a^b h(t)\ sign(x(t) - h_0(t))\, dt \leq 0 \ \text{ для любого } h \in H,$$

при этом

$$\|x - h_0\| = E(x,H) = E(x,H_1) = E(x,H_{J(h_0)}).$$

Доказательство. Доказательство. Достаточность очевидна, т.к. $h_0 \in H_1$. Необходимость вытекает из следствия 1.1 и леммы 1.2.

Так как

$$h_0 \in H_1, \quad H_1 \subset H_{J(h_0)},$$

то в случае, когда h_0 является э.н.п. для x в конусе H, получим

$$\|x - h_0\| = E(x,H) \geq E(x,H_1) \geq E(x,H_{J(h_0)}) = \|x - h_0\|,$$

при этом равенство $E(x,H_{J(h_0)}) = \|x - h_0\|$ следует из теоремы 1.2. Итак, теорема верна. □

2. Аналог теоремы Маркова

Пусть $t_1,\ t_2,\ \ldots, t_r$ есть различные точки отрезка $[a;b]$, функция

$$\omega(t)=(t-t_1)(t-t_2)\ldots(t-t_r),\ t\in[a;b].$$

Будем говорить, что точки $t_1,\ t_2,\ldots,\ t_r$ — все точки перемены знака функции $\varphi\in L[a;b]$ на отрезке $[a;b]$, если, либо почти всюду на $[a;b]$ выполняется равенство

$$sign\ \varphi(t)=sign\ \omega(t),$$

либо почти всюду на $[a;b]$ имеет место

$$sign\ \varphi(t)=-sign\ \omega(t).$$

Теорема 2.1. *Пусть* $\{\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n\}$ *— линейно независимая система в* $L[a;b]$, m *— целое неотрицательное число. Конус* H *имеет вид*

$$H=\left\{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\,\varphi_k:\ \alpha_k\in R,\alpha_j\geq 0,k>m\right\},$$

функция $g\in L[a;b]$ *такова, что:*

a) $t_1,\ t_2,\ldots,\ t_r$ *— все точки перемены знака функции* g;

b) $\displaystyle\int_a^b h(t)\ sign\ g(t)\ dt\leq 0$ *для любого* $h\in H$.

Если $x\in L[a;b]\setminus H$ *и* $h_0\in H$ *обладают свойствами:*

1) $t_1,\ t_2,\ldots,\ t_r$ *— все точки перемены знака для* $x-h_0$;

2) $\displaystyle\int_a^b h_0(t)\ sign\ g(t)\ dt=0,$

то h_0 *— э.н.п. для функции* x *в конусе* H *и*

$$E(x,H)=\left|\int_a^b x(t)\ sign\ g(t)\ dt\right|.$$

Доказательство. Доказательство. В силу следствия 1.1 и леммы 1.2 получаем, что h_0 есть э.н.п. для x в конусе H. Тогда

$$E(x,H)=\int_a^b x(t)sign(x(t)-h_0(t))\ dt=\left|\int_a^b x(t)sign\ g(t)\ dt\right|$$

и теорема верна. □

Если конус H является подпространством конечной размерности, то получим известный результат А.А. Маркова [2].

Теорема 2.2 (Марков А.А.) *Пусть*

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \varphi_k : \; \alpha_k \in R \right\},$$

функция $g \in L[a;b]$ такова, что

a) $t_1, \; t_2, \ldots, \; t_r$*– все точки перемены знака функции* g;

b) $\int_a^b h(t) \; signg(t) \; dt = 0$ *для любого* $h \in H$.

Если функция $x \in L[a;b] \setminus H$ и элемент $h_0 \in H$ таковы, что $t_1, \; t_2, \ldots, \; t_r$– все точки перемены знака $x - h_0$, то h_0 есть э.н.п. функции x в конечномерном подпространстве H и

$$E(x,H) = \left| \int_a^b x(t) sign \; g(t) \; dt \right|.$$

3. Способы построения наилучших приближений при аппроксимации тригонометрическими и алгебраическими полиномами

Особенностью теоремы Маркова А.А. и ее аналога является то, что функция g, удовлетворяющая соотношениям (a), (b), строится независимо от приближаемой функции x. Она зависит лишь от выбранного подпространства H.

В [2] указаны соответствующие функции g для случаев приближения подпространствами тригонометрических и алгебраических полиномов и указаны способы построения элементов наилучшего приближения.

Рассмотрим отмеченные способы построения элементов наилучшего приближения при аппроксимации тригонометрическими и алгебраическими полиномами.

Лемма 3.1. *При любых α и $a \in R$ для тригонометрического полинома T_n порядка не выше n выполняется равенство*

$$\int\limits_a^{a+\pi} T_n(t) \; sign \; sin[(n+1)(t-\alpha)]dt = 0.$$

Обозначим через $L_{2\pi}$ пространство 2π — периодических функций, суммируемых на каждом конечном промежутке $[a; a+2\pi]$, с нормой

$$\|f\| = \int\limits_a^{a+2\pi} |f(t)|dt = \int\limits_0^{2\pi} |f(t)| \; dt.$$

Если рассмотреть функции из $L_{2\pi}$ лишь на промежутке $[a; a+2\pi]$, то сразу получим, что это пространство линейно изометрично $L[a; a+2\pi]$. Через L_{2n+1} обозначим подпространство тригонометрических полиномов порядка не выше n. Пусть

$$h_1(t) = 1,\ h_2(t) = \sin t,\ h_3(t) = \cos t, ..., h_{2n}(t) = \sin(nt),\ h_{2n+1}(t) = \cos(nt),$$

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^{2n+1} \alpha_k\ h_k :\ \alpha_k \in R, \alpha_j \geq 0, k > m \right\},$$

где m — целое неотрицательное число. Из приведенной леммы 3.1, теоремы Маркова А.А. и теоремы 2.1 немедленно вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть $f \in L_{2\pi}$, T_n — тригонометрический полином порядка не выше n принадлежит конусу $H \subset L_{2n+1}$. Если $t_k = \alpha + \frac{k\pi}{(n+1)}$, $k = 0,\ 1, \dots,\ 2n+1$, суть все точки перемены знака разности $f - T_n$ на некотором промежутке $(a; a+2\pi)$, то T_n — э.н.п. функции f в подпространстве L_{2n+1} и в конусе H, при этом*

$$E(f; L_{2n+1}) = E(f; H) = \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ sign\ sin[(n+1)(t-\alpha)]dt \right|.$$

Доказательство. Используя линейную изометрию указанных пространств и полагая $g(t) = \sin[(n+1)(t-\alpha)]$, получим, что точки

$$t_0,\ t_1,\ t_2,\ \dots,\ t_{2n+1}$$

— все точки перемены знака функций g и $f - T_n$ на любом открытом промежутке длиной 2π, который их содержит. Из теоремы Маркова А.А. и ее аналога получим требуемое. □

Лемма 3.2. *Для любого алгебраического полинома P_n степени не выше n выполняется равенство*

$$J = \int_{-1}^{1} P_n(t)\ sign\ sin[(n+2)arccos\ t]dt = 0.$$

Если рассмотреть пространство $L[-1; 1]$, его подпространство L_n, состоящее из всех полиномов степени не выше n, и конус

$$H = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\ t^k :\ t \in [-1; 1],\ \alpha_k \in R, \alpha_j \geq 0, k > m \right\},$$

где m — целое неотрицательное число, то условие (b) теоремы Маркова А.А., а также условия (b) и (2) теоремы 2.1, будут выполнены для функции

$$g(t) = sin[(n+2)arccos\ t].$$

Так как все точки перемены знака этой функции на $(-1;1)$ исчерпываются точками

$$t_k = cos\frac{k\pi}{n+2},\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n+1,$$

то справедлива следующая

Теорема 3.2. *Пусть $f \in L[-1;1]$, P_n — полином степени не выше n принадлежит конусу $H \subset L_n$. Если точки*

$$t_k = cos\frac{k\pi}{n+2},\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n+1,$$

– это все точки перемены знака разности $f - P_n$ на $(-1;1)$, то P_n есть э.н.п. функции f в подпространстве L_n и в конусе H, причем

$$E(f;L_n) = E(f;H) = \left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\ sign\ sin[(n+2)arccos\ t]dt\right|.$$

В случае аппроксимации подпространством L_n теорема 3.2 допускает следующее применение. Пусть $f \in C[-1;1]$ и требуется построить ее полином наилучшего приближения (в метрике $L[-1;1]$) степени не выше n. По узлам t_k, указанным в теореме 3.2, построим интерполяционный полином P_n для функции f. Если окажется, что они являются точками перемены знака $f - P_n$ и других точек перемены знака нет, то P_n — э.н.п. функции f в L_n.

В периодическом случае при аппроксимации подпространством тригонометрических полиномов порядка не выше n подобное применение теоремы 3.1 несколько сложнее, поскольку число точек t_k равно $(2n+2)$ и на единицу больше, чем требуется для разрешимости интерполяционной задачи. Однако, здесь в нашем распоряжении имеется еще один дополнительный параметр — число α.

Заключение

Полученные результаты носят законченный характер и могут быть использованы в различных задачах прикладных направлений.

Список литературы

[1] Дрожжин И.А. Наилучшие приближения суммируемых функций элементами замкнутого выпуклого множества с ограничениями // Применение функционального анализа в теории приближений. 2014. № 35. С. 55–62.

[2] Даугавет И.К. Введение в теорию приближения функций. Л.: ЛГУ, 1977.

[3] Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближений. М.: Наука, 1976.

[4] Peisker P. An alternant criterion for Haar cones // Journal of Approximation Theory. 1983. Vol. 37, № 3. Pp. 262–268. https://doi.org/10.1016/0021-9045(83)90052-7

Образец цитирования

Дрожжин И.А. Аналог теоремы Маркова // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 4. С. 73–83. https://doi.org/10.26456/vtpmk190

Сведения об авторах

1. **Дрожжин Игорь Александрович**
доцент кафедры математического анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

AN ANALOG OF MARKOV'S THEOREM

Drozhzhin Igor Alexandrovich
Associate professor at Mathematical Analysis department,
Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TverSU.

Received 16.06.2017, revised 17.07.2017.

In the space of functions summable on a segment, the sign of the best Approximation for approximation by elements of a finite-dimensional cone, which is Analogue of the well-known theorem of Markov A.A.

Keywords: banach space, closed convex set, summable function, best approximation, cone of finite dimension, extended cone, interpolation polynomial.

Citation

Drozhzhin I.A. An analog of Markov's theorem. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2017, no. 4, pp. 73–83. (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk190

References

[1] Drozhzhin I.A. Best approximations of summable functions by elements of a closed convex set with constraints. *Primenenie Funktsional'nogo Analiza v Teorii Priblizhenii* [Application of Functional Analysis in Approximation Theory], 2014, no. 35, pp. 55–62. (in Russian)

[2] Daugavet I.K. *Vvedenie v Teoriju Priblizhenija Funkcij* [Introduction to the Theory of Approximation of Functions]. LGU Publ., Leningrad, 1977. (in Russian)

[3] Kornejchuk N.P. *Ekstremalnye Zadachi Teorii Priblizhenij* [Extremal Problems in Approximation Theory]. Nauka Publ., Moscow, 1976. (in Russian)

[4] Peisker P. An alternant criterion for Haar cones // Journal of Approximation Theory. 1983. Vol. 37, № 3. Pp. 262–268. https://doi.org/10.1016/0021-9045(83)90052-7