

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 514.82

## КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ С ИНТЕГРИРУЕМЫМИ УРАВНЕНИЯМИ СОСТОЯНИЯ

Воронцова Е.Г., Шаров Г.С.

Тверской государственной университет, г. Тверь

---

*Поступила в редакцию 14.12.2017, после переработки 21.02.2018.*

---

Рассмотрен класс космологических моделей с двумя компонентами материи во Вселенной, которые обозначены как пылевидная материя и темная энергия. Исследованы различные уравнения состояния темной энергии, допускающие аналитическую зависимость ее плотности  $\rho_d$  от масштабного фактора  $a$  или красного смещения. В сравнении со стандартной моделью  $\Lambda$ CDM изучено ее обобщение  $w$ CDM с зависимостью  $\rho_d \sim a^{-3B}$ , а также предложено новое уравнение состояния, для которого плотность темной компоненты  $\rho_d = \text{const}/(A + a^{3B})$ . Для данного класса моделей приведены оценки оптимальных значений параметров и их допустимые отклонения с точки зрения соответствия наблюдательным данным по сверхновым типа Ia, барионным акустическим осцилляциям, оценкам параметра Хаббла  $H(z)$ . Сценарий с новым уравнением состояния оказался наиболее успешным в достижении минимума функции  $\chi^2$  — меры соответствия модели наблюдательным данным, однако малое число параметров обеспечивает эффективность модели  $\Lambda$ CDM с точки зрения информационного критерия Акаике.

**Ключевые слова:** космологическая модель, уравнение состояния, параметр Хаббла.

*Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 2. С. 5–26.*  
<https://doi.org/10.26456/vtprm192>

### 1. Введение

Первые данные, свидетельствующие об ускоренном расширении Вселенной, появились в 1998 году вследствие наблюдений за сверхновыми типа Ia [1, 2]. В течение последующих нескольких лет этот вывод был подтвержден с помощью различных астрономических наблюдений: исследований барионных акустических осцилляций (БАО) в крупномасштабной кластеризации галактик [3, 4], измерений реликтового излучения [5, 6], а также расчетами значений параметра Хаббла  $H(z) = \dot{a}/a$  в зависимости от красного смещения  $z$ , сделанными в работах [7–26].

Объяснение факта ускоренного расширения Вселенной является одной из важнейших задач современной астрофизики. Для этого используются космологические теории с различными модификациями эйнштейновской гравитации.

Современной стандартной космологической моделью является модель  $\Lambda$ CDM с холодной темной материей и  $\Lambda$ -членом (темной энергией). Она не содержит явных противоречий и достаточно хорошо описывает наблюдательные данные по сверхновым типа Ia, барионным акустическим осцилляциям, оценкам  $H(z)$ , анизотропии реликтового излучения и другие данные [3, 5, 6, 27].

Однако, в модели  $\Lambda$ CDM имеются проблемы, порождаемые неясной природой темной энергии, необъяснимо малой вероятностью совпадения по порядку величины сегодняшних значений долей материи и темной энергии при различном характере их зависимости от времени и с чрезвычайной малостью наблюдаемого значения константы  $\Lambda$ .

Это стало поводом для возникновения альтернативных космологических моделей [28, 29], модифицирующих эйнштейновскую гравитацию или вводящих дополнительные виды материи. В настоящей работе мы рассмотрим ряд моделей последнего вида с двумя компонентами материи во Вселенной, которые описываются различными уравнениями состояния. Одна из этих компонент — пылевидная материя с плотностью  $\rho_m$  и равным нулю давлением. Она включает в себя обычную барионную материю и темную материю. Другая компонента описывается как некоторый газ с плотностью  $\rho_d$  и давлением  $p_d$ . Она играет роль темной энергии в этих сценариях. Эти компоненты связаны следующими уравнениями состояния:

$$\rho = \rho_m + \rho_d, \quad p_m = 0, \quad p_d = p_d(\rho_d) = w_d \rho_d. \quad (1)$$

Множитель  $w_d$  в последнем уравнении может зависеть от масштабного фактора  $a$ , или, что эквивалентно, от красного смещения

$$z = \frac{1}{a} - 1.$$

Ниже выбираем единицы измерения  $a$  так, что  $a(t_0) = 1$  в настоящий момент, и рассматриваем позднюю стадию эволюции Вселенной ( $z < 2.4$ ), на которой можно пренебречь фотонной и нейтринной составляющими плотности  $\rho$ .

## 2. Динамика двухкомпонентной модели

Для двухкомпонентной космологической модели (1) динамика Вселенной описывается уравнениями Эйнштейна

$$R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2} R \delta_{\nu}^{\mu} = 8\pi G T_{\nu}^{\mu},$$

где  $R_{\nu}^{\mu}$ ,  $T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(-\rho, p, p, p)$  — компоненты тензоров Риччи и энергии импульса,  $R = R_{\mu}^{\mu}$ . Мы ищем космологические решения этих уравнений, удовлетворяющие условиям однородности и изотропии пространства, подставив в них метрику Робертсона–Уокера со знаком кривизны  $k$

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ (1 - kr^2)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega \right].$$

При условии, что компоненты материи с плотностями  $\rho_m$  и  $\rho_d$  не взаимодействуют, мы получим систему из трех уравнений

$$3\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = 8\pi G(\rho_m + \rho_d), \quad (2)$$

$$\dot{\rho}_m = -3\frac{\dot{a}}{a}\rho_m, \quad (3)$$

$$\dot{\rho}_d = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_d + p_d). \quad (4)$$

Здесь и далее точка — производная по  $t$ , скорость света  $c$  полагаем равной 1.

Используя обозначения для параметра Хаббла  $H = \dot{a}/a$  и постоянной Хаббла  $H_0 = H|_{t=t_0} = H|_{z=0}$ , перепишем уравнение Фридмана (2) в виде

$$H^2 = H_0^2 \left[ \frac{8\pi G}{3H_0^2}(\rho_m + \rho_d) + \frac{\Omega_k}{a^2} \right]. \quad (5)$$

Здесь  $\Omega_k = -k/H_0^2$ . Полагая в равенстве (5)  $t = t_0$  (что соответствует  $a = 1$ ), получим тождество

$$\Omega_m^0 + \Omega_d^0 + \Omega_k = 1, \quad (6)$$

где  $\Omega_m^0 = \frac{8}{3}\pi GH_0^{-2}\rho_m|_{t=t_0}$ ,  $\Omega_d^0 = \frac{8}{3}\pi GH_0^{-2}\rho_d|_{t=t_0}$ .

Сумма уравнений (3) и (4)

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(p + \rho) = 0 \quad (7)$$

является следствием условия непрерывности  $T_{\nu;\mu}^\mu = 0$ . Выразив из уравнения (7) давление  $p \equiv p_d = w_d\rho_d$  через полную плотность (1)  $\rho = \rho_m + \rho_d$ , запишем выражения для плотностей  $\rho_m$  и  $\rho_d$  следующим образом:

$$\rho_d = -\frac{\rho + \rho'}{w_d}, \quad (8)$$

$$\rho_m = \frac{\rho' + (1 + w_d)\rho}{w_d}. \quad (9)$$

Здесь штрих означает производную по переменной

$$x = 3 \ln a,$$

множитель  $w_d$  из уравнения состояния  $p_d = w_d\rho_d$  может зависеть от  $a$  (или от  $x$ ).

Так как  $dx = 3\frac{da}{a}$ , можно представить  $\dot{\rho}_d = 3\frac{\dot{a}}{a}\rho'_d$ . Тогда уравнение (4) примет вид

$$\rho'_d = -(1 + w_d)\rho_d. \quad (10)$$

Подставляя в уравнение (10) равенство (8), а также выражение для его производной по  $x$  ( $\rho'_d = -[(\rho' + \rho'')w_d - w'_d(\rho + \rho')]/w_d^2$ ), получим следующее дифференциальное уравнение второго порядка [30, 31]:

$$\rho'' + \left(2 + w_d - \frac{w'_d}{w_d}\right)\rho' + \left(1 + w_d - \frac{w'_d}{w_d}\right)\rho = 0. \quad (11)$$

Заметим, что уравнение (11) можно было получить также и с помощью уравнений (3) и (9).

Обозначим

$$f(x) = 1 + w_d - \frac{w'_d}{w_d} \quad (12)$$

и в дальнейшем будем рассматривать уравнение (11) в виде

$$\rho'' + [1 + f(x)]\rho' + f(x)\rho = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) является линейным дифференциальным уравнением второго порядка и имеет частное решение  $\rho_1(x) = e^{-x}$ . С помощью формулы Остроградского-Лиувилля получим его общее решение

$$\rho(x) = C_0 e^{-x} \int e^{-\int(1+f(x))dx} e^{2x} dx + C_1 e^{-x}. \quad (14)$$

В частном случае

$$f(x) = C, \quad C = \text{const}, \quad (15)$$

уравнение (13) — линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Корни соответствующего характеристического уравнения равны  $-1$  и  $-C$ .

Общее решение уравнения (13) при условии (15) имеет вид

$$\rho(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-x}, \quad \text{при } C = 1, \quad (16)$$

$$\rho(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-Cx}, \quad \text{при } C \neq 1. \quad (17)$$

Данное решение также легко может быть получено и с помощью формулы (14).

Пользуясь равенствами (8), (9) и (12) при  $f(x) = C$ , представим  $\rho_m$  и  $\rho_d$  как функции  $x$ . Для случая  $C = 1$  из равенства (12) получим простое уравнение относительно  $w_d$ :  $w'_d/w_d = w_d$ . Из него следует, что

$$w_d = -\frac{1}{x + \tilde{C}}$$

и

$$\rho_d(x) = (\tilde{C} + x) C_2 e^{-x}, \quad \rho_m(x) = (C_1 - C_2 \tilde{C}) e^{-x}. \quad (18)$$

В случае, когда  $C \neq 1$  относительно  $w_d$  возникает уравнение Бернулли

$$w'_d - (1 - C)w_d = w_d^2,$$

решение которого и плотности  $\rho_d$ ,  $\rho_m$  имеют вид

$$w_d = \frac{C - 1}{\tilde{C} e^{(C-1)x} + 1}, \quad \rho_d(x) = C_2 [\tilde{C} e^{-x} + e^{-Cx}], \quad \rho_m(x) = [C_1 - C_2 \tilde{C}] e^{-x}. \quad (19)$$

Для приложения модели к описанию наблюдательных данных необходимо подставить плотности (18) и (19) или (16) и (17) в уравнение Фридмана (5), в которое плотности компонент материи  $\rho_m$  и  $\rho_d$  входят в виде суммы  $\rho = \rho_m + \rho_d$ . Только эта

сумма имеет наблюдательные проявления и, следовательно, является измеримой величиной. Это означает, что постоянная интегрирования  $\tilde{C}$  в уравнениях (18) и (19) описывает такое перераспределение материи между  $\rho_m(x)$  и  $\rho_d(x)$ , которое никак не проявляется в наблюдениях вследствие сохранения суммы  $\rho = \rho_m + \rho_d$ . Последняя имеет вид (16) или (17) для рассматриваемого сценария (15)  $f(x) = C$ .

Сказанное означает, что в уравнениях (18), (19) без потери общности мы можем положить  $\tilde{C} = 0$  (что, в частности, приводит к  $\rho_m = C_1 e^{-x}$ ) и в формулах (16), (17) для полной плотности  $\rho$  оставшиеся постоянные интегрирования  $C_1, C_2$  выразить через безразмерные константы:

$$\frac{8\pi G}{3H_0^2} C_1 = \Omega_m^0, \quad \frac{8\pi G}{3H_0^2} C_2 = \begin{cases} \alpha, & C = 1, \\ \Omega_d^0, & C \neq 1. \end{cases} \quad (20)$$

Заметим, что  $\Omega_m^0, \Omega_d^0$  и  $\Omega_k$  связаны условием (6), из которого мы можем выразить  $\Omega_d^0 = 1 - \Omega_m^0 - \Omega_k$ , если (в случае  $C \neq 1$ ) считать  $\Omega_m^0$  и  $\Omega_k$  независимыми параметрами. В случае  $C = 1$  параметр  $\Omega_d^0 = 0$  и  $\Omega_k = 1 - \Omega_m^0$ .

В итоге уравнение Фрийдмана (5) принимает вид

$$H^2 = H_0^2 \left[ \Omega_m^0 a^{-3} + \alpha a^{-3} \ln a + \Omega_k a^{-2} \right], \quad \Omega_k = 1 - \Omega_m^0, \quad \text{при } C = 1, \quad (21)$$

$$H^2 = H_0^2 \left[ \Omega_m^0 a^{-3} + (1 - \Omega_m^0 - \Omega_k) a^{-3C} + \Omega_k a^{-2} \right], \quad \text{при } C \neq 1. \quad (22)$$

Эти выражения показывают, что при  $C \neq 1$  модель имеет 4 свободных параметра:  $H_0, \Omega_m^0, \Omega_k$  и  $C$  (можно выбрать  $\Omega_d^0$  вместо  $\Omega_k$ ). При  $C = 1$  число параметров, естественно, снижается до трех, например,  $H_0, \Omega_m^0$  и  $\alpha$ . Необходимо отметить, что при  $C \neq 1$  данная модель совпадает с двухкомпонентной моделью  $w$ CDM [32], в которой  $w_d = w_d^0 = \text{const}$ ;  $w_d^0 = C - 1$ .

Кроме этого, при  $C = 0$  модель (22) переходит в модель  $\Lambda$ CDM [33, 34], в которой параметр  $\Omega_\Lambda$  совпадает с  $\Omega_d$ , а уравнение (22) переходит в

$$H^2 = H_0^2 \left[ \Omega_m^0 a^{-3} + \Omega_\Lambda + \Omega_k a^{-2} \right], \quad \Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m^0 - \Omega_k. \quad (23)$$

Мы рассмотрели различные варианты выбора функции (12)  $f(x) \neq C$ . В настоящей работе мы сосредоточим внимание на одном из таких вариантов, который представляет интерес с точки зрения описания наблюдательных данных. Для этого сценария общее решение уравнения (13) и соответствующая функция  $f(x)$  имеют вид

$$\rho(x) = C_1 e^{-x} + \frac{C_2}{A + e^{Bx}}, \quad f(x) = 2 \frac{B e^{Bx}}{A + e^{Bx}} - \frac{B(1-B) e^{Bx}}{A + (1-B) e^{Bx}}. \quad (24)$$

При выборе этого варианта важен был простой вид плотности  $\rho_d = C_2 / (A + e^{Bx})$ , а не определяемой из уравнения (13) функции  $f(x) = -\frac{d}{dx} \ln |\rho + \rho'|$ .

В результате подстановки плотности (24) в уравнение (5) с учетом связи между постоянными  $C_1, C_2$  и безразмерными константами  $\Omega_m^0, \Omega_d^0$  и  $\Omega_k$ , уравнение Фрийдмана примет вид:

$$H^2 = H_0^2 \left[ \frac{\Omega_m^0}{a^3} + \frac{\Omega_k}{a^2} + \frac{(1 - \Omega_m^0 - \Omega_k)(A + 1)}{A + a^{3B}} \right]. \quad (25)$$

Здесь константа  $\Omega_m^0$  так же, как и в случае  $f(x) = C$  (15) связана с постоянной  $C_1$  соотношением (20). На основании выражения (25) можно сделать вывод, что в данном случае модель имеет 5 свободных параметров:  $H_0$ ,  $\Omega_m^0$ ,  $\Omega_k$ ,  $A$  и  $B$ , что должно быть учтено при приложении модели к описанию наблюдательных данных.

Заметим, что модель (25) при  $A = 0$  переходит в модель  $w$ CDM (22) с  $C = B$ , а при  $B = 0$  или при  $A \rightarrow \infty$  — в модель  $\Lambda$ CDM (23).

### 3. Наблюдательные данные

Для анализа рассматриваемых моделей используем недавние наблюдательные данные, в частности, по  $N_{SN} = 580$  сверхновым типа Ia [35],  $N_H = 57$  оценок значений параметра Хаббла  $H(z)$  [7]– [26] при различных красных смещениях  $z$ , а также  $N_{BAO} = 26$  значений параметров, соответствующих данным БАО.

Для сравнения предсказаний моделей с перечисленными выше наборами данных наблюдений используем функции  $\chi_i^2$  ( $i = SN, H, BAO$ ), а также суммарную функцию

$$\chi_{tot}^2 = \chi_{SN}^2 + \chi_H^2 + \chi_{BAO}^2. \quad (26)$$

#### 3.1 Сверхновые

Первые свидетельства, позволяющие предположить существование темной энергии, появились при наблюдении за сверхновыми типа Ia [1, 2]. В данном случае имеющиеся наблюдательные данные по сверхновым используются для проверки эффективности рассматриваемой модели.

Таблица данных по сверхновым содержит красное смещение  $z = z_i$ , модуль фотометрического расстояния  $\mu_i = \mu(D_L) = 5 \lg(D_L/10 \text{пк})$  и ошибку  $\sigma_i$  в измерении  $\mu_i$ . Теоретические значения для модуля фотометрического расстояния вычисляются следующим образом:

$$\mu_{th}(z) = 5 \log_{10} \left( \frac{D_L(z)}{10 \text{пк}} \right) = 5 \log_{10} \frac{H_0 D_L}{c} + \mu_0, \quad \mu_0 = 42.384 - 5 \log_{10} h. \quad (27)$$

Фотометрическое расстояние  $D_L(z)$ , определяется следующим образом [1, 28]:

$$D_L(z) = \frac{c(1+z)}{H_0} S_k \left( H_0 \int_0^z \frac{d\tilde{z}}{H(\tilde{z})} \right), \quad (28)$$

где

$$S_k(x) = \begin{cases} \sinh(x\sqrt{\Omega_k})/\sqrt{\Omega_k}, & \Omega_k > 0, \\ x, & \Omega_k = 0, \\ \sin(x\sqrt{|\Omega_k|})/\sqrt{|\Omega_k|}, & \Omega_k < 0. \end{cases}$$

В выражении (27) только  $\mu_0$  зависит от постоянной Хаббла  $H_0$  ( $h = H_0/100 \text{ км с}^{-1} \text{ Мпк}^{-1}$ ).

Для рассматриваемых космологических моделей мы задаем значения параметров модели  $p_1, p_2, \dots$ , находим зависимость  $H(z)$  (21) или (22), интеграл (28) и

модельно-зависимые величины  $D_L^{th}$  для фотометрического расстояния (28) или модуля  $\mu_{th}$  (27). Для сравнения теоретических значений  $\mu^{th}$  с данными измерений  $z_i$  и  $\mu_i$  из Таблицы [35] используется функция

$$\chi_{SN}^2(p_1, p_2, \dots) = \min_{H_0} \sum_{i,j=1}^{N_{SN}} \Delta\mu_i (C_{SN}^{-1})_{ij} \Delta\mu_j, \quad \Delta\mu_i = \mu^{th}(z_i, p_1, p_2, \dots) - \mu_i \quad (29)$$

или соответствующая функция правдоподобия  $\mathcal{L}_{SN}(p_1, p_2, \dots) = \exp(-\chi_{SN}^2/2)$ . Здесь  $C_{SN}$  — ковариационная матрица для данных [35] по сверхновым. Минимизация (маргинализация) по  $H_0$  или по  $\mu_0$  в выражении (29) необходима для исключения систематической ошибки данных Таблицы [35] (см. [36–38]).

Таблица 1: Значения параметра Хаббла  $H(z)$  с ошибками  $\sigma_H$  [7–26]

Метод ДВ галактик				Из данных БАО			
$z$	$H(z)$	$\sigma_H$	ссылка	$z$	$H(z)$	$\sigma_H$	ссылка
0.070	69	19.6	[10]	0.24	79.69	2.99	[14]
0.090	69	12	[7]	0.30	81.7	6.22	[21]
0.120	68.6	26.2	[10]	0.31	78.18	4.74	[24]
0.170	83	8	[7]	0.34	83.8	3.66	[14]
0.1791	75	4	[9]	0.35	82.7	9.1	[17]
0.1993	75	5	[9]	0.36	79.94	3.38	[24]
0.200	72.9	29.6	[10]	0.38	81.5	1.9	[23]
0.270	77	14	[7]	0.40	82.04	2.03	[24]
0.280	88.8	36.6	[10]	0.43	86.45	3.97	[14]
0.3519	83	14	[9]	0.44	82.6	7.8	[15]
0.3802	83	13.5	[12]	0.44	84.81	1.83	[24]
0.400	95	17	[7]	0.48	87.79	2.03	[24]
0.4004	77	10.2	[12]	0.51	90.4	1.9	[23]
0.4247	87.1	11.2	[12]	0.52	94.35	2.64	[24]
0.4497	92.8	12.9	[12]	0.56	93.34	2.3	[24]
0.470	89	34	[13]	0.57	87.6	7.8	[18]
0.4783	80.9	9	[12]	0.57	96.8	3.4	[20]
0.480	97	62	[8]	0.59	98.48	3.18	[24]
0.593	104	13	[9]	0.60	87.9	6.1	[15]
0.6797	92	8	[9]	0.61	97.3	2.1	[23]
0.7812	105	12	[9]	0.64	98.82	2.98	[24]
0.8754	125	17	[9]	0.73	97.3	7.0	[15]
0.880	90	40	[8]	2.30	224	8.6	[16]
0.900	117	23	[7]	2.33	224	8	[25]
1.037	154	20	[9]	2.34	222	8.5	[26]
1.300	168	17	[7]	2.36	226	9.3	[22]
1.363	160	33.6	[11]				
1.430	177	18	[7]				
1.530	140	14	[7]				
1.750	202	40	[7]				
1.965	186.5	50.4	[11]				

### 3.2 Параметр Хаббла

Значения параметра Хаббла  $H$  в зависимости от красного смещения  $z$  могут быть вычислены двумя методами:

1. методом оценки с помощью дифференциальных возрастов (ДВ) галактик  $\Delta t$  [7–13] с использованием формулы

$$H(z) = \frac{\dot{a}}{a} \simeq -\frac{1}{1+z} \frac{\Delta z}{\Delta t},$$

2. на основании данных БАО вдоль луча зрения [14–26], который соответствует масштабу звукового горизонта  $r_s(z_d)$ .

В Таблице 1 представлены 57 значений параметра  $H(z)$  [7–26]. При сравнении данных для параметра Хаббла по  $N_H = 57$  из Таблицы 1 с предсказаниями моделей используется функция  $\chi_H^2$ , подобная функциям (29), (34):

$$\chi_H^2(p_1, p_2, \dots) = \sum_{i=1}^{N_H} \frac{[H_i - H_{th}(z_i, p_1, p_2, \dots)]^2}{\sigma_{H,i}^2}. \quad (30)$$

### 3.3 Данные БАО

Для описания данных БАО вычисляется расстояние [4–6]

$$D_V(z) = \left[ \frac{czD_L^2(z)}{(1+z)^2 H(z)} \right]^{1/3}, \quad (31)$$

а также величина, которую можно рассматривать, как наблюдательное проявление барионных акустических осцилляций [4, 5]:

$$d_z(z) = \frac{r_s(z_d)}{D_V(z)}, \quad (32)$$

здесь величина  $r_s(z_d)$  — масштаб акустического горизонта. Для оценки значений параметра  $r_s(z_d)$  мы используем подход, предложенный в работе [36]:

$$r_s(z_d) = \frac{104.57 \text{ Мпк}}{h}, \quad h = \frac{H_0}{100 \text{ км}/(\text{с} \cdot \text{Мпк})}. \quad (33)$$

В этой формуле с правильной зависимостью  $r_s(z_d)$  от  $h$  коэффициент  $(r_s \cdot h)_{fid} = 104.57 \pm 1.44$  Мпк вычислен на основе лучшего приближения для модели  $\Lambda$ CDM.

В Таблице 2 представлены известные на данный момент  $N_{BAO} = 26$  значений параметра  $d_z(z)$  (32): к 17 значениям, которые были использованы ранее в работах [27, 33, 34, 36–39], добавлены 9 новых значений (отмечены в Таблице 2 символом \*) из работы [24].



Оценки величин  $d_z(z)$  Таблицы 2 являются зависимыми [40, 41]. Для сравнения теоретических расчетных значений с результатами наблюдений  $d_z(z_i)$  из Таблицы 2 находим для (32) функцию  $\chi^2$ :

$$\chi_{BAO}^2(p_1, p_2, \dots) = (\Delta d)^T C_d^{-1} \Delta d, \quad \Delta d = d_z(z_i) - d_z^{th}. \quad (34)$$

Соответствующие элементы ковариационной матрицы  $C_d^{-1} = ||c_{ij}^d||$  в (34) имеют вид [5, 40, 41]:

$$\begin{aligned} c_{33}^d &= 30124, & c_{39}^d &= -17227, & c_{99}^d &= 86977, & c_{1414}^d &= 24532.1, & c_{1422}^d &= -25137.7, \\ c_{1424}^d &= 12099.1, & c_{2222}^d &= 134598.4, & c_{2224}^d &= -64783.9, & c_{2424}^d &= 128837.6. \end{aligned}$$

Здесь  $c_{ij} = c_{ji}$  (матрица симметрична), неуказанные диагональные элементы  $c_{ii} = 1/\sigma_i^2$ ,  $c_{ij} = 0$ ,  $i \neq j$ .

Для  $\sigma_d$  в Табл. 2 учитывается корреляция между оценками величин  $d_z(z)$  и  $H(z)$  (Табл. 1) при  $z = 0.35, 0.57, 2.34, 2.36$  в работах [17–19, 22, 26].

Таблица 2: Значения параметра (32)  $d_z(z) = r_s(z_d)/D_V(z)$

$z$	$d_z(z)$	$\sigma_d$	$z$	$d_z(z)$	$\sigma_d$
0.106	0.336	0.015	0.44	0.0916	0.0071
0.15	0.2232	0.0084	0.44*	0.0874	0.0010
0.20	0.1905	0.0061	0.48*	0.0816	0.0009
0.275	0.1390	0.0037	0.52*	0.0786	0.0009
0.278	0.1394	0.0049	0.56*	0.0741	0.0008
0.31*	0.1222	0.0021	0.57	0.0739	0.0043
0.314	0.1239	0.0033	0.57	0.0726	0.0014
0.32	0.1181	0.0026	0.59*	0.0711	0.0010
0.35	0.1097	0.0036	0.60	0.0726	0.0034
0.35	0.1126	0.0022	0.64*	0.0675	0.0011
0.35	0.1161	0.0146	0.73	0.0592	0.0032
0.36*	0.1053	0.0018	2.34	0.0320	0.0021
0.40*	0.0949	0.0014	2.36	0.0329	0.0017

#### 4. Модели и анализ данных

Результаты вычислений минимума функции (26)  $\chi_{tot}^2 = \chi_{SN}^2 + \chi_H^2 + \chi_{BAO}^2$  для модели  $w$ CDM (22) в сравнении с моделью  $\Lambda$ CDM (23) представлены на Рис. 1. На верхних панелях для  $\Lambda$ CDM слева и  $w$ CDM справа соответствующие функции  $\chi_{tot}^2$  показаны как заполненные контуры для уровней  $1\sigma$  (68.27%),  $2\sigma$  (95.45%) и  $3\sigma$  (99.73%). При этом на каждой из плоскостей двух параметров в каждой точке для  $\chi_{tot}^2$  вычислен и показан на панели минимум по оставшимся модельным параметрам (одному — для  $\Lambda$ CDM и двум — для  $w$ CDM). В частности, на правой верхней панели на плоскости  $(\Omega_m^0, \Omega_k)$  для модели  $w$ CDM представлены линии уровня функции  $\varphi(\Omega_m^0, \Omega_k) = \min_{H_0, C} \chi_{tot}^2$ . Кружок на каждой плоскости обозначает точку абсолютного минимума функции  $\chi_{tot}^2$ .

Для сравнения на всех четырех верхних панелях в виде линий без заполнения показаны  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  и  $3\sigma$  линии уровня функции  $\chi_{SN}^2 + \chi_H^2$ , определяющей описание моделью данных по сверхновым типа Ia [35] и оценок параметра Хаббла  $H(z)$  (Таблица 1). Точка абсолютного минимума данной функции отмечена звездочкой.

Мы используем метод численного расчета минимума функции  $\chi^2$ , который предполагает выделение на первом этапе двух модельных параметров  $p_1$ ,  $p_2$  — абсциссы и ординаты на верхних панелях Рис. 1 (и Рис. 2 ниже). На следующем этапе в каждой точке плоскости  $(p_1, p_2)$  мы ищем минимум по оставшимся параметрам в области, которая для модели  $w$ CDM представляет собой прямоугольник на плоскости оставшихся параметров  $(p_3, p_4)$ . Размеры этого прямоугольника фиксированы, а координаты его центра зависят от выбранных значений  $p_1$  и  $p_2$  и определяются на основе вычислений в предыдущих точках с помощью интерполяции. При этом по итогам вычислений в каждой точке плоскости  $(p_1, p_2)$  контролируется нахождение точки минимума функции  $\chi^2 = \chi^2(p_3, p_4)$  в упомянутом прямоугольнике.

На панелях нижнего ряда Рис. 1 представлены одномерные распределения суммарной функции (26)  $\min \chi_{tot}^2$  — зависимости от одного параметра минимума  $\chi_{tot}^2$  по остальным параметрам. В частности, в левом нижнем окне показана зависимость от  $\Omega_m^0$  функции  $\min_{\Omega_k, H_0, C} \chi_{tot}^2$  для модели  $w$ CDM (штрих-пунктир) и  $\min_{\Omega_k, H_0} \chi_{tot}^2$  для модели  $\Lambda$ CDM (штриховая линия). Эти одномерные распределения, которые вычислены с помощью показанных выше двумерных, определяют оптимальные значения и ошибки параметров моделей, представленные в Таблице 3.

Рис. 1 и Таблица 3 демонстрируют, что модель  $w$ CDM (22) обеспечивает незначительное уменьшение абсолютного минимума  $\chi_{tot}^2$  до 610.1 по сравнению с моделью  $\Lambda$ CDM (23) (для последней  $\min \chi_{tot}^2 \simeq 610.3$ ). Другими словами, введение дополнительного параметра  $C = w_d + 1$  не приводит к заметному прогрессу в минимизации  $\chi_{tot}^2$ . При этом области допустимых значений параметров  $\Omega_m^0$ ,  $\Omega_k$  и  $H_0$  для  $w$ CDM существенно расширяются по сравнению с  $\Lambda$ CDM при заметном, но не радикальном изменении оптимальных значений параметров (например, оптимальное значение  $\Omega_m^0$  изменяется с 0.282 на 0.256).

Четыре верхние панели Рис. 1 показывают, что оптимальные значения параметров, определенные с помощью функции  $\chi_{SN}^2 + \chi_H^2$ , обозначенной “SNe +  $H(z)$ ” и отражающей вклад данных по сверхновым типа Ia и параметру Хаббла  $H(z)$ , заметно отличаются от приведенных в Таблице 3 значений, связанных с  $\chi_{tot}^2$ . Везде ниже мы будем говорить только об анализе функции  $\chi_{tot}^2$ , определяющей описание всей совокупности данных по сверхновым типа Ia,  $H(z)$  и БАО.

Вариант (21) с  $C = 1$ , выводимый из модели  $w$ CDM в пределе  $C \rightarrow 1$  (или,  $w_d \rightarrow 0$ ), не показан на Рис. 1 и в Таблице 3, так как он не выдерживает конкуренции с  $\Lambda$ CDM, не обеспечивая достаточно малых значений  $\min \chi_{tot}^2$ . Для модели  $w$ CDM такое поведение  $\min \chi_{tot}^2$  как функции  $C$  при  $C > 0.2$  можно увидеть на правой нижней панели Рис. 1; добавим, что при  $C > 0.4$  минимальное значение  $\min_{\Omega_m^0, \Omega_k, H_0} \chi_{tot}^2$  превышает 720.

Результаты анализа описания наблюдательных данных с помощью модели (25) (обобщающей  $w$ CDM) представлены на Рис. 2. Параметр  $A$  для этой модели (с допустимыми значениями  $A > -1$ ) здесь удобно выразить через вспомогательный

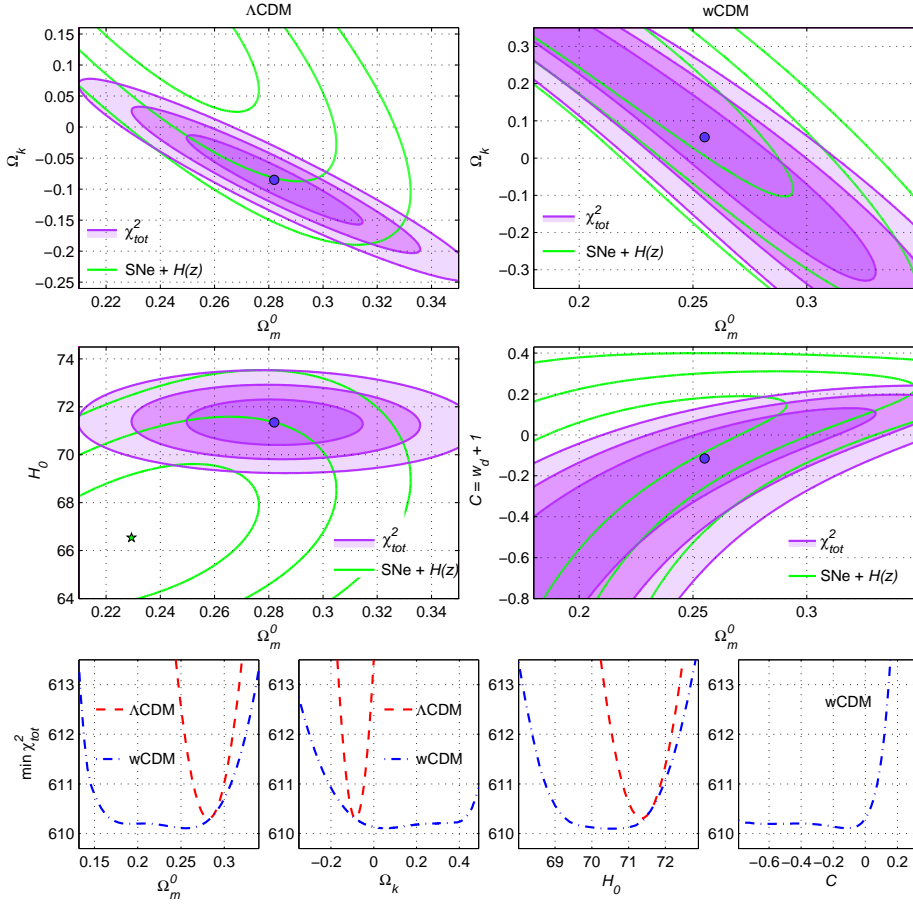


Рис. 1: На верхних панелях для моделей  $\Lambda$ CDM (слева) и  $w$ CDM (справа) показаны линии уровня  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  и  $3\sigma$  функций  $\chi_{tot}^2$  (заполненные контуры)  $\chi_{SN}^2 + \chi_H^2$  (линии, здесь “SNe” обозначает “сверхновые”). Внизу для этих двух моделей показана зависимость  $\min \chi_{tot}^2$  от одного параметра:  $\Omega_m^0$ ,  $\Omega_k$ ,  $H_0$  и  $C = w_d + 1$ .

параметр  $\alpha$  следующим образом:

$$A = e^\alpha - 1, \quad \alpha = \ln(A + 1). \quad (35)$$

Это связано с тем, что минимальное значения функции  $\chi_{tot}^2$  резко зависит от  $A$  при  $A \rightarrow -1$ , тогда как в области  $A > -0.5$  эта зависимость становится очень слабой. Такое поведение иллюстрируют графики  $\phi(A)$  и  $\phi(\alpha)$  функции  $\phi = \min_{\Omega_m^0, \Omega_k, H_0, B} \chi_{tot}^2$  в третьем ряду панелей на Рис. 2. Здесь и ниже одномерные распределения для модели (25) обозначены сплошными линиями, тогда как штриховые и штрихпунктирные линии в нижнем ряду относятся соответственно к моделям  $\Lambda$ CDM и  $w$ CDM (они скопированы с Рис. 1).

В одномерных распределениях в нижнем ряду панелей на Рис. 2 показана зависимость от (общих для трех моделей) параметров  $\Omega_m^0$ ,  $\Omega_k$ ,  $H_0$  функции  $\min \chi_{tot}^2$

Таблица 3: Модели и  $1\sigma$  оценки параметров моделей

Модель	$\min \chi_{tot}^2$	AIC	$\Omega_m^0$	$\Omega_k$	$H_0$	другие параметры
$\Lambda$ CDM	610.30	616.30	0.282 $\pm 0.021$	-0.085 $\pm 0.048$	71.35 $\pm 0.63$	$\Omega_\Lambda = 0.803 \pm 0.028$
$w$ CDM	610.10	618.10	0.256 +0.056 -0.112	0.053 +0.45 -0.274	70.42 +1.60 -1.73	$C = -0.112^{+0.182}_{-1.24}$
модель (25)	608.83	618.83	0.197 +0.062 -0.036	0.306 +0.123 -0.262	69.75 +1.18 -0.91	$\alpha = -4.52^{+4.24}_{-1.43}$ , $B = -0.007^{+0.006}_{-0.387}$

— минимума по оставшимся модельным параметрам. Мы видим, что модель (25) позволяет достичь существенно лучших результатов в снижении абсолютного минимума  $\chi_{tot}^2$  — на 1.47 и 1.27 по сравнению соответственно с моделями  $\Lambda$ CDM и  $w$ CDM.

Наряду с упомянутым достоинством модель (25) имеет недостаток — большее по сравнению конкурентами число модельных параметров  $N_p = 5$ . В Таблице 3 для трех моделей приведены значения  $N_p$  и информационного критерия Акаике эффективности модели [33, 34, 38]

$$AIC = \min \chi_{tot}^2 + 2N_p.$$

Он отдает предпочтение модели  $\Lambda$ CDM с  $N_p = 3$ .

Другой недостаток модели (25) — оптимальные значения параметров  $\Omega_m^0$  и  $\Omega_k$  заметно отличаются от предсказаний других моделей.

Особенности поведения двумерных распределений функции  $\min \chi_{tot}^2$  (минимум вычислен по трем остальным параметрам) на 4 верхних панелях Рис. 2 показаны линиями уровня  $m + 0.3$  и  $m + 1$ , где  $m$  — абсолютный минимум  $\chi_{tot}^2$ . Напомним, что заполненные контуры  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  и  $3\sigma$  соответствуют  $m + 2.3$ ,  $m + 6.17$  и  $m + 11.8$ . Как и на Рис. 1 кружок отмечает точку минимума.

На плоскостях  $(\alpha, \Omega_k)$  и  $(\alpha, B)$  можно видеть подтверждение отмеченного выше факта, что модель (25) при  $A = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$  переходит в модель  $w$ CDM с  $C = B$ , а при  $B = 0$  или при  $A \rightarrow \infty$  — в модель  $\Lambda$ CDM (23). Поэтому минимум (по четырем остальным параметрам)  $\chi_{tot}^2$  как функция  $\alpha$  или  $B$  ограничен сверху значением 610.3 — абсолютным минимумом этой функции для модели  $\Lambda$ CDM. Это приводит к тому, что на плоскостях  $(\alpha, \Omega_k)$  и  $(\alpha, B)$  область  $1\sigma$ , соответствующая  $\min \chi_{tot}^2 < 611.13$ , охватывает все значения  $\alpha$ .

В ходе анализа модели (25) были учтены сингулярные космологические решения, возникающие в области  $A < 0$  ( $\alpha < 0$ ),  $B > 0$  вследствие того, что в ходе эволюции  $0 < a \leq 1$  обращается в нуль знаменатель в выражении для плотности  $\rho_d = \text{const}/(A + a^{3B})$ . Такие решения с теряющим физический смысл выражением (25) были исключены в численных расчетах с помощью штрафного вклада в  $\chi_{tot}^2$ .

## Заключение

В работе рассмотрены космологические модели с двумя компонентами материи (пылевидная и темная компоненты) с интегрируемыми уравнениями состояния.

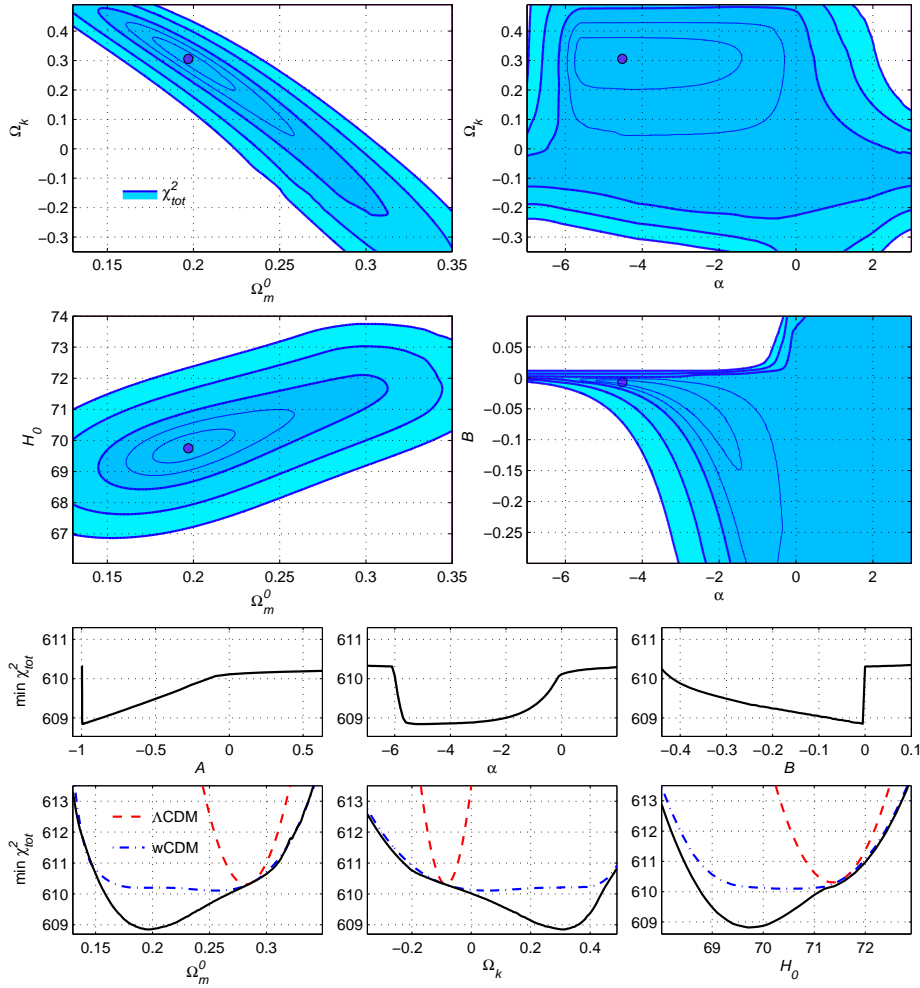


Рис. 2: Для модели (25) для функций  $\chi_{tot}^2$  на 4 верхних панелях показаны линии уровня  $\min \chi_{tot}^2 + 0.3$ ,  $\min \chi_{tot}^2 + 1$ ,  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  и  $3\sigma$ , а на нижних панелях — одномерные распределения обозначены сплошными линиями. Обозначения для соответствующих распределений для моделей  $\Lambda$ CDM и  $w$ CDM — те же, что и на Рис. 1.

Из этих моделей в центре внимания были наиболее успешные в описании последних астрофизических данных по сверхновым типа Ia [35], параметру Хаббла  $H(z)$  (Таблица 1) и барионным акустическим осцилляциям (Таблица 2).

В качестве относительно успешных моделей указанного класса были изучены известная модель  $w$ CDM (22) [32] и новая модель (25), в которой плотность темной компоненты  $\rho_d = \text{const}/(A+a^{3B})$  определяется двумя безразмерными параметрами  $A$  и  $B$  (вместо  $A$  удобно ввести  $\alpha = \ln(A+1)$ ). В качестве базы для сравнения мы рассмотрели наиболее популярную модель  $\Lambda$ CDM.

Результаты расчетов оптимальных значений параметров моделей посредством анализа функции (26)  $\chi_{tot}^2 = \chi_{SN}^2 + \chi_H^2 + \chi_{BAO}^2$  и найденные минимумы  $\chi_{tot}^2$  при-

ведены в Таблице 3 и иллюстрируются Рис. 1 и 2.

С точки зрения информационного критерия Акаике [33, 34] наиболее эффективной является модель  $\Lambda$ CDM. Это определяется малостью числа ее параметров  $N_p = 3$ . Тем не менее, модель (25), имеющая в качестве недостатков большое число параметров  $N_p = 5$  и нестандартные оптимальные значения  $\Omega_m^0$  и  $\Omega_k$ , позволяет достичь минимума  $\chi_{tot}^2$ , существенно меньшего, чем ее конкуренты в Таблице 3.

Такое поведение модели (25) дает основание сравнить ее с рассмотренной в работах [34, 36] моделью с модифицированным газом Чаплыгина, имеющей также  $N_p = 5$  параметров и аналогичное значение  $\min \chi_{tot}^2$ .

### Список литературы

- [1] Riess A.G. et al. Observational evidence from Supernovae for an accelerating Universe and a cosmological constant // *The Astronomical Journal*. 1998. Vol. 116, № 3. Pp. 1009–1038. [arXiv:astro-ph/9805201](#)
- [2] Perlmutter S. et al. Measurements of omega and lambda from 42 high redshift supernovae // *The Astrophysical Journal*. 1999. Vol. 517, № 2. Pp. 565–586. [arXiv:astro-ph/9812133](#)
- [3] Weinberg D.H. et al. Observational probes of cosmic acceleration // *Physics Reports*. 2013. Vol. 530, № 2. Pp. 87–255. [arXiv:1201.2434](#)
- [4] Eisenstein D.J. et al. Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of SDSS luminous red galaxies // *The Astrophysical Journal*. 2005. Vol. 633, № 2. Pp. 560–574. [arXiv:astro-ph/0501171](#)
- [5] Hinshaw G. et al. Nine-year Wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: cosmological parameters results // *The Astrophysical Journal Supplement*. 2013. Vol. 208, № 2. Id 19. 25 p. [arXiv:1212.5226](#)
- [6] Ade P.A.R. et al. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters // *Astronomy and Astrophysics*. 2016. Vol. 594. Id A13. 63 p. [arXiv:1502.01589](#)
- [7] Simon J., Verde L., Jimenez R. Constraints on the redshift dependence of the dark energy potential // *Physical Review D*. 2005. Vol. 71, № 12. Id 123001. [arXiv:astro-ph/0412269](#)
- [8] Stern D. et al. Cosmic chronometers: constraining the equation of state of dark energy. I:  $H(z)$  measurements // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. 2010. № 02. Id 008. [arXiv:0907.3149](#)
- [9] Moresco M. et al. Improved constraints on the expansion rate of the Universe up to  $z \sim 1.1$  from the spectroscopic evolution of cosmic chronometers // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. 2012. № 08. Id 006. [arXiv:1201.3609](#)
- [10] Zhang C. et al. Four new observational  $H(z)$  data from luminous red galaxies Sloan Digital Sky Survey Data Release seven // *Research in Astronomy and Astrophysics*. 2014. Vol. 14, № 10. Id 1221-1233. [arXiv:1207.4541](#)

- [11] Moresco M. Raising the bar: new constraints on the Hubble parameter with cosmic chronometers at  $z \sim 2$  // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters. 2015. Vol. 450, № 1. Pp. L16–L20. [arXiv:1503.01116](#)
- [12] Moresco M. et al. A 6% measurement of the Hubble parameter at  $z \sim 0.45$ : direct evidence of the epoch of cosmic re-acceleration // Journal of Cosmology and Astroparticle Physics. 2016. № 05. Id 014. [arXiv:1601.01701](#)
- [13] Ratsimbazafy A.L. et al. Age-dating luminous red galaxies observed with the Southern African Large Telescope // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2017. Vol. 467, № 3. Pp. 3239–3254. [arXiv:1702.00418](#)
- [14] Gaztañaga E., Cabre A., Hui L. Clustering of Luminous Red Galaxies IV: Baryon Acoustic Peak in the Line-of-Sight Direction and a Direct Measurement of  $H(z)$  // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2009. Vol. 399, № 3. Pp. 1663–1680. [arXiv:0807.3551](#)
- [15] Blake C. et al. The WiggleZ Dark Energy Survey: joint measurements of the expansion and growth history at  $z < 1$  // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2012. Vol. 425, № 1. Pp. 405–414. [arXiv:1204.3674](#)
- [16] Busca N.G. et al. Baryon acoustic oscillations in the Ly $\alpha$  forest of BOSS quasars // Astronomy and Astrophysics. 2013. Vol. 552. Id A96. 18 p. [arXiv:1211.2616](#)
- [17] Chuang C.H., Wang Y. Modeling the anisotropic two-point galaxy correlation function on small scales and improved measurements of  $H(z)$ ,  $D_A(z)$ , and  $f(z)\sigma_8(z)$  from the Sloan Digital Sky Survey DR7 Luminous Red Galaxies // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2013. Vol. 435, № 1. Pp. 255–262. [arXiv:1209.0210](#)
- [18] Chuang C.H. et al. The clustering of galaxies in the SDSS-III baryon oscillation spectroscopic survey: single-probe measurements and the strong power of  $f(z)\sigma_8(z)$  on constraining dark energy // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2013. Vol. 433, № 4. Pp. 3559–3571. [arXiv:1303.4486](#)
- [19] Anderson L. et al. The clustering of galaxies in the SDSS-III baryon oscillation spectroscopic survey: measuring  $D_A$  and  $H$  at  $z = 0.57$  from the baryon acoustic peak in the data release 9 spectroscopic galaxy sample // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2014. Vol. 439, № 1. Pp. 83–101. [arXiv:1303.4666](#)
- [20] Anderson L. et al. The clustering of galaxies in the SDSS-III baryon oscillation spectroscopic survey: baryon acoustic oscillations in the data releases 10 and 11 galaxy samples // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2014. Vol. 441, № 1. Pp. 24–62. [arXiv:1312.4877](#)
- [21] Oka A. et al. Simultaneous constraints on the growth of structure and cosmic expansion from the multipole power spectra of the SDSS DR7 LRG sample // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2014. Vol. 439, № 3. Pp. 2515–2530. [arXiv:1310.2820](#)

- [22] Font-Ribera A. et al. Quasar-Lyman  $\alpha$  forest cross-correlation from BOSS DR11: baryon acoustic oscillations // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. 2014. № 05. Id 027. [arXiv:1311.1767](#)
- [23] Alam S. et al. The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: cosmological analysis of the DR12 galaxy sample // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2017. Vol. 470, № 3. Pp. 2617–2652. [arXiv:1607.03155](#)
- [24] Wang Y. et al. The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: tomographic BAO analysis of DR12 combined sample in configuration space // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2017. Vol. 469, № 3. Pp. 3762–3774. [arXiv:1607.03154](#)
- [25] Bautista J.E. et al. Measurement of baryon acoustic oscillation correlations at  $z = 2.3$  with SDSS DR12 Ly $\alpha$ -Forests // *Astronomy and Astrophysics*. 2017. Vol. 603. Id A12. 23 p. [arXiv:1702.00176](#)
- [26] Delubac T. et al. Baryon acoustic oscillations in the Ly $\alpha$  forest of BOSS DR11 quasars // *Astronomy and Astrophysics*. 2015. Vol. 574. Id A59. 17 p. [arXiv:1404.1801](#)
- [27] Шаров Г.С., Воронцова Е.Г. Космологическая модель с обобщенным чаплыгинским газом и последние астрономические наблюдения // *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*. 2014. № 1. С. 21–38.
- [28] Clifton T., Ferreira P.G., Padilla A., Skordis C. Modified Gravity and Cosmology // *Physics Reports*. 2012. Vol. 513, № 1. Pp. 1–189. [arXiv:1106.2476](#)
- [29] Bamba K., Capozziello S., Nojiri S., Odintsov S.D. Dark energy cosmology: the equivalent description via different theoretical models and cosmography tests // *Astrophysics and Space Science*. 2012. Vol. 342, № 1. Pp. 155–228. [arXiv:1205.3421](#)
- [30] Chimento L. P. Linear and nonlinear interactions in the dark sector // *Physical Review D*. 2010. Vol. 81, № 4. Id 043525. [arXiv:0911.5687](#)
- [31] Pan S., Bhattacharya S., Chakraborty S. An analytic model for interacting dark energy and its observational constraints // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2015. Vol. 452, № 3. Pp. 3038–3046. [arXiv:1210.0396](#)
- [32] Caldwell R.R. A Phantom Menace? Cosmological consequences of a dark energy component with super-negative equation of state // *Physics Letters B*. 2002. Vol. 545, № 1-2. Pp. 23–29. [arXiv:astro-ph/9908168](#)
- [33] Sharov G.S., Vorontsova E.G. Parameters of cosmological models and recent astronomical observations // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. 2014. № 10. Id 057. [arXiv:1407.5405](#)
- [34] Шаров Г.С., Воронцова Е.Г. Последние оценки астрофизических параметров и предсказания модели с модифицированным газом Чаплыгина // *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*. 2015. № 2. С. 7–24.



- [35] Suzuki N. et al. The Hubble Space Telescope Cluster Supernova Survey. V. Improving the Dark-energy Constraints above  $z > 1$  and Building an Early-type-hosted Supernova Sample // *The Astrophysical Journal*. 2012. Vol. 746, № 1. Id 85. 24 p. [arXiv:1105.3470](https://arxiv.org/abs/1105.3470). URL: <http://supernova.lbl.gov/Union/>.
- [36] Sharov G.S. Observational constraints on cosmological models with Chaplygin gas and quadratic equation of state // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. 2016. № 06. Id 023. [arXiv:1506.05246](https://arxiv.org/abs/1506.05246)
- [37] Sharov G.S. et al. A new interacting two fluid model and its consequences // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2017. Vol. 466, № 3. Pp. 3497–3506. [arXiv:1701.00780](https://arxiv.org/abs/1701.00780)
- [38] Pan S, Sharov G.S. A model with interaction of dark components and recent observational data // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2017. Vol. 472, № 4. Pp. 4736–4749. [arXiv:1609.02287](https://arxiv.org/abs/1609.02287)
- [39] Odintsov S.D., Saez-Gomez D., Sharov G.S. Is exponential gravity a viable description for the whole cosmological history? // *The European Physical Journal C - Particles and Fields*. 2017. Vol. 77, № 12. Id 862. [arXiv:1709.06800](https://arxiv.org/abs/1709.06800)
- [40] Percival W.J. et al. Baryon acoustic scillations in the Sloan Digital Sky Survey Data Release 7 galaxy sample // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 2010. Vol. 401, № 4. Pp. 2148–2168. [arXiv:0907.1660](https://arxiv.org/abs/0907.1660)
- [41] Blake C. et al. The WiggleZ dark energy survey: mapping the distance redshift relation with baryon acoustic oscillations // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2011. Vol. 418, № 3. Pp. 1707–1724. [arXiv:1108.2635](https://arxiv.org/abs/1108.2635)

### Образец цитирования

Воронцова Е.Г., Шаров Г.С. Космологические модели с интегрируемыми уравнениями состояния // *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*. 2018. № 2. С. 5–26. <https://doi.org/10.26456/vtprmk192>

### Сведения об авторах

#### 1. Воронцова Елена Геннадьевна

доцент кафедры общей математики и математической физики Тверского государственного университета.

*Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.*

*E-mail: [Vorontsova.EG@tversu.ru](mailto:Vorontsova.EG@tversu.ru)*

#### 2. Шаров Герман Сергеевич

заведующий кафедрой функционального анализа и геометрии Тверского государственного университета.

*Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.*

*E-mail: [Sharov.GS@tversu.ru](mailto:Sharov.GS@tversu.ru)*

# COSMOLOGICAL MODELS WITH INTEGRABLE EQUATIONS OF STATE

**Vorontsova Elena Gennadievna**

Associate professor at General Mathematics and Mathematical Physics department,  
Tver State University  
*Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TverSU.*  
E-mail: [Vorontsova.EG@tversu.ru](mailto:Vorontsova.EG@tversu.ru)

**Sharov German Sergeevich**

Head of Functional Analysis and Geometry department,  
Tver State University  
*Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TverSU.*  
E-mail: [Sharov.GS@tversu.ru](mailto:Sharov.GS@tversu.ru)

---

*Received 14.12.2017, revised 21.02.2018.*

---

We consider a class of cosmological models with two components of matter in the Universe, which denoted as dust matter and dark energy. We investigate various equations of state for dark energy, which allow analytical dependence of its density  $\rho_d$  on the scale factor  $a$  or redshift. In comparison with the standard model  $\Lambda$ CDM we study its generalization  $w$ CDM with the dependence  $\rho_d \sim a^{-3B}$ , and also suggest a new equation of state with the dark component density  $\rho_d = \text{const}/(A + a^{3B})$ . For this class of models we estimated optimal values of the parameters and limitations on their acceptable deviations from the best description of observational data for type Ia supernovae, baryon acoustic oscillations and the Hubble parameter  $H(z)$  estimations. The scenario with the new equation of state appears to be the most successful in minimization of the function  $\chi^2$  measuring correspondence between a model and an observational data, however the small number of parameters makes the  $\Lambda$ CDM model more effective from the point of view of the Akaike information criterion.

**Keywords:** cosmological model, equation of state, Hubble parameter.

## Citation

Vorontsova E.G., Sharov G.S. Cosmological models with integrable equations of state. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2018, no. 2, pp. 5–26. (in Russian). <https://doi.org/10.26456/vtpmk192>

## References

- [1] Riess A.G. et al. Observational evidence from Supernovae for an accelerating Universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, 1998, vol. 116(3), pp. 1009–1038. [arXiv:astro-ph/9805201](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9805201)

- [2] Perlmutter S. et al. Measurements of omega and lambda from 42 high redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, 1999, vol. 517(2), pp. 565–586. [arXiv:astro-ph/9812133](#)
- [3] Weinberg D.H. et al. Observational probes of cosmic acceleration. *Physics Reports*, 2013, vol. 530(2), pp. 87–255. [arXiv:1201.2434](#)
- [4] Eisenstein D.J. et al. Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of SDSS luminous red galaxies. *The Astrophysical Journal*, 2005, vol. 633(2), pp. 560–574. [arXiv:astro-ph/0501171](#)
- [5] Hinshaw G. et al. Nine-year Wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: cosmological parameters results. *The Astrophysical Journal Supplement*, 2013, vol. 208(2), id 19. 25 p. [arXiv:1212.5226](#)
- [6] Ade P.A.R. et al. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. *Astronomy and Astrophysics*, 2016, vol. 594, id A13. 63 p. [arXiv:1502.01589](#)
- [7] Simon J., Verde L., Jimenez R. Constraints on the redshift dependence of the dark energy potential. *Physical Review D*, 2005, vol. 71(12), id 123001. [arXiv:astro-ph/0412269](#)
- [8] Stern D. et al. Cosmic chronometers: constraining the equation of state of dark energy. I:  $H(z)$  measurements. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2010, no. 02, id 008. [arXiv:0907.3149](#)
- [9] Moresco M. et al. Improved constraints on the expansion rate of the Universe up to  $z \sim 1.1$  from the spectroscopic evolution of cosmic chronometers. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2012, no. 08, id 006. [arXiv:1201.3609](#)
- [10] Zhang C. et al. Four new observational  $H(z)$  data from luminous red galaxies Sloan Digital Sky Survey Data Release seven. *Research in Astronomy and Astrophysics*, 2014, vol. 14(10), id 1221-1233. [arXiv:1207.4541](#)
- [11] Moresco M. Raising the bar: new constraints on the Hubble parameter with cosmic chronometers at  $z \sim 2$ . *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 2015, vol. 450(1), pp. L16–L20. [arXiv:1503.01116](#)
- [12] Moresco M. et al. A 6% measurement of the Hubble parameter at  $z \sim 0.45$ : direct evidence of the epoch of cosmic re-acceleration. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2016, no 05, id 014. [arXiv:1601.01701](#)
- [13] Ratsimbazafy A.L. et al. Age-dating luminous red galaxies observed with the Southern African Large Telescope. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2017, vol. 467(3), pp. 3239–3254. [arXiv:1702.00418](#)
- [14] Gaztañaga E., Cabre A., Hui L. Clustering of Luminous Red Galaxies IV: Baryon Acoustic Peak in the Line-of-Sight Direction and a Direct Measurement of  $H(z)$ . *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2009, vol. 399(3), pp. 1663–1680. [arXiv:0807.3551](#)

- [15] Blake C. et al. The WiggleZ Dark Energy Survey: joint measurements of the expansion and growth history at  $z < 1$ . *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2012, vol. 425(1), pp. 405–414. [arXiv:1204.3674](#)
- [16] Busca N.G. et al. Baryon acoustic oscillations in the Ly $\alpha$  forest of BOSS quasars. *Astronomy and Astrophysics*, 2013, vol. 552, id A96. 18 p. [arXiv:1211.2616](#)
- [17] Chuang C.H., Wang Y. Modeling the anisotropic two-point galaxy correlation function on small scales and improved measurements of  $H(z)$ ,  $D_A(z)$ , and  $f(z)\sigma_8(z)$  from the Sloan Digital Sky Survey DR7 Luminous Red Galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2013, vol. 435(1), pp. 255–262. [arXiv:1209.0210](#)
- [18] Chuang C.H. et al. The clustering of galaxies in the SDSS-III baryon oscillation spectroscopic survey: single-probe measurements and the strong power of  $f(z)\sigma_8(z)$  on constraining dark energy. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2013, vol. 433(4), pp. 3559–3571. [arXiv:1303.4486](#)
- [19] Anderson L. et al. The clustering of galaxies in the SDSS-III baryon oscillation spectroscopic survey: measuring  $D_A$  and  $H$  at  $z = 0.57$  from the baryon acoustic peak in the data release 9 spectroscopic galaxy sample. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2014, vol. 439(1), pp. 83–101. [arXiv:1303.4666](#)
- [20] Anderson L. et al. The clustering of galaxies in the SDSS-III baryon oscillation spectroscopic survey: baryon acoustic oscillations in the data releases 10 and 11 galaxy samples. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2014, vol. 441(1), pp. 24–62. [arXiv:1312.4877](#)
- [21] Oka A. et al. Simultaneous constraints on the growth of structure and cosmic expansion from the multipole power spectra of the SDSS DR7 LRG sample. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2014, vol. 439(3), pp. 2515–2530. [arXiv:1310.2820](#)
- [22] Font-Ribera A. et al. Quasar-Lyman  $\alpha$  forest cross-correlation from BOSS DR11: baryon acoustic oscillations. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2014, no. 05, id 027. [arXiv:1311.1767](#)
- [23] Alam S. et al. The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: cosmological analysis of the DR12 galaxy sample. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2017, vol. 470(3), pp. 2617–2652. [arXiv:1607.03155](#)
- [24] Wang Y. et al. The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: tomographic BAO analysis of DR12 combined sample in configuration space. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2017, vol. 469(3), pp. 3762–3774. [arXiv:1607.03154](#)
- [25] Bautista J.E. et al. Measurement of baryon acoustic oscillation correlations at  $z = 2.3$  with SDSS DR12 Ly $\alpha$ -Forests. *Astronomy and Astrophysics*, 2017, vol. 603, id A12. 23 p. [arXiv:1702.00176](#)

- [26] Delubac T. et al. Baryon acoustic oscillations in the Ly $\alpha$  forest of BOSS DR11 quasars. *Astronomy and Astrophysics*, 2015, vol. 574, id A59. 17 p. [arXiv:1404.1801](#)
- [27] Sharov G.S., Vorontsova E.G. Cosmological model with generalized Chaplygin gas and recent astronomical observations. *Vestnik TsvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2014, no. 1, pp. 21–38. (in Russian)
- [28] Clifton T., Ferreira P.G., Padilla A., Skordis C. Modified Gravity and Cosmology. *Physics Reports*, 2012, vol. 513(1), pp. 1–189. [arXiv:1106.2476](#)
- [29] Bamba K., Capozziello S., Nojiri S., Odintsov S.D. Dark energy cosmology: the equivalent description via different theoretical models and cosmography tests. *Astrophysics and Space Science*, 2012, vol. 342(1), pp. 155–228. [arXiv:1205.3421](#)
- [30] Chimento L.P. Linear and nonlinear interactions in the dark sector. *Physical Review D*, 2010, vol. 81(4), id 043525. [arXiv:0911.5687](#)
- [31] Pan S., Bhattacharya S., Chakraborty S. An analytic model for interacting dark energy and its observational constraints. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2015, vol. 452(3), pp. 3038–3046. [arXiv:1210.0396](#)
- [32] Caldwell R.R. A Phantom Menace? Cosmological consequences of a dark energy component with super-negative equation of state. *Physics Letters B*, 2002, vol. 545(1-2), pp. 23–29. [arXiv:astro-ph/9908168](#)
- [33] Sharov G.S., Vorontsova E.G. Parameters of cosmological models and recent astronomical observations. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2014, no. 10, id 057. [arXiv:1407.5405](#)
- [34] Vorontsova E.G., Sharov G.S. Recent estimations of astrophysical parameters and forecast of the model with modified Chaplygin gas. *Vestnik TsvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2015, no. 2, pp. 7–23. (in Russian)
- [35] Suzuki N. et al. The Hubble Space Telescope Cluster Supernova Survey. V. Improving the Dark-energy Constraints above  $z > 1$  and Building an Early-type-hosted Supernova Sample. *The Astrophysical Journal*, 2012, vol. 746(1), id 85. 24 p. [arXiv:1105.3470](#). URL: <http://supernova.lbl.gov/Union/>
- [36] Sharov G.S. Observational constraints on cosmological models with Chaplygin gas and quadratic equation of state. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2016, no. 06, id 023. [arXiv:1506.05246](#)
- [37] Sharov G.S. et al. A new interacting two fluid model and its consequences. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2017, vol. 466(3), pp. 3497–3506. [arXiv:1701.00780](#)
- [38] Pan S, Sharov G.S. A model with interaction of dark components and recent observational data. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2017, vol. 472(4), pp. 4736–4749. [arXiv:1609.02287](#)

- 
- [39] Odintsov S.D., Saez-Gomez D., Sharov G.S. Is exponential gravity a viable description for the whole cosmological history? *The European Physical Journal C - Particles and Fields*, 2017, vol. 77(12), id 862. [arXiv:1709.06800](#)
- [40] Percival W.J. et al. Baryon acoustic scillations in the Sloan Digital Sky Survey Data Release 7 galaxy sample. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2010, vol. 401(4), pp. 2148–2168. [arXiv:0907.1660](#)
- [41] Blake C. et al. The WiggleZ dark energy survey: mapping the distance redshift relation with baryon acoustic oscillations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2011, vol. 418(3), pp. 1707–1724. [arXiv:1108.2635](#)