УДК 519.6

О СОВМЕСТНОМ ПРЕДЕЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЦЕНТРАЛЬНЫХ И ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ПОРЯДКОВЫХ СТАТИСТИК

Пагурова В.И.*, **Чижикова Н.С.****
* МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва
** Московский государственный педагогический университет, г. Москва

Поступила в редакцию 12.12.2017, после переработки 09.01.2018.

Исследуется совместное асимптотическое распределение центральных и промежуточных порядковых статистик, построенных по независимой выборке, при неограниченном росте объема выборки. Указаны асимптотические представления для дисперсий и ковариаций.

Ключевые слова: центральные порядковые статистики, промежуточные порядковые статистики, многомерное нормальное распределение, слабая сходимость.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 2. С. 75–83.
https://doi.org/10.26456/vtpmk491

Введение

Порядковые статистики являются объектом многочисленных исследований в математической статистике. Огромное число применений порядковых статистик стимулирует их дальнейшее исследование. Порядковые статистики, например, применяются при исследовании наводнений, засух, прочности материалов на разрыв, усталости материалов, контроля качества, обнаружения аномальных наблюдений. Настоящая статья посвящена исследованию асимптотических свойств порядковых статистик с ростом объема выборки, по которой строятся статистики.

Пусть независимые одинаково распределенные случайные величины $X_1, ..., X_n$ определены на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Предполагается, что функция распределения $F(x) = \mathbf{P}\{X_1 \le x\}$ имеет производную $f(x) = F'(x)$, $-\infty < x < \infty$. Построим вариационный ряд $X_1^{(n)} \le, ..., \le X_n^{(n)}$ по случайным величинам $X_1, ..., X_n$. Пусть даны числа $0 < t_1 < \cdots < t_m, t_{m+2} > \cdots > t_{m+l+1} > 0$, $0 < \alpha < 1, 0 < p < 1$. Обозначим $[x]$ целую часть любого вещественного числа $x, n_i = [t_i n^\alpha], i = 1, ..., m, n_{m+1} = [np] + 1, F(\zeta) = p$, $n_j = [n - t_j n^\alpha + 1]$, $j = m+2, ..., m+l+1$. Ниже будут исследованы асимптотические свойства компонент случайного вектора $(X_{n_1}^{(n)}, ..., X_{n_m}^{(n)}, X_{n_{m+1}}^{(n)}, ..., X_{n_{m+l+1}}^{(n)})$ при $n \to \infty$.

Введем

$$\lambda_{k,n} = k/n, k = k(n) \to \infty, \lambda_{k,n} \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{1}$$

В работах [1,2] указаны необходимые и достаточные условия асимптотической нормальности при $n \to \infty$ статистики $T_n = (X_k^{(n)} - d_n)/c_n$ при некоторых $c_n > 0$ и d_n , указаны правила нахождения величин c_n и d_n. В работах [3,4] показано, что при условии (1) возможными предельными распределениями при $n \to \infty$ статистики T_n являются нормальное и логнормальное распределения.

Совместное асимптотическое распределение при $n \to \infty$ центральных порядковых статистик ранга $[n\lambda_i]+1, i = 1, ..., m, 0 < \lambda_1 < ..., \lambda_m < 1$ рассмотрено в работе [5]. Предельное распределение процесса $V_k^{(n)}(t) = (X_{n-kt}^{(n)} - \beta_{kt}^{(n)})/\alpha_{kt}^{(n)}$, где k определяется соотношениями (1), а параметр t не зависит от n, исследуется в работе [6]. В работе [7] исследуется предельное распределение промежуточных порядковых статистик, когда исходные величины $X_1, ..., X_n$ удовлетворяют некоторым общим условиям зависимости. В работе [8] рассмотрено предельное распределение промежуточных порядковых статистик, построенных по выборке случайного объема.

1. Основной результат

Введем величины $d_{n,i}$ и $b_{n,j}$, которые определяются из соотношений

$$F(d_{n,i}) = t_i/n^{1-\alpha}, i = 1, ..., m, F(b_{n,j}) = 1 - t_j/n^{1-\alpha}, j = m+2, ..., m+l+1.$$

Основной результат настоящей статьи составляет следующая

Теорема 1. *Предположим, что функция $f(x)$ дифференцируема в окрестности точек $d_{n,i}$, $f(d_{n,i}) \neq 0, i = 1, ..., m, \zeta, b_{n,j}, f(b_{n,j}) \neq 0, j = m+2, ..., m+l+1$. Потребуем также выполнение условий*

$$\lim_{n\to\infty} n^{1-\alpha/2} f(d_{n,1}) \neq 0, \lim_{n\to\infty} n^{1-\alpha/2} f(b_{n,m+2}) \neq 0.$$

Тогда для любого $\zeta, f(\zeta) \neq 0$, совместное распределение случайных величин

$$X_{n_1}^{(n)} - d_{n,1}, ..., X_{n_m}^{(n)} - d_{n,m}, X_{n_{m+1}}^{(n)} - \zeta, X_{n_{m+2}}^{(n)} - b_{n,m+2}, ..., X_{n_{m+l+1}}^{(n)} - b_{n,m+l+1}$$

при $n \to \infty$ сходится к $(m+l+1)$ – мерному нормальному распределению с вектором нулевых математических ожиданий, дисперсиями и ковариациями, которые асимптотически имеют вид

$$cov(X_{n_i}^{(n)}, X_{n_j}^{(n)}) = t_i/(n^{2-\alpha} f(d_{n,i}) f(d_{n,j})), i, j = 1, ...m, i \le j,$$
$$cov(X_{n_i}^{(n)}, X_{n_j}^{(n)}) = t_i/(n^{2-\alpha} f(b_{n,i}) f(b_{n,j})), i, j = m+2, ..., m+l+1, j \le i,$$
$$cov(X_{n_i}^{(n)}, X_{n_{m+1}}^{(n)}) = t_i(1-p)/(n^{2-\alpha} f(d_{n,i}) f(\zeta)), i = 1, ..., m,$$
$$cov(X_{n_j}^{(n)}, X_{n_{m+1}}^{(n)}) = t_j p/(n^{2-\alpha} f(b_{n,j}) f(\zeta)),\ j = m+2, ..., m+l+1,$$
$$cov(X_{n_i}^{(n)}, X_{n_j}^{(n)}) = t_i t_j/(n^{3-2\alpha} f(d_{n,i}) f(b_{n,j})),\ i = 1, ...m, j = m+2, ...m+l+1,$$
$$\mathbf{D}X_{n_{m+1}}^{(n)} = p(1-p)/(nf^2(\zeta)).$$

Сначала теорема будет доказана в предположении, что случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ имеют равномерное распределение на отрезке $(0,1)$. Далее будет показано, как с помощью хорошо известного приема из этого частного случая следует общий случай.

2. Случай равномерного распределения

Докажем теорему 1 для случая равномерного распределения на отрезке $(0,1)$.

Доказательство. Совместная плотность распределения величин $X_{n_i}^{(n)}, i=1,...,m+l+1,$ имеет следующий вид [9]

$$h(x_1,...,x_{m+l+1}) = Cx_1^{n_1-1}\prod_{i=2}^{m+l+1}(x_i-x_{i-1})^{n_i-n_{i-1}-1}(1-x_{m+l+1})^{n-n_{m+l+1}},$$

где C — общее обозначение для постоянной. Введем вектор $(Y_1,...,Y_{m+l+1})$, компоненты которого связаны с компонентами вектора $(X_{n_1}^{(n)},...,X_{n_{m+l+1}}^{(n)})$ следующим образом

$$\begin{aligned} &X_{n_i}^{(n)} = t_i/n^{1-\alpha} + \sqrt{t_i}Y_i/n^{1-\alpha/2}, i=1,...,m,\ X_{n_{m+1}}^{(n)} = p+\sqrt{p(1-p)}Y_{m+1}/\sqrt{n},\\ &X_{n_j}^{(n)} = 1-t_j/n^{1-\alpha} + \sqrt{t_j}Y_j/n^{1-\alpha/2}, j=m+2,...,m+l+1. \end{aligned} \tag{2}$$

После этого в выражении для $h(x_1,...,x_{m+l+1})$ сделаем замену переменных

$$\begin{aligned} &x_i = t_i/n^{1-\alpha}+\sqrt{t_i}y_i/n^{1-\alpha/2},\ i=1,...,m,\ x_{m+1}=p+\sqrt{p\,(1-p)}y_{m+1}/\sqrt{n},\\ &x_j = 1-t_j/n^{1-\alpha}+\sqrt{t_j}y_j/n^{1-\alpha/2},\ j=m+2,...,m+l+1. \end{aligned}$$

При указанной замене переменных функция $h(x_1,\ldots,x_{m+l+1})$ преобразуется к следующему виду

$$h(x_1,...,x_{m+l+1}) = CD_1D_2D_3D_4,$$

где сомножители D_1,D_2,D_3,D_4 записаны в удобном для последующего исследования виде

$$D_1 = \left(1+\frac{y_1}{\sqrt{t_1}n^{\alpha/2}}\right)^{t_1n^{\alpha/2}-1}\prod_{i=2}^{m}\left(1+\frac{\sqrt{t_i}y_i-\sqrt{t_{i-1}}y_{i-1}}{(t_i-t_{i-1})n^{\alpha/2}}\right)^{(t_i-t_{i-1})n^{\alpha}-1},$$

$$D_2 = \left(1+\frac{\sqrt{p\,(1-p)}\sqrt{n}y_{m+1}}{(np-n^{\alpha}t_m)}-\frac{n^{\alpha/2}\sqrt{t_m}y_m}{np-n^{\alpha}t_m}\right)^{np-n^{\alpha}t_m+1},$$

$$D_3 = \left(1+\frac{n^{\alpha/2}\sqrt{t_{m+2}}y_{m+2}}{n(1-p)-n^{\alpha}t_{m+2}}-\frac{\sqrt{p\,(1-p)}\sqrt{n}y_{m+1}}{n(1-p)-n^{\alpha}t_{m+2}}\right)^{n(1-p)-n^{\alpha}t_{m+2}-1},$$

$$D_4 = \prod_{i=m+3}^{m+l+1}\left(1+\frac{\sqrt{t_i}y_i-\sqrt{t_{i-1}}y_{i-1}}{(t_{i-1}-t_i)n^{\alpha/2}}\right)^{(t_{i-1}-t_i)n^{\alpha}-1}\left(1-\frac{y_{m+l+1}}{\sqrt{t_{m+l+1}}n^{\alpha/2}}\right)^{t_{m+l+1}n^{\alpha}-1}.$$

Найдем совместное асимптотическое распределение при $n\to\infty$ компонент вектора $(Y_1,...,Y_{m+l+1}), m\geq 2, l\geq 2$. Удобнее вместо функции $h(x_1,\ldots,x_{m+l+1})$ исследовать ее логарифм

$$\begin{aligned} &-2(\ln h(x_1,...,x_{m+l+1})+C) = -2\ln D_1-2\ln D_2-2\ln D_3-2\ln D_4 =\\ &\qquad = y_1^2\frac{t_2}{(t_2-t_1)}+\sum_{i=2}^{m-1}y_i^2\frac{t_i(t_{i+1}-t_{i-1})}{(t_i-t_{i-1})(t_{i+1}-t_i)}+y_m^2\frac{t_m}{(t_m-t_{m-1})}+y_{m+1}^2+ \end{aligned}$$

$$+ y_{m+2}^2 \frac{t_{m+2}}{(t_{m+2}-t_{m+3})} + \sum_{i=m+3}^{m+l} y_i^2 \frac{t_i(t_{i-1}-t_{i+1})}{(t_{i-1}-t_i)(t_i-t_{i+1})} + y_{m+l+1}^2 \frac{t_{m+l}}{(t_{m+l}-t_{m+l+1})} -$$
$$-2\sum_{i=1}^{m-1} y_i y_{i+1} \frac{\sqrt{t_i t_{i+1}}}{(t_{i+1}-t_i)} - 2\sqrt{\frac{1-p}{p}}\,\frac{\sqrt{t_m}}{n^{(1-\alpha)/2}} y_m y_{m+1} - 2\sqrt{\frac{p}{1-p}}\,\frac{\sqrt{t_{m+2}}}{n^{(1-\alpha)/2}} y_{m+1} y_{m+2} -$$
$$-2\sum_{i=m+2}^{m+l} y_i y_{i+1} \frac{\sqrt{t_i t_{i+1}}}{(t_i - t_{i+1})} + O\left(\max\left(\frac{1}{n^{\alpha/2}}, \frac{1}{n^{1-\alpha}}\right)\right). \quad (3)$$

Заметим, что при $m = 2$ исчезает первая сумма, а при $l = 2$ исчезает вторая сумма в (3)). Матрица $A = (A_{ij})$ коэффициентов квадратичной формы в соотношении (3) имеет вид (указаны главные члены асимптотических представлений элементов матрицы A):

$$A_{11} = \frac{t_2}{t_2 - t_1}, A_{ii} = \frac{t_i(t_{i+1}-t_{i-1})}{(t_i - t_{i-1})(t_{i+1}-t_i)}, i = 2, ..., m-1, A_{mm} = \frac{t_m}{t_m - t_{m-1}},$$
$$A_{m+1,m+1} = 1, A_{m+2,m+2} = \frac{t_{m+2}}{t_{m+2}-t_{m+3}}, A_{ii} = \frac{t_i(t_{i-1}-t_{i+1})}{(t_{i-1}-t_i)(t_i - t_{i+1})},$$
$$i = m+3, ..., m+l, A_{m+l+1,m+l+1} = \frac{t_{m+l}}{t_{m+l}-t_{m+l+1}}, A_{i,i+1} = A_{i+1,i} = -\frac{\sqrt{t_i t_{i+1}}}{(t_{i+1}-t_i)},$$
$$i = 1, ..., m-1, A_{m,m+1} = A_{m+1,m} = -\sqrt{\frac{1-p}{p}}\,\frac{\sqrt{t_m}}{n^{(1-\alpha)/2}},$$
$$A_{m+1,m+2} = A_{m+2,m+1} = -\sqrt{\frac{p}{1-p}}\,\frac{\sqrt{t_{m+2}}}{n^{(1-\alpha)/2}},$$
$$A_{i+2,i+3} = A_{i+3,i+2} = -\frac{\sqrt{t_{i+2}t_{i+3}}}{(t_{i+2}-t_{i+3})}, \ i = m, ..., m+l-2,$$
$$A_{ij} = 0 \text{ при } |i-j| > 1.$$

Вычисления показывают, что определитель матрицы A, которая получается в результате предельного перехода при $n \to \infty$, равен

$$|A| = \left(\prod_{i=2}^{m} t_i \prod_{j=m+2}^{m+l} t_j\right) \Big/ \left(\prod_{i=2}^{m}(t_i - t_{i-1}) \prod_{j=m+2}^{m+l}(t_j - t_{j+1})\right) > 0.$$

Он положителен и, следовательно, матрица A положительно определена. Это доказывает, что предельным распределением случайного вектора $(Y_1, ..., Y_{m+l+1})$ является $(m+l+1)$-мерное нормальное распределение с вектором нулевых математических ожиданий и ковариационной матрицей, обратной к матрице A. Чтобы избежать утомительных вычислений, мы не будем обращать матрицу A, а вычислим ковариации величин Y_i и Y_j, используя их двумерное распределение. В результате получим, что при $n \to \infty$ предельным распределением вектора $(Y_1, ..., Y_{m+l+1})$ является $(m+l+1)$-мерное нормальное распределение с вектором нулевых математических ожиданий, единичными дисперсиями и ковариациями, асимптотически имеющими вид

$$\begin{aligned}
&\operatorname{cov}(Y_i, Y_j) = \sqrt{t_i/t_j},\ 0 < t_i \le t_j, i, j = 1, ..., m,\\
&\operatorname{cov}(Y_i, Y_j) = \sqrt{t_i t_j}/n^{1-\alpha}, i = 1, ..., m, j = m+2, ..., m+l+1,\\
&\operatorname{cov}(Y_i, Y_j) = \sqrt{t_j/t_i}, 0 < t_j \le t_i, i, j = m+2, ..., m+l+1,\\
&\operatorname{cov}(Y_i, Y_{m+1}) = \sqrt{(1-p)/p}\,\sqrt{t_i}/n^{(1-\alpha)/2}, i = 1, ..., m,\\
&\operatorname{cov}(Y_i, Y_{m+1}) = \sqrt{p/(1-p)}\,\sqrt{t_i}/n^{(1-\alpha)/2}, i = m+2, ..., m+l+1.
\end{aligned}$$

Учитывая соотношения (2), получим, что предельное при $n \to \infty$ совместное распределение случайных величин

$$X^{(n)}_{n_1} - \frac{t_1}{n^{1-\alpha}}, ..., X^{(n)}_{n_m} - \frac{t_m}{n^{1-\alpha}}, X^{(n)}_{n_{m+1}} - p, X^{(n)}_{n_{m+2}} + \frac{t_{m+2}}{n^{1-\alpha}} - 1, ..., X^{(n)}_{n_{m+l+1}} + \frac{t_{m+l+1}}{n^{1-\alpha}} - 1$$

является $(m+l+1)$-мерным нормальным распределением с нулевым вектором математических ожиданий, дисперсиями и ковариациями, асимптотически имеющими вид

$$\begin{aligned}
&\operatorname{cov}(X^{(n)}_{n_i}, X^{(n)}_{n_j}) = t_i/n^{2-\alpha}, 0 < t_i \le t_j, i, j = 1, ..., m,\\
&\operatorname{cov}(X^{(n)}_{n_i}, X^{(n)}_{n_{m+1}}) = t_i(1-p)/n^{2-\alpha}, i = 1, ..., m,\\
&\operatorname{cov}(X^{(n)}_{n_i}, X^{(n)}_{n_j}) = t_i t_j/n^{3-2\alpha}, i = 1, ..., m, j = m+2, ..., m+l+1,\\
&\operatorname{cov}(X^{(n)}_{n_i}, X^{(n)}_{n_j}) = t_j/n^{2-\alpha},\ 0 < t_j \le t_i, i, j = m+2, ..., m+l+1,\\
&\operatorname{cov}(X^{(n)}_{n_i}, X^{(n)}_{n_{m+1}}) = t_i p/n^{2-\alpha}, i = m+2, ..., m+l+1,\\
&\mathbf{D}X^{(n)}_{n_{m+1}} = p(1-p)/n.
\end{aligned} \tag{4}$$

Теорема доказана в предположении, что случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ равномерно распределены на отрезке (0,1). $\square$

3. Общий случай

Для доказательства теоремы в общем случае нам понадобится следующая

Лемма 1 (см. [9]). *Если случайные величины $Z_{n,i}, i = 1, ..., m$, имеют асимптотически m-мерное нормальное распределение с математическими ожиданиями $\mu_{n,i}$, дисперсиями $\sigma^2_{n,i}$, $\sigma^2_{n,i} \to 0$ при $n \to \infty$, ковариациями $\rho_{i,j}\sigma_{n,i}\sigma_{n,j}$, и если $g_i(Z_{n,i})$ — однозначные функции с не равными нулю в некоторых окрестностях точек $Z_{n,i} = \mu_{n,i}$ и непрерывными производными $g'_i(Z_{n,i})$, то сами $g_i(Z_{n,i})$ асимптотически имеют m-мерное нормальное распределение с математическими ожиданиями $g_i(\mu_{n,i})$ и ковариациями $\rho_{i,j}\sigma_{n,i}\sigma_{n,j}g'_i(\mu_{n,i})g'_j(\mu_{n,j})$.*

Теперь докажем теорему 1 в общем случае.

Доказательство. Полагая $Z_{n,i} = X^{(n)}_{n_i}$,

$$\mu_{n,i} = \begin{cases} t_i/n^{1-\alpha} \text{ при } i = 1,...,m, \\ p \text{ при } i = m+1, \\ 1 - t_i/n^{1-\alpha} \text{ при } i = m+2,...,m+l+1, \end{cases}$$

$\rho_{ij}\sigma_{n,i}\sigma_{n,j}$ определяются из соотношений (4), преобразование $g_i(X^{(n)}_{n_i}) = F^{-1}(X^{(n)}_{n_i})$ удовлетворяет условиям леммы, $g_i(\mu_{n,i}) = F^{-1}(\mu_{n,i})$,

$$g'_i(\mu_{n,i}) = \frac{dg_i(\mu_{n,i})}{d\mu_{n,i}} = \frac{1}{f(\mathbf{E}g_i(X^{(n)}_{n_i}))}, i = 1,...,m+l+1.$$

Тогда в условиях теоремы случайные величины $g(X^{(n)}_{n_i})$ асимптотически имеют $(m+l+1)$-мерное нормальное распределение с математическими ожиданиями

$$\mathbf{E}g_i(X^{(n)}_{n_i}) = \begin{cases} d_{n,i} \text{ при } i = 1,...,m, \\ \zeta \text{ при } i = m+1, \\ b_{n,i} \text{ при } i = m+2,...,m+l+1 \end{cases} \quad (5)$$

и ковариациями $\mathrm{cov}(g_i(X^{(n)}_{n_i}), g_j(X^{(n)}_{n_j}))$, которые получаются из ковариаций $\mathrm{cov}(X^{(n)}_{n_i}, X^{(n)}_{n_j})$ в случае равномерного распределения на отрезке (0,1) следующим образом

$$\mathrm{cov}(g_i(X^{(n)}_{n_i}), g_j(X^{(n)}_{n_j})) = \mathrm{cov}(X^{(n)}_{n_i}, X^{(n)}_{n_j})/(f(\mathbf{E}g_i(X^{(n)}_{n_i}))f(\mathbf{E}g_j(X^{(n)}_{n_j}))),$$

$i, j = 1,...,m+l+1$. Преобразуем последнее выражение, используя соотношения (4) и (5), после чего получим значения для ковариаций, указанные в формулировке теоремы. □

Заключение

Исследуется совместное асимптотическое распределение центральных и промежуточных порядковых статистик, когда объем выборки безгранично возрастает. Даются главные члены асимптотических представлений для математических ожиданий и ковариаций.

Авторы благодарят проф. Круглова В.М. за ценные замечания.

Список литературы

[1] Смирнов Н.В. Предельные законы распределения для членов вариационного ряда // Труды Математического Института им. В.А. Стеклова АН СССР. 1949. Т. 25. С. 5–59.

[2] Смирнов Н.В. О сходимости к нормальному закону распределений членов вариационного ряда // Известия АН Уз СССР. 1966. Т. 3. С. 24–32.

[3] Чибисов Д.М. О предельных распределениях для членов вариационного ряда // Теория вероятностей и ее применения. 1964. Т. 9, № 1. С. 159–163.

[4] Wu C. The types of limit distributions for some terms of variational series // Science Sinica. 1966. Vol. 15. Pp. 749–762.

[5] Mosteller F. On some useful «inefficient» statistics // Annals of Mathematical Statistics. 1946. Vol. 17. Pp. 377–408.

[6] Cooil B. Limiting multivariate distributions of intermediate order statistics // Annals of Probability. 1985. Vol. 13, № 2. Pp. 469–477.

[7] Watts V., Rootsen H., Leadbetter M. On limiting distributions of intermediate order statistics from stationary sequences // Annals of Probability. 1982. Vol. 10. Pp. 653–662.

[8] Пагурова В.И. О предельном распределении порядковых статистик в выборке случайного объема // Вестник Московского университета. Сер. 15: Вычислительная математика и кибернетика. 2016. № 4. С. 16–19.

[9] Дэйвид Г. Порядковые статистики. М.: Наука, 1979. 335 с.

Образец цитирования

Пагурова В.И., Чижикова Н.С. О совместном предельном распределении центральных и промежуточных порядковых статистик // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 2. С. 75–83. https://doi.org/10.26456/vtpmk491

Сведения об авторах

1. **Пагурова Вера Игнатьевна**
старший научный сотрудник кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Вробьевы горы, МГУ им. М.В.Ломоносова. E-mail: pagurova@yandex.ru

2. **Чижикова Наталья Сергеевна**
магистр факультета социальной педагогики и психологии Московского государственного педагогического университета.

Россия, 119991, г. Москва, мал. Сухаревский пер., д. 6, МГПУ. E-mail: natka92100@mail.ru

ON THE JOINT LIMITING DISTRIBUTION OF CENTRAL AND INTERMEDIATE ORDER STATISTICS

Pagurova Vera Ignatievna
Higher scientific researcher at Mathematical Statistics faculty,
Lomonosov Moscow State University
Russia, 119992, Moscow, GSP-1, Vorobyovi gory, Lomonosov MSU.
E-mail: pagurova@yandex.ru

Chizikova Natalia Sergeevna
Master student at Social Pedagogics and Psychology faculty,
Moscow State Pedagogical University
Russia, 119991, Moscow, mal. Suharevsky per., 6, MSPU.
E-mail: natka92100@mail.ru

Received 12.12.2017, revised 09.01.2018.

We consider the joint asymptotic distribution of central and intermediate order statistics when a sample size tends to infinity. Asymptotic representations for expectations and covariances are given.

Keywords: central order statistics, intermediate order statistics, multivariate Gaussian distribution, weak convergence.

Citation

Pagurova V.I., Chizikova N.S. On the joint limiting distribution of central and intermediate order statistics. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2018, no. 2, pp. 75–83. (in Russian). https://doi.org/10.26456/vtpmk491

References

[1] Smirnov N.V. Limiting distributions for order statistics. *Trudy of Steklov MIAN* [Proceedings of Steklov Mathematical Institute], 1949, vol. 25, pp. 5–59. (in Russian)

[2] Smirnov N.V. On the convergence to a Gaussian law for distributions of order statistics. *Izvestiya Akademii Nauk Uzbekskoy SSR* [Proceedings of Academy of Sciences of Uzbek SSR], 1966, vol. 3, pp. 24–32. (in Russian)

[3] Chibisov D.M. On limit distributions for order statistics. *Teoriya Veroyatnostei i ee Primeneniya* [Probability Theory and its Applications], 1964, vol. 9(1), pp. 159–163. (in Russian)

[4] Wu C. The types of limit distributions for some terms of variational series. *Science Sinica*, 1959, vol. 1(1), pp. 106–112.

[5] Mosteller F. On some useful «inefficient» statistics. *Annals of Mathematical Statistics*, 1946, vol. 17, pp. 377–408.

[6] Cooil B. Limiting multivariate distributions of intermediate order statistics. *Annals of Probability*, 1985, vol. 13(2), pp. 469–477.

[7] Watts V., Rootsen H., Leadbetter M. On limiting distributions of intermediate order statistics from stationary sequences. *Annals of Probability*, 1982, vol. 10, pp. 653–662.

[8] Pagurova V.I. On limiting distributions of order statistics based on the sample with a random size. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 15: Vychislitel'naya Matematika i Kibernetika* [Bulletin of Moscow University. Series 15: Computational Mathematics and Cybernetics], 2016, no. 4, pp. 16–19. (in Russian)

[9] David G. *Poriyadkovuye Statistiki* [Order Statistics]. FizMatLit Publ., Nauka, Moscow, 1979. 335 p. (in Russian)