УДК 517.54

РЕГУЛЯРНОСТЬ УБЫВАНИЯ ПОРЯДКА ВЫПУКЛОСТИ В КЛАССАХ $C(\alpha)$[1]

Граф С.Ю., Самойлова Я.И.
Тверской государственный университет, г. Тверь
Петрозаводский государственный университет, г. Петрозаводск

Поступила в редакцию 27.07.2017, после переработки 20.10.2017.

В работе доказываются теоремы регулярности убывания порядка выпуклости и гиперболического порядка выпуклости в классах выпуклых конформных отображений порядка α в единичном круге. Точность результатов иллюстрируется примерами.

Ключевые слова: конформные отображения, выпуклые отображения, порядок выпуклости, теоремы регулярности.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 4. С. 85–99.
https://doi.org/10.26456/vtpmk191

1. Введение

В геометрической теории функций комплексного переменного традиционно большое внимание уделяется выпуклым однолистным аналитическим функциям и многочисленным обобщениям понятия выпуклости (см., например, [1–3]). Критерием локальной однолистности аналитической в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функции f является условие $f' \neq 0$ (см., например, [4]). Будем называть функцию f выпуклой в круге $\mathbb{D}$, если область $D = f(\mathbb{D})$ является выпуклой. Хорошо известно [4], что локально однолистная аналитическая функция f в $\mathbb{D}$ является выпуклой и однолистной тогда и только тогда, когда

$$\mathtt{Re}\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)} + 1\right\} \geq 0 \ \text{ для всех } \ z \in \mathbb{D}.$$

Порядком выпуклости (см. [1]) аналитической в круге $D(0,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\},\ 0 < r < 1$, функции f называется число

$$\beta(f,r) = \min_{\theta\in[0,2\pi)} \frac{d}{d\theta}\mathtt{arg}\,\frac{df(re^{i\theta})}{d\theta} = \min_{|z|=r} \mathtt{Re}\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)} + 1\right\}.$$

В работе [5] определено понятие *гиперболического порядка выпуклости* локально однолистной в $\mathbb{D}$ функции. Символом $d_h(z_1, z_2)$ обозначим расстояние между точками z_1 и z_2 в гиперболической метрике в круге $\mathbb{D}$. Зафиксируем точку

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект №17-11-01229).

$z_0 \in \mathbb{D}$ и положительное число ρ. Пусть $\gamma_h(z_0,\rho) = \{z \in \mathbb{D} : d_h(z,z_0) = \rho\}$ — окружность в $\mathbb{D}$ с гиперболическим центром z_0 и гиперболическим радиусом ρ. Гиперболическим порядком выпуклости аналитической функции f в круге $D_h(z_0,\rho) = \{z \in \mathbb{D} : d_h(z,z_0) \le \rho\}$ называется число

$$\beta_h(f,z_0,\rho) = \min_{z\in\gamma_h(z_0,\rho)} \frac{d}{d\theta}\mathtt{arg}\, T_f(z),$$

где θ — аргумент гиперболического радиуса, соединяющего точку $z \in \gamma_h(z_0,\rho)$ с центром z_0 (т.е. угол, который гиперболический радиус $\widehat{z_0 z}$ образует с положительным направлением действительной оси), а $T_f(z) = \frac{d}{d\theta}f(z)$ — касательный вектор к образу окружности $\gamma_h(z_0,\rho)$ при отображении f в точке $f(z)$.

Символом $\mathcal{S}$ будем обозначать классическое семейство однолистных аналитических в $\mathbb{D}$ функций f, таких, что $f(0) = f'(0)-1 = 0$. Подкласс $\mathcal{C}$ класса $\mathcal{S}$ состоит из выпуклых функций $f \in \mathcal{S}$.

Под теоремами регулярности в геометрической теории функций принято понимать утверждения, аналогичные известным [6, 7] теоремам о регулярности роста производной в классе однолистных конформных отображений $\mathcal{S}$, усиливающие известные (см., например, [4, 8]) оценки $|f'(z)|$ и $|f(z)|$, полученные Л. Бибербахом. Наченая с 60-х гг XX в. теоремам регулярности в различных классах аналитических и гармонических функций посвящено достаточно большое число работ (см., например, [9–11].

В работах [5,12] исследовался вопрос о регулярности роста и убывания порядка выпуклости и гиперболического порядка выпуклости в классах $\mathcal{S}$, $\mathcal{C}$. В частности, в классе выпуклых функций $\mathcal{C}$ доказана следующая теорема:

Теорема A [12].

Пусть $f \in \mathcal{C}$. Тогда

1) величины $\mathtt{Re}\left\{re^{it}\frac{f''(re^{it})}{f'(re^{it})}+1\right\}\frac{1+r}{1-r}$ и $\beta(f,r)\frac{1+r}{1-r}$ не убывают по r на интервале $(0,1)$ для любого $t \in [0,2\pi)$;

2) существуют постоянные $\delta \in [1,+\infty]$ и t_0 такие, что

$$\lim_{r\to1-}\beta(f,r)\frac{1+r}{1-r} = \lim_{r\to1-}\mathtt{Re}\left(re^{it_0}\frac{f''(re^{it_0})}{f'(re^{it_0})}+1\right)\frac{1+r}{1-r} = \delta;$$

1) величины $\mathtt{Re}\left\{re^{it}\frac{f''(re^{it})}{f'(re^{it})}+1\right\}\frac{1-r}{1+r}$ и $\max\limits_{|z|=r}\mathtt{Re}\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}+1\right\}\frac{1-r}{1+r}$ не возрастают по r на интервале $(0,1)$ для любого $t \in [0,2\pi)$;*

2) существуют постоянные $\delta^* \in [0,1)$ и t_0^* такие, что*

$$\lim_{r\to1-}\max_{|z|=r}\mathrm{Re}\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}+1\right\}\frac{1-r}{1+r} =$$

$$= \lim_{r\to1-}\mathrm{Re}\left(re^{it_0^*}\frac{f''(re^{it_0^*})}{f'(re^{it_0^*})}+1\right)\frac{1-r}{1+r} = \delta^*;$$

3,3) $\delta = \delta^* = 1$ тогда и только тогда, когда $f(z) = \frac{z}{1+e^{it}z}$ и $t = -t_0$, $t = \pi - t_0^*$ для случаев 2) и 2*) соответственно.*

Числа δ и δ^* называются числами Хеймана, а направления, определяемые углами t_0 и t_0^* — направлениями интенсивного убывания и роста выпуклости функции f соответственно.

Целью настоящей работы является получение теорем регулярности порядка выпуклости и гиперболического порядка выпуклости в более широких классах выпуклых конформных отображений порядка α, включающих в себя при отрицательных значениях α функции, не являющиеся не только выпуклыми, но и звездообразными.

1. Теорема регулярности для порядка выпуклости в классах $C(\alpha)$

Семейства $\mathcal{C}(\alpha)$ были определены Робертсоном [1] и состоят из локально однолистных аналитических в $\mathbb{D}$ функций f таких, что $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ и

$$\mathtt{Re}\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)} + 1\right\} > \alpha, \tag{1}$$

где $\alpha \in [-1/2, 1)$. Нетрудно доказать, что $\mathcal{C}(\alpha) \subset \mathcal{C}$, если $\alpha > 0$, $\mathcal{C}(1/2) = \mathcal{C}$ и $\mathcal{C}(\alpha) \subset \mathcal{K}$, если $\alpha \in [-1/2, 0)$, где символом $\mathcal{K}$ обозначается подкласс функций из $\mathcal{S}$, отображающих $\mathbb{D}$ на почти выпуклые области (область D называется почти выпуклой, если $\mathbb{C} \setminus D$ допускает представление в виде объединения лучей, пересекающихся не более, чем в своих вершинах).

Оценка порядка выпуклости в семействах $\mathcal{C}(\alpha)$ следует из определения этих классов и свойств выпуклых отображений. Пусть $f \in \mathcal{C}(\alpha)$. Обозначим $g(z) = z\frac{f''(z)}{f'(z)} + 1$, тогда $g(0) = 1$ и $\mathrm{Re}\, g(z) > \alpha$ в силу (1). Определим функцию $p(z) = (g(z)-\alpha)/(1-\alpha)$, которая принадлежит классу Каратеодори $\mathcal{P}$ (см., например, [4,8]), так как $\mathtt{Re}\, p(z) = \mathrm{Re}\,(g(z)-\alpha)/(1-\alpha) > 0$ и $p(0) = 1$. Рассмотрим локально однолистную аналитическую функцию f_0 в $\mathbb{D}$, такую, что $f_0(0) = f_0'(0) - 1 = 0$ и $zf_0''(z)/f_0'(z) - 1 = p(z)$. Нетрудно убедиться, что f_0 определяется равенством

$$f_0(z) = z\, e^{\int_0^z (p(\zeta)-1)/\zeta\, d\zeta}. \tag{2}$$

и является выпуклой и однолистной в $\mathbb{D}$, т.е. $f_0 \in \mathcal{C}$.

Для функции $f_0 \in \mathcal{C}$ и для $|z| = r < 1$ справедливы неравенства

$$\frac{1-r}{1+r} \le \mathtt{Re}\left(z\frac{f_0''(z)}{f_0'(z)} + 1\right) \le \frac{1+r}{1-r}, \tag{3}$$

являющиеся следствием принадлежности $p(z)$ классу $\mathcal{P}$ [4]. Следовательно

$$\frac{1-r}{1+r} \le \mathtt{Re}\,\frac{z}{1-\alpha}\frac{f''(z)}{f'(z)} + 1 \le \frac{1+r}{1-r}. \tag{4}$$

Данная двусторонняя оценка может быть усилена теоремой регулярности:

Следствие 1. *Пусть $f \in \mathcal{C}(\alpha)$, где $\alpha \in [-1/2, 1)$. Тогда*

1) величины $\mathit{Re}\left\{\frac{re^{it}}{1-\alpha}\frac{f''(re^{it})}{f'(re^{it})} + 1\right\}\frac{1+r}{1-r}$ и $\min\limits_{|z|=r}\mathit{Re}\left\{\frac{z}{1-\alpha}\frac{f''(z)}{f'(z)} + 1\right\}\frac{1+r}{1-r}$ не убывают по r на интервале $(0,1)$ для любого $t \in [0, 2\pi)$;

2) существуют постоянные $\delta \in [1, +\infty]$ и t_0 такие, что

$$\lim_{r\to 1-}\mathit{Re}\left(\frac{re^{it_0}}{1-\alpha}\frac{f''(re^{it_0})}{f'(re^{it_0})} + 1\right)\frac{1+r}{1-r} = \lim_{r\to 1-}\min_{|z|=r}\mathit{Re}\left\{\frac{z}{1-\alpha}\frac{f''(z)}{f'(z)} + 1\right\}\frac{1+r}{1-r} = \delta;$$

1) величины* $Re\left\{\frac{re^{it}}{1-\alpha}\frac{f''(re^{it})}{f'(re^{it})}+1\right\}\frac{1-r}{1+r}$ *и* $\max\limits_{|z|=r} Re\left\{\frac{z}{1-\alpha}\frac{f''(z)}{f'(z)}+1\right\}\frac{1-r}{1+r}$ *не возрастают по* r *на интервале* $(0,1)$ *для любого* $t\in[0,2\pi)$*;*

2) существуют постоянные* $\delta^*\in[0,1)$ *и* t_0^* *такие, что*

$$\lim_{r\to 1-} Re\left(\frac{re^{it_0^*}}{1-\alpha}\frac{f''(re^{it_0^*})}{f'(re^{it_0^*})}+1\right)\frac{1-r}{1+r}=\lim_{r\to 1-}\max_{|z|=r} Re\left\{\frac{z}{1-\alpha}\frac{f''(z)}{f'(z)}+1\right\}\frac{1-r}{1+r}=\delta^*;$$

3,3)* $\delta=\delta^*=1$ *тогда и только тогда, когда* $f(z)=e^{-it}f_\alpha(e^{it}z)$*, где*

$$\begin{aligned} &f_\alpha(z)=\frac{1}{2\alpha-1}\left((1-z)^{2\alpha-1}-1\right) \quad \textit{при}\ \ \alpha\in[-1/2,1),\ \alpha\neq 1/2, \quad \textit{и}\\ &f_{1/2}(z)=ln\left(\frac{1}{1-z}\right), \end{aligned} \tag{5}$$

причем $t=\pi-t_0,\ t=-t_0^*$ *для случаев 2) и 2*) соответственно.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $f\in\mathcal{C}(\alpha)$, где $\alpha\in[-1/2,1)$.

Как отмечалось ранее, существует функция $f_0(z)\in\mathcal{C}$ вида (2) такая, что $z\frac{f_0''(z)}{f_0'(z)}+1=\frac{z}{1-\alpha}\frac{f''(z)}{f'(z)}+1$. Для функции f_0 справедлива теорема A. Переписав утверждение теоремы A в терминах исходной функции f, получим утверждения 1), 1*) и 2), 2*) доказываемого следствия 1.

Условия равенства в (4), а также условия для чисел Хеймана (δ, $\delta^*=1$) выводятся из (3) и утверждений 3), 3*) Теоремы A. Действительно, указанные равенства достигаются в том и только том случае, когда функция f_0 совпадает с вращениями мебиусова преобразования $L(z)=\frac{z}{1-z}$. При этом

$$p(z)=z\frac{L''(z)}{L'(z)}-1=\frac{1+z}{1-z}\ \text{ и }\ g(z)=(1-\alpha)p(z)+\alpha=\alpha+(1-\alpha)\frac{1+z}{1-z}.$$

Отсюда с учетом определения $g(z)=z\frac{f''(z)}{f'(z)}+1$, получаем:

$$z\frac{f''(z)}{f'(z)}=(1-\alpha)\frac{2z}{1-z}. \tag{6}$$

Интегрируя данное выражение при начальных условиях $f(0)=f'(0)-1=0$, приходим к виду (5) экстремальных функций f_α.

Заметим, что при $\alpha\in[0,1)$ отображения f_α являются выпуклыми (см. Рис. 1).

Однако при убывании $\alpha\in[-1/2,0)$ функции f_α теряют выпуклость и образы $f_\alpha(\mathbb{D})$ не являются даже звездообразными (см. Рис. 2,3).

Условия равенств направлений интенсивного убывания и роста заданным числам t_0 и t_0^* получаются из соответствующих утверждений теоремы A путем вращения функций f_α вида (5). Следствие доказано. □

Перейдем к оценке и анализу характера изменения порядка выпуклости $\beta(f,r)$ в семействах $\mathcal{C}(\alpha)$. Для $\alpha=0$ этот вопрос полностью исчерпывается теоремой A. Однако при прочих допустимых α можно получить более точный (при $\alpha>0$) или более общий (при $\alpha<0$) результат.

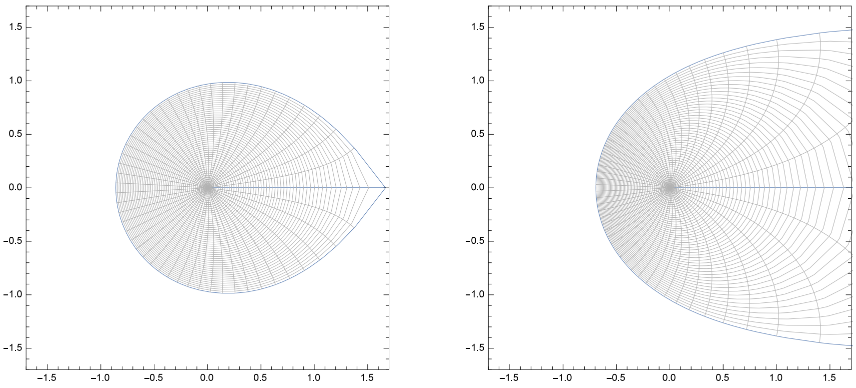

Рис. 1: Образы единичного круга при отображении f_α для $\alpha = 0.8$ (слева), и $\alpha = 0.5$ (справа)

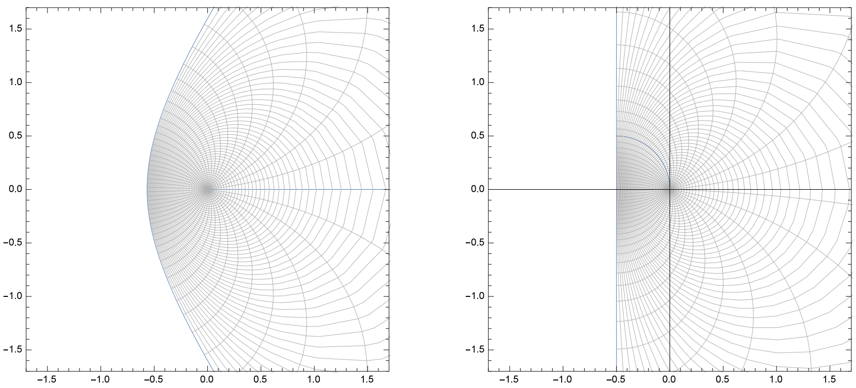

Рис. 2: Образы единичного круга при отображении f_α для $\alpha = 0.2$ (слева), и $\alpha = 0$ (справа)

Теорема 1. *Пусть $f \in \mathcal{C}(\alpha)$, где $\alpha \in [-1/2, 1)$ и $R_\alpha = \min\{1, 1/|1-2\alpha|\}$. Тогда*

1) для любого $z = re^{it} \in \mathbb{D}$, справедливы точные оценки

$$\frac{1 - r(1-2\alpha)}{1+r} \le \mathtt{Re}\left(z\frac{f''(z)}{f'(z)} + 1\right) \le \frac{1 + r(1-2\alpha)}{1-r};$$

2) величины $\mathtt{Re}\left\{re^{it}\frac{f''(re^{it})}{f'(re^{it})} + 1\right\}\frac{1+r}{1-r(1-2\alpha)}$ и $\beta(f,r)\frac{1+r}{1-r(1-2\alpha)}$ не убывают по $r \in (0, R_\alpha)$ для любого $t \in [0, 2\pi)$;

3) существуют постоянные $\delta \in [1, +\infty]$ и $t_0 \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\lim_{r \to R_\alpha -} \beta(f,r)\frac{1+r}{1-r(1-2\alpha)} = \lim_{r \to R_\alpha -} \mathtt{Re}\left(re^{it_0}\frac{f''(re^{it_0})}{f'(re^{it_0})} + 1\right)\frac{1+r}{1-r(1-2\alpha)} = \delta;$$

4) $\delta = 1$ тогда и только тогда, когда $f(z) = e^{-it} f_\alpha(e^{it} z)$, где $f_\alpha(z)$ определяется равенствами (5) и $t = \pi - t_0$.

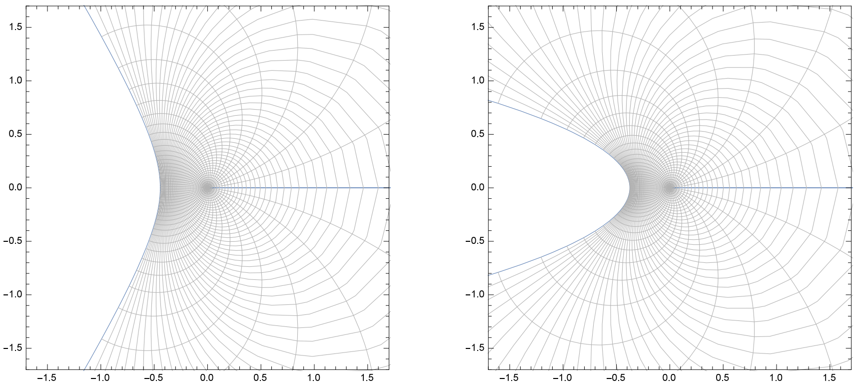

Рис. 3: Образ единичного круга при отображении f_α для $\alpha = -0.2$ (слева), и $\alpha = -0.5$ (справа)

Доказательство. Рассмотрим функцию $f \in \mathcal{C}(\alpha)$, где $\alpha \in [-1/2, 1)$.

1) Как отмечалось выше, функция $p(z) = \frac{z}{1-\alpha}\frac{f''(z)}{f'(z)} + 1$ принадлежит классу Каратеодори $\mathcal{P}$. Следовательно, для любого $z = re^{it} \in \mathbb{D}$, справедливы точные оценки (см., например, [4])

$$\frac{1-r}{1+r} \le \mathtt{Re}\, p(z) \le \frac{1+r}{1-r},$$

равенства в которых достигаются тогда и только тогда, когда p совпадает с функцией $p_0(z) = (1+z)/(1-z) = zL''(z)/L'(z) + 1$, где $L(z) = z/(1-z)$ (вместо L можно взять также вращения этой функции). Таким образом для функции f справедливы точные оценки

$$\frac{1-r(1-2\alpha)}{1+r} \le \mathtt{Re}\left(z\frac{f''(z)}{f'(z)} + 1\right) \le \frac{1+r(1-2\alpha)}{1-r}, \tag{7}$$

причем f удовлетворяет соотношению (6) и, как следствие, равенства в (7) достигаются только на функциях вида (5) и их вращениях. Неравенство (7) очевидно означает, что для $f \in \mathcal{C}(\alpha)$

$$\beta(f, r) \ge \frac{1-(1-2\alpha)r}{1+r},$$

т.е. f сохраняет выпуклость в круге $|z| < R_\alpha$. Оценка круга выпуклости точна, равенство также достигается на функциях вида (5).

2). Докажем, что для любого $\alpha \in [-1/2, 1)$ выражение

$$\Phi(z) = \mathtt{Re}\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)} + 1\right\}\frac{1+r}{1-r(1-2\alpha)}$$

не убывает по r для любого $|z| = r$ на интервале $(0, R_\alpha)$.

Заметим, что для $\tilde{f}(\zeta) = f(e^{it}\zeta)e^{-it}$ справедливо равенство $\mathtt{Re}\, z\frac{f''(z)}{f'(z)} = \mathtt{Re}\, r\frac{\tilde{f}''(r)}{\tilde{f}'(r)}$ где $t = \mathtt{arg}\, z$. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что $z = r \in (0, 1)$.

Необходимо доказать, что

$$\frac{\partial \Phi(r)}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\operatorname{Re}\left\{r\frac{f''(r)}{f'(r)}+1\right\}\frac{1+r}{1-r(1-2\alpha)}\right)\geq 0,\ r\in(0,R_\alpha).$$

Из неравенства (4) следует, что

$$\operatorname{Re}\left\{r\frac{f''(r)}{f'(r)}+1-\alpha\right\}\frac{1}{1-\alpha}\frac{1+r}{1-r}\geq 1.$$

Обозначим левую часть последнего неравенства через $\tilde{\Phi}(r)$. Тогда $\tilde{\Phi}(r)=\operatorname{Re} p(r)\frac{1+r}{1-r}$ и $\frac{\partial}{\partial r}\tilde{\Phi}(r)=\operatorname{Re}\left(p'(r)\frac{1+r}{1-r}+p(r)\frac{2}{(1-r)^2}\right)$, где функция $p\in\mathcal{P}$ определена в п. 1) доказательства. С учетом введенных обозначений

$$\Phi(r)=\operatorname{Re}\tilde{\Phi}(r)\frac{(1-r)(1-\alpha)}{1-r(1-2\alpha)}+\alpha\frac{1+r}{1-r(1-2\alpha)}.$$

Заметим, что выражение $1-r(1-2\alpha)$ остается положительным для $\alpha\in[-1/2,1)$ и $r\in(0,R_\alpha)$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi(r)}{\partial r}&=\frac{1-\alpha}{(1-r(1-2\alpha))^2}\operatorname{Re}\left\{\frac{\partial\tilde{\Phi}(r)}{\partial r}(1-r)(1-r(1-2\alpha))-2\alpha\tilde{\Phi}(r)+2\alpha\right\}=\\&=\frac{1-\alpha}{(1-r(1-2\alpha))^2}\operatorname{Re}\left\{\frac{\partial p(r)}{\partial r}(1+r)(1-r(1-2\alpha))+2p(r)(1-\alpha)+2\alpha\right\}.\end{aligned}\tag{8}$$

В классе Каратеодори $\mathcal{P}$ верны точные оценки $\operatorname{Re} p(r)\geq\frac{1-r}{1+r}$ и $\operatorname{Re}\frac{\partial p(r)}{\partial r}\geq\frac{-2}{(1+r)^2}$ (см., например, [4, 8]). Применяя их к последней строке в (8), получаем, что $\frac{\partial}{\partial r}\Phi(r)\geq 0$ для любого $\alpha\in[-1/2,1)$ и $r<R_\alpha$.

Следовательно, выражение $\operatorname{Re}\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}+1\right\}\frac{1+r}{1-r(1-2\alpha)}$ не убывает по r для всех точек $z=r$ и в виду сделанного выше замечания для всех $z=re^{it}$.

Теперь докажем, что $\beta(f,r)\frac{1+r}{1-r(1-2\alpha)}$ не убывает по r для всех точек $r\in(0,R_\alpha)$. Рассмотрим такое значение $t(r)$, что

$$\operatorname{Re}\left\{re^{it(r)}\frac{f''(re^{it(r)})}{f'(re^{it(r)})}+1\right\}=\min_{|z|=r}\operatorname{Re}\left\{re^{it}\frac{f''(re^{it})}{f'(re^{it})}+1\right\}=\beta(f,r).$$

В силу доказанного выше для любых $r, r_1, 0<r<r_1<R_\alpha$, имеем

$$\begin{aligned}\beta(f,r)\frac{1+r}{1-r(1-2\alpha)}&=\operatorname{Re}\left\{re^{it(r)}\frac{f''(re^{it(r)})}{f'(re^{it(r)})}+1\right\}\frac{1+r}{1-r(1-2\alpha)}\leq\\&\leq\operatorname{Re}\left\{re^{it(r_1)}\frac{f''(re^{it(r_1)})}{f'(re^{it(r_1)})}+1\right\}\frac{1+r}{1-r(1-2\alpha)}\leq\\&\leq\operatorname{Re}\left\{r_1e^{it(r_1)}\frac{f''(r_1e^{it(r_1)})}{f'(r_1e^{it(r_1)})}+1\right\}\frac{1+r_1}{1-r_1(1-2\alpha)}=\beta(f,r_1)\frac{1+r_1}{1-r_1(1-2\alpha)}.\end{aligned}$$

Таким образом, выражение $\beta(f,r)\frac{1+r}{1-r(1-2\alpha)}$ не убывает по r для всякой функции $f\in\mathcal{C}(\alpha)$, где $\alpha\in[-1/2,1)$.

3) Из пункта 1) следует, что

$$\beta(f,r)\frac{1+r}{1-r(1-2\alpha)} \geq 1$$

и, как показано в 2), выражение слева не убывает. Следовательно, существует предел

$$\lim_{r\to R_\alpha -}\left[\mathtt{Re}\left\{re^{it}\frac{f''(re^{it})}{f'(re^{it})}+1\right\}\frac{1+r}{1-r(1-2\alpha)}\right] = \delta_0 \in [1,\infty].$$

Докажем, что существует $t_0 \in \mathbb{R}$, для которого выполняется второй пункт теоремы.

Как и ранее определим $t(r)$ таким образом, что

$$\beta(f,r) = \min_{|z|=r}\mathtt{Re}\left\{re^{it}\frac{f''(re^{it})}{f'(re^{it})}+1\right\} = \mathtt{Re}\left\{re^{it(r)}\frac{f''(re^{it(r)})}{f'(re^{it(r)})}+1\right\},$$

можно считать, что значения $t(r)$ лежат в $[0,2\pi)$, т.е. множество значений $t(r)$ ограничено.

Выберем такую возрастающую последовательность $r_n \in (0,R_\alpha)$, $r_n \to R_\alpha-$, что $t(r_n) \to t_0$, где t_0 — некоторое число из отрезка $[0,2\pi]$. Поскольку величина $\mathtt{Re}\left\{re^{it}\frac{f''(re^{it})}{f'(re^{it})}+1\right\}\frac{1+r}{1-r(1-2\alpha)}$ не убывает по $r \in (0,R_\alpha)$ при каждом $t \in \mathbb{R}$, получим:

$$\min_{|z|=r}\mathtt{Re}\left\{re^{it}\frac{f''(re^{it})}{f'(re^{it})}+1\right\}\frac{1+r}{1-r(1-2\alpha)} \leq \mathtt{Re}\left\{re^{it_n}\frac{f''(re^{it_n})}{f'(re^{it_n})}+1\right\}\frac{1+r}{1-r(1-2\alpha)} \leq$$

$$\leq \mathtt{Re}\left\{r_ne^{it_n}\frac{f''(r_ne^{it_n})}{f'(r_ne^{it_n})}+1\right\}\frac{1+r_n}{1-r_n(1-2\alpha)} =$$

$$= \min_{|z|=r}\mathtt{Re}\left\{r_ne^{it_n}\frac{f''(r_ne^{it_n})}{f'(r_ne^{it_n})}+1\right\}\frac{1+r_n}{1-r_n(1-2\alpha)}.$$

Устремляя здесь n к бесконечности, в пределе приходим к оценкам

$$\min_{|z|=r}\mathtt{Re}\left\{re^{it}\frac{f''(re^{it})}{f'(re^{it})}+1\right\}\frac{1+r}{1-r(1-2\alpha)} \leq \mathtt{Re}\left\{re^{it_0}\frac{f''(re^{it_0})}{f'(re^{it_0})}+1\right\}\frac{1+r}{1-r(1-2\alpha)} \leq \delta.$$

Переходя к пределу при $r \to R_\alpha-$, получим

$$\lim_{r\to R_\alpha -}\left[\mathtt{Re}\left\{re^{it_0}\frac{f''(re^{it_0})}{f'(re^{it_0})}+1\right\}\frac{1+r}{1-r(1-2\alpha)}\right] = \delta.$$

4). Докажем условие равенства чисел Хеймана $\delta = 1$. Во-первых, непосредственными вычислениями проверяется, что для функций вида (5) и $z = -r$ имеет место равенство

$$-r\frac{f''_\alpha(-r)}{f'_\alpha(-r)}+1 = \frac{1-r(1-2\alpha)}{1+r}.$$

Следовательно, предел в утверждении 3) доказываемой теоремы существует и равен 1, причем направление интенсивного убывания выпуклости $t_0 = \pi$. Данное утверждение проиллюстрировано на Рис. 1 - 3. При вращениях $e^{-it}f_\alpha(e^{it}z)$ функций вида (5) направления интенсивного убывания $\beta(f,r)$ будут равны $t_0=\pi-t$.

Обратно, предположим, что для некоторой функции $f\in\mathcal{C}(\alpha)$ число Хеймана $\delta=1$ и направление интенсивного убывания выпуклости равно t_0. Следовательно, для всех $r\in(0,R_\alpha)$ имеет место равенство

$$re^{it_0}\frac{f''(re^{it_0})}{f'(re^{it_0})}+1=\frac{1-r(1-2\alpha)}{1+r}.$$

Тогда для функции $\tilde f(z)=-e^{-it_0}f(-e^{it_0}z)$ имеем:

$$-r\frac{\tilde f''(-r)}{\tilde f'(-r)}=(1-\alpha)\frac{-2r}{1+r}$$

при всех $r\in(0,R_\alpha)$. В силу внутренней теоремы единственности

$$z\frac{\tilde f''(z)}{\tilde f'(z)}=(1-\alpha)\frac{2z}{1-z}$$

во всем круге $\mathbb{D}$. Значит $\tilde f$ удовлетворяет равенству (6) и как следствие $\tilde f(z)=f_\alpha(z)$. Отсюда получаем требуемое равенство

$$f(z)=-e^{it_0}f_\alpha(-ze^{-it_0})=e^{-i(\pi-t_0)}f_\alpha(e^{i(\pi-t_0)}z).$$

Теорема доказана. □

2. Теорема регулярности для гиперболического порядка выпуклости в классах $C(\alpha)$

Определенное в работе [5] понятие выпуклости гиперболического порядка позволяет оценить степень выпуклости функции и характер ее изменения не только в кругах с центром в начале координат, но и в гиперболических кругах с произвольным центром в круге $\mathbb{D}$.

Рассмотрим аналитическую в круге $\mathbb{D}$ функцию из класса $f\in\mathcal{C}(\alpha)$, где $\alpha\in[-1/2,1)$. Пусть $z_0\in\mathbb{D}$, $\rho>0$ и $\beta_h(f,z_0,\rho)$ — гиперболический порядок выпуклости функции f в круге $D_h(z_0,\rho)=\{z\in\mathbb{D}:\ d_h(z,z_0)\le\rho\}$.

Из простейших свойств гиперболической геометрии в круге (в частности, из того, что евклидов радиус гиперболической окружности $\gamma_h(0,\rho)$ равен $(e^\rho-1)/(e^\rho+1)$) следует, что

$$\beta_h(f,0,\rho)=\beta\left(f,\frac{e^\rho-1}{e^\rho+1}\right).$$

Более того, справедлива

Теорема B [5] *Для всякой локально однолистной аналитической в $\mathbb{D}$ функции f и произвольных $z_0\in\mathbb{D}$, $\rho>0$, справедливы соотношения*

$$\beta_h(f,z_0,\rho)=\beta_h(\tilde f,0,\rho)=\beta\left(\tilde f,\frac{e^\rho-1}{e^\rho+1}\right)=$$
$$=\min_{z\in\gamma_h(z_0,\rho)}\mathtt{Re}\left\{\frac{z-z_0}{1-|z_0|^2}\left((1-\overline{z_0}z)\frac{f''(z)}{f'(z)}-2\overline{z_0}\right)+1\right\},$$

где $\tilde{f}(\zeta) = f\left(\frac{\zeta+z_0}{1+\overline{z_0}\zeta}\right)$.

Следует отметить, что в случае, когда $f \in \mathcal{C}(\alpha)$ и $z_0 \in \mathbb{D}$ функция $\tilde{f}(z) = f\left(\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}\right)$, вообще говоря, уже не принадлежит классу $\mathcal{C}(\alpha)$. Тем не менее верна

Теорема 2. *Пусть* $f \in \mathcal{C}(\alpha)$, *где* $\alpha \in [-1/2, 1)$. *Тогда для* $z_0 \in \mathbb{D}$ *функция* $\tilde{f}(\zeta) = \frac{f\left(\frac{\zeta+z_0}{1+\overline{z_0}\zeta}\right)-f(z_0)}{f'(z_0)(1-|z_0|^2)}$ *принадлежит классу* $\mathcal{C}(\tilde{\alpha})$, *где*

$$\tilde{\alpha} = \begin{cases} \alpha\dfrac{1-|z_0|}{1+|z_0|}, & \textit{при } \alpha \geq 0, \\ \alpha\dfrac{1+|z_0|}{1-|z_0|}, & \textit{при } \alpha < 0. \end{cases} \tag{9}$$

В частности функция $\tilde{f}$ *является однолистной и принадлежит классу* $\mathcal{K}$ *при любом значении* $z_0 \neq 0$ *т.ч.*

$$|z_0| < \min\left\{1, \left|\frac{1+2\alpha}{1-2\alpha}\right|\right\}.$$

Неравенство точно.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $z_0 = r \in (0,1)$. Рассмотрим $\Phi(z) = \frac{z+r}{1+rz}$. Тогда

$$F(z) = z\frac{\tilde{f}''(z)}{\tilde{f}'(z)} + 1 = \frac{(1-r^2)z}{(z+r)(1+rz)}\Phi(z)\frac{f''(\Phi(z))}{f'(\Phi(z))} + \frac{1-rz}{1+rz}.$$

Функция $\mathtt{Re}\, F(z)$ является гармонической и как следствие не может достигать минимума во внутренних точках круга $\mathbb{D}$, если не является константой. Можно считать, что f определена в замкнутом единичном круге. В противном случае рассмотрим функции $g_\rho(z) = f(\rho z)/\rho$, которые также принадлежат классу $\mathcal{C}(\alpha)$, проведем рассуждения для них и совершим предельный переход при $\rho \to 1-$. Итак, гармоническая функция $\mathtt{Re}\, F(z)$ достигает своего минимума на окружности $|z| = 1$. Для $z = e^{it}$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \mathtt{Re}\, F(e^{it}) =& \mathtt{Re}\left\{\frac{(1-r^2)e^{it}}{(e^{it}+r)(1+re^{it})}\Phi(e^{it})\frac{f''(\Phi(e^{it}))}{f'(\Phi(e^{it}))} + \frac{1-re^{it}}{1+re^{it}}\right\} = \\ =& \frac{1-r^2}{|e^{it}+r|^2}\mathtt{Re}\,\Phi(e^{it})\frac{f''(\Phi(e^{it}))}{f'(\Phi(e^{it}))} + \frac{1-r^2}{|1+re^{it}|^2} = \\ =& \frac{1-r^2}{|e^{it}+r|^2}\left\{\mathtt{Re}\,\Phi(e^{it})\frac{f''(\Phi(e^{it}))}{f'(\Phi(e^{it}))} + 1\right\} \geq \alpha\frac{1-r^2}{|e^{it}+r|^2} \geq \tilde{\alpha}. \end{aligned}$$

Следовательно $\mathtt{Re}\, F(z) \geq \tilde{\alpha}$ во всем круге $\mathbb{D}$. Точность оценки (9) проверяется непосредственными вычислениями для функций f_α вида (5). Теорема доказана. □

Комбинация доказанной теоремы с теоремами 1 и B позволяет получить оценку гиперболического порядка выпуклости в классе $\mathcal{C}(\alpha)$ и утверждения о регулярности его убывания.

Теорема 3. *Пусть* $f \in \mathcal{C}(\alpha)$, *где* $\alpha \in [-1/2, 1)$, $z_0 \in \mathbb{D}$, $|z_0| < \min\left\{1, \left|\frac{1+2\alpha}{1-2\alpha}\right|\right\}$, $\rho > 0$ *и* $R(\rho) = \frac{e^\rho - 1}{e^\rho + 1}$. *Пусть* $\tilde{\alpha}$ *определяется равенством (9) и* $R_{\tilde{\alpha}} = \min\{1, 1/|1-2\tilde{\alpha}|\}$, $P_{\tilde{\alpha}} = \ln\frac{1+R_{\tilde{\alpha}}}{1-R_{\tilde{\alpha}}}$, $\tilde{f}(\zeta) = f\left(\frac{\zeta+z_0}{1+\overline{z_0}\zeta}\right)$. *Тогда*

1) $\beta_h(f, z_0, \rho) \geq \frac{1+\tilde{\alpha}(e^\rho-1)}{e^\rho}$;

2) величины $\beta_h(f, z_0, \rho)\,\frac{e^\rho}{1+\tilde{\alpha}(e^\rho-1)}$ *и* $\mathrm{Re}\left\{e^{it}R(\rho)\frac{\tilde{f}''(e^{it}R(\rho))}{\tilde{f}'(e^{it}R(\rho))} + 1\right\}\frac{e^\rho}{1+\tilde{\alpha}(e^\rho-1)}$ *не убывают по* ρ *на* $(0, P_{\tilde{\alpha}})$ *для любого* $t \in [0, 2\pi)$;

3) существуют постоянные $\delta \in [1, +\infty]$ *и* $t_0 \in \mathbb{R}$, *такие, что*

$$\lim_{\rho\to P_{\tilde{\alpha}}-} \mathrm{Re}\left\{e^{it_0}R(\rho)\frac{\tilde{f}''\left(e^{it_0}R(\rho)\right)}{\tilde{f}'\left(e^{it_0}R(\rho)\right)} + 1\right\}\frac{e^\rho}{1+\tilde{\alpha}(e^\rho-1)} = $$

$$= \lim_{\rho\to P_{\tilde{\alpha}}-} \beta_h(f, z_0, \rho)\,\frac{e^\rho}{1+\tilde{\alpha}(e^\rho-1)} = \delta;$$

4) константа $\delta = 1$ *тогда и только тогда, когда*

$$f(z) = \frac{f_{\tilde{\alpha}}\left(\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right) - f_{\tilde{\alpha}}(-z_0)}{f'_{\tilde{\alpha}}(-z_0)(1-|z_0|^2)},$$

где $f_{\tilde{\alpha}}$ *имеет вид (5).*

Доказательство. 1). Рассмотрим функцию $f \in \mathcal{C}(\alpha)$ и определим

$$h(\zeta) = \frac{f\left(\frac{\zeta+z_0}{1+\overline{z_0}\zeta}\right) - f(z_0)}{f'(z_0)(1-|z_0|^2)}. \tag{10}$$

В силу теоремы 2 функция h принадлежит классу $\mathcal{C}(\tilde{\alpha})$, причем $\tilde{\alpha} \geq -1/2$ и

$$\zeta\frac{h''(\zeta)}{h'(\zeta)} = \zeta\frac{\tilde{f}''(\zeta)}{\tilde{f}'(\zeta)}, \tag{11}$$

где $\tilde{f}$ определена в формулировке теоремы 3. В силу теоремы B

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{z-z_0}{1-|z_0|^2}\left((1-\overline{z_0}z)\frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\overline{z_0}\right) + 1\right\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\zeta\frac{\tilde{f}''(\zeta)}{\tilde{f}'(\zeta)} + 1\right\} = \mathrm{Re}\left\{\zeta\frac{h''(\zeta)}{h'(\zeta)} + 1\right\} \geq \frac{1-|\zeta|(1-2\tilde{\alpha})}{1+|\zeta|}.$$

Последнее неравенство является следствием теоремы 1. Отсюда получаем оценку гиперболического порядка выпуклости в классе $\mathcal{C}(\alpha)$:

$$\beta_h(f, z_0, \rho) = \beta_h(h, 0, \rho) = \beta(h, R(\rho)) \geq \frac{1-R(\rho)(1-2\alpha)}{1+R(\rho)} = \frac{1+\alpha(e^\rho-1)}{e^\rho}, \tag{12}$$

где $R(\rho) = \frac{e^\rho - 1}{e^\rho + 1}$, что и доказывает первый пункт теоремы 3.

Доказательство пунктов 2)–4) следует из того, что к функции h применима теорема 1 и из соотношений (10), (11). Например, монотонность выражения $\beta_h(f, z_0, \rho)\frac{e^\rho}{1+\tilde{\alpha}(e^\rho - 1)}$ вытекает из того, что

$$\frac{d}{d\rho}\left(\beta_h(f, z_0, \rho)\frac{e^\rho}{1+\tilde{\alpha}(e^\rho - 1)}\right) = \frac{d}{d\rho}\left(\beta(h, R(\rho))\frac{e^\rho}{1+\tilde{\alpha}(e^\rho - 1)}\right) =$$
$$= \frac{d}{dR}\left\{\beta(h, R(\rho))\frac{1+R(\rho)}{1-R(\rho)(1-2\tilde{\alpha})}\right\}\frac{d}{d\rho}R(\rho) \geq 0.$$

Утверждение 3) о направлении интенсивного убывания порядка выпуклости и о существовании чисел Хеймана δ следует из соответствующего утверждения для функции h, равенства (10) и очевидного соотношения $R(\rho) \to R_{\tilde{\alpha}}$ при $\rho \to P_{\tilde{\alpha}}$. Вид функции f, обеспечивающей в 4) равенство $\delta = 1$, находится из того, что функция h в соответствующем случае определяется формулами (5).

Теорема доказана. $\square$

Заключение

Доказаны точные оценки порядка выпуклости и выпуклости гиперболического порядка в семействах $\mathcal{C}(\alpha)$. Получены теоремы регулярности убывания порядка выпуклости и гиперболического порядка выпуклости конформного отображения в $\mathcal{C}(\alpha)$, а также утверждения о регулярности убывания и роста родственных функционалов.

Список литературы

[1] Robertson M.I.S. On the theory of univalent functions // Annals of Mathematics. 1936. Vol. 37, № 2. Pp. 374–408.

[2] Mocanu P.T. Une properiété de convexité généralisée dans la théorie de la représentation conforme // Mathematica. 1969. Vol. 11, № 34. Pp. 127–133.

[3] Goodman A.W. On uniformly convex functions // Annales Polonici Mathematici. 1991. № 56. Pp. 87–92.

[4] Duren P. Univalent functions. N.Y.: Springer-Verlag, 1983. 395 p.

[5] Граф С.Ю., Самойлова Я.И. Регулярность убывания порядка выпуклости и гиперболического порядка выпуклости конформных отображений // Применение функционального анализа в теории приближений. 2016. № 37. С. 13–27.

[6] Хейман В.К. Многолистные функции. М.: Иностранная литература, 1960. 180 с.

[7] Krzyz J. On the maximum modulus of univalent functions // Bull. Acad. Polonici Sci. 1955. Vol. CI, № 3. Pp. 203–206.

[8] Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., 1966. 628 с.

[9] Ганенкова Е.Г. Теорема регулярности убывания в линейно-инвариантных семействах функций // Труды Петрозаводского государственного университета. Серия: Математика. 2006. № 13. С. 46–59.

[10] Ganenkova E.G., Starkov V.V. Regularity theorems for harmonic functions // Journal of Applied Analysis. 2015. Vol. 21, № 1. Pp. 25–36. https://doi.org/10.1515/jaa-2015-0003

[11] Граф С.Ю. Теоремы регулярности для Якобиана в линейно- и аффинно-инвариантных семействах гармонических отображений // Применение функционального анализа в теории приближений. 2014. № 35. С. 10–21.

[12] Граф С.Ю., Самойлова Я.И. Регулярность убывания порядка выпуклости конформных отображений // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 2. С. 135–145.

Образец цитирования

Граф С.Ю., Самойлова Я.И. Регулярность убывания порядка выпуклости в классах $C(\alpha)$ // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 4. С. 85–99. https://doi.org/10.26456/vtpmk191

Сведения об авторах

Граф Сергей Юрьевич
доцент кафедры математического анализа Тверского государственного университета, доцент кафедры математического анализа Петрозаводского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.
Россия, 185910, Респ. Карелия, г. Петрозаводск, пр. Ленина, д. 33, ПетрГУ.

Самойлова Яна Игоревна
магистрант математического факультета Тверского государственного университета, сотрудник кафедры математического анализа Петрозаводского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова 33, ТвГУ.
Россия, 185910, Респ. Карелия, г. Петрозаводск, пр. Ленина, д. 33, ПетрГУ.

ON REGULARITY OF DECREASING OF CONVEXITY ORDER IN $C(\alpha)$ CLASSES

Graf Sergey Yur'evich
Associate professor at Mathematical Analysis and Geometry department,
Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TverSU.
Associate professor at Mathematical Analysis department,
Petrozavodsk State University
Russia, 185910, Rep. Karelia, Petrozavodsk, Lenin ave., PetrSU.

Samoylova Yana Igorevna
Master student at Mathematical faculty, Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TverSU.
Employee of Mathematical Analysis department, Petrozavodsk State University
Russia, 185910, Rep. Karelia, Petrozavodsk, Lenin ave., PetrSU.

Received 27.07.2017, revised 20.10.2017.

In the present paper the new regularity theorems for order of convexity and hyperbolic order of convexity in the classes of convex conformal mappings of order α in the unit disk are proved. The sharpness of the result is illustrated by several examples.

Keywords: conformal mappings, convex mappings, order of convexity, regularity theorems.

Bibliographic citation

Graf S.Yu., Samoylova Ya.I. On regularity of decreasing of convexity order in $C(\alpha)$ classes. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2017, no. 4, pp. 85–99. (in Russian)
https://doi.org/10.26456/vtpmk191

References

[1] Robertson M.I.S. On the theory of univalent functions. *Annals of Mathematics*, 1936, vol. 37(2), pp. 374–408.

[2] Mocanu P.T. Une properiété de convexité généralisée dans la théorie de la représentation conforme. *Mathematica*, 1969, vol. 11(34), pp. 127–133.

[3] Goodman A.W. On uniformly convex functions. *Annales Polonici Mathematici*, 1991, no. 56, pp. 87–92.

[4] Duren P. *Univalent functions*. Springer-Verlag, N.Y., 1983. 395 p.

[5] Graf S.Yu., Samoilova Ya.I. Regularity of decreasing convexity order and hyperbolic order of convexity of conformal mappings. *Primenenie Funktsional'nogo Analiza v Teorii Priblizhenii* [Application of Functional Analysis in Approximation Theory], 2016, no. 37, pp. 13–27. (in Russian)

[6] Kheiman V.K. *Mnogolistnye Funktsii* [Multivalent Functions]. Inostrannaya literatura, Moscow, 1960. 180 p. (in Russian)

[7] Krzyz J. On the maximum modulus of univalent functions. *Bull. Acad. Polonici Sci*, 1955, vol. CI(3), pp. 203–206.

[8] Goluzin G.M. *Geometricheskaya Teoriya Funktsii Kompleksnogo Peremennogo* [Geometric Theory of Functions of a Complex Variable]. Moscow, 1966. 628 p. (in Russian)

[9] Ganenkova E.G. A theorem of regularity of decrease in linearly invariant families of functions. *Trudy Petrozavodskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya: Matematika* [Proceedings of Petrozavodsk State University. Series: Mathematics], 2006, no. 13, pp. 46–59. (in Russian)

[10] Ganenkova E.G., Starkov V.V. Regularity theorems for harmonic functions. *Journal of Applied Analysis*, 2015, vol. 21(1), pp. 25–36. https://doi.org/10.1515/jaa-2015-0003

[11] Graf S.Yu. Regularity theorems for the Jacobian in linear and affine-invariant families of harmonic maps. *Primenenie Funktsional'nogo Analiza v Teorii Priblizhenii* [Application of Functional Analysis in Approximation Theory], 2014, no. 35, pp. 10–21. (in Russian)

[12] Graf S.Yu., Samoylova Ya.I. Regularity of decreasing of convexity order in the class of conformal mappings. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2015, no. 2, pp. 135–145. (in Russian)