УДК 519.8

ОБ УТОЧНЕНИИ МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВОЗМОЖНОСТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ОДНОГО КЛАССА ПРИ Tw-СВЯЗАННЫХ ПАРАМЕТРАХ

Солдатенко И.С.
Кафедра информационных технологий

Поступила в редакцию 24.02.2016, после переработки 01.03.2016.

В работе развиваются и уточняются результаты, полученные в [1–3], где построен и исследован непрямой метод решения задачи возможностной оптимизации в модели максимизации уровня достижения нечеткой цели в контексте слабейшей t-нормы, когда параметры задач описываются параметризованными нечеткими величинами (L,R)-типа. В указанных работах при нахождении функции распределения взвешенных сумм, участвующих в построении критерия и ограничений, предполагается, что параметры являются T_W-связанными. Однако в ходе построения эквивалентного детерминированного аналога осуществляется неявная замена возможностного пространства, в результате чего сами суммы и свободные члены задачи оптимизации становятся минисвязанными. В настоящей работе указанная модель возможностной оптимизации исследуется полностью в контексте слабейшей t-нормы. На конкретном числовом примере проводится сравнительный анализ результатов решения задачи в четырех случаях: в «четком» контексте, в контексте минисвязанности, T_W-связанности и в двойственном контексте T_W-T_M, основанном на замене модельного множества в ходе решения.

Ключевые слова: возможностная оптимизация, t-норма, агрегирование нечеткой информации, слабейшая треугольная норма, распределения (L,R)-типа, непрямой метод.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 1. С. 13–32.

Введение

Возможностная оптимизация занимается исследованием оптимизационных задач, в которых числовые параметры являются нечеткими величинами. Говорят, что в этом случае задача погружена в контекст неопределенности возможностного типа [4–6].

В работах [7, 8] хорошо изучены методы построения различных моделей задач возможностной оптимизации и их решение в том случае, когда параметры соответствующих задач являются минисвязанными (невзаимодействующими). Минисвязанность нечетких величин – это своего рода аналог независимости случайных величин в теории вероятностей.

В настоящее время актуальной является задача исследования моделей и методов решения оптимизационных задач в том случае, когда параметры являются взаимодействующими. Взаимодействие (взаимная связанность) возможностных величин моделируется при помощи аппарата треугольных норм, используемого в определении их совместной функции распределения возможностей.

Одним из способов интерпретации взаимодействия, описываемого с помощью t-норм, является агрегирование нечеткой информации. Предположим, мы имеем n нечетких величин, которые необходимы для решения некоторой задачи возможностной оптимизации и заданы своими функциями распределения. Непосредственно перед тем, как приступить к решению задачи, мы должны ввести дополнительное условие, описывающее их взаимодействие (T-связанность, где T – треугольная норма). Например, при $T = \min$ мы получаем минисвязанные нечеткие величины, а при слабейшей t-норме – T_W-связанные. Введение этого условия осуществляется путем (неявного) конструирования модельного множества, в рамках которого в дальнейшем решается оптимизационная задача. В работе [9], в частности, приведен пример, как можно явно сконструировать модельное множество по совокупности заранее заданных нечетких величин, в котором все эти величины будут удовлетворять нужному свойству взаимной связанности. В данном случае треугольная норма используется в качестве механизма агрегирования нечеткой информации, осуществляемого совместной функцией распределения возможностей n нечетких величин, используемой при построении модельного множества с заданными характеристиками.

В дальнейшем заложенное в условии задачи взаимодействие ее параметров играет существенную роль при ее решении. Уже при построении исчисления возможностей, используемого, в частности, для нахождения функции распределения взвешенной суммы нечетких величин, мы получаем принципиально разные результаты (см., например, [8] – для минисвязанности и [10] – для взаимной T_W-связанности параметров), которые приводят к различным методам решения поставленных задач.

В настоящей работе развиваются и уточняются результаты, полученные в [1–3], где построен и исследован непрямой метод решения задачи возможностной оптимизации в модели максимизации уровня достижения нечеткой цели в контексте слабейшей t-нормы, когда параметры задач описываются параметризованными нечеткими числами (L,R)-типа. В основу исследуемых нами оптимизационнных моделей положены линейные возможностные функции. Например, i-тое ограничение задачи выглядит следующим образом:

$$\pi\{f_i'(x,\gamma) = b_i(\gamma)\} \geq \alpha_i, \quad \text{где } f_i'(x,\gamma) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\gamma)x_j. \tag{1}$$

В указанных выше работах при нахождении функции распределения $f_i'(x,\gamma)$ предполагается, что параметры оптимизационной задачи $a_{ij}(\gamma)$ являются взимно T_W-связанными нечеткими величинами. Однако затем, при переходе от (1) к системе детерминированных неравенств (что составляет суть непрямого метода решения задачи возможностной оптимизации – переход от возможностной задачи к эквивалентному детерминированному аналогу и решение уже его) осуществляется неявная замена возможностного пространства, в результате чего нечеткие величины $f_i'(x,\gamma)$ и $b_i(\gamma)$ становятся минисвязанными. Таким образом, описанный в [1] непрямой метод основан на замене возможностного пространства непосредственно в процессе решения задачи.

В настоящей работе указанная модель задачи возможностной оптимизации решается для нечетких чисел, характеризующихся строго унимодальными функциями распределения, полностью в контексте слабейшей t-нормы. На конкретном числовом примере проводится сравнительный анализ результатов решения задачи в четырех случаях: в «четком» контексте, в контексте минисвязанности, T_W-связанности и в двойственном контексте T_W-T_M, основанном на замене возможностного пространства в ходе решения.

В первом разделе статьи вводятся необходимые определения и понятия из теории возможностей. Дано определение нечетких величин в общем случае, а также величин параметризованного класса (L,R)-типа.

Во втором разделе описывается задействованный аппарат треугольных норм, а также приводится определение взаимной T-связанности нечетких величин.

Третий раздел работы содержит описание основных результатов – постановку задачи уровневой возможностной оптимизации и полученный непрямой метод ее решения для взаимно T_W-связанных параметров.

В четвертом разделе полученные результаты проиллюстрированы на числовом примере, а также приведен сравнительный анализ решения исследуемой задачи оптимизации в четырех описанных выше случаях.

1. Основные элементы теории возможностей

Для начала введем необходимые нам в дальнейшем определения и понятия из теории возможностей [7, 8, 11–13].

Пусть Γ – модельное пространство, $\gamma \in \Gamma$ – его элементы, а $\mathbb{P}(\Gamma)$ – множество всех подмножеств множества Γ.

Определение 1. *Возможностная мера $\pi : \Gamma \to E^1$ – есть функция множества, обладающая следующими свойствами:*

1. $\pi(\oslash) = 0,\ \pi(\Gamma) = 1,$
2. $\pi\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right) = \sup\limits_{i\in I} \pi(A_i), \forall A_i \in \mathbb{P}(\Gamma), \forall I.$

Определение 2. *Тройка $(\Gamma, \mathbb{P}(\Gamma), \pi)$ называется возможностным пространством.*

Определение 3. *Возможностной (нечеткой) величиной называется вещественная функция*

$$A(\cdot) : \Gamma \to \mathbb{E}^1,$$

характеризующаяся распределением возможностей $\mu_A(x)$*:*

$$\mu_A(x) = \pi\{\gamma \in \Gamma : A(\gamma) = x\}, \forall x \in \mathbb{E}^1,$$

где $\mu_A(x)$ *— возможность того, что* A *может принять значение* x*.*

Мы будем обозначать возможностные величины как $A(\gamma)$ или $a(\gamma)$. Если из контекста следует, что речь идет о нечеткой величине, то параметр γ может опускаться.

Определение 4. *Носителем возможностной величины* A *называется четкое подмножество:*

$$supp(A) = \{x \mid \mu_A(x) > 0\}, x \in \mathbb{E}^1.$$

Определение 5. *Модальным множеством возможностной величины* A *называется следующее четкое подмножество:*

$$\{x \mid \mu_A(x) = 1\}, x \in \mathbb{E}^1.$$

Определение 6. *Для любой возможностной переменной* A *и любого* $\alpha \in [0,1]$, α*-уровневым множеством* $A(\alpha)$ *называется:*

- $A(\alpha) = \{x \in \mathbb{E}^1 \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}$, *для* $\alpha \in (0,1]$,

- $A(\alpha) = cl(supp(A))$, *для* $\alpha = 0$,

где $cl(supp(A))$ *— замыкание носителя возможностной переменной* A*.*

Определение 7. *Возможностная переменная* A *называется выпуклой, если ее функция распределения является квазивогнутой:*

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}, \lambda \in [0,1], x_1, x_2 \in \mathbb{E}^1.$$

Возможностные переменные на числовой прямой, характеризующиеся строго унимодальными, квазивогнутыми, полунепрерывными сверху функциями распределения и ограниченными носителями, называются *нечеткими числами.*

Для моделирования нечетких чисел часто используются распределения (L,R)-типа [14,15].

Определение 8. (L,R)*-функциями (функциями представления формы или просто формами) будем называть невозрастающие, полунепрерывные сверху, определенные на неотрицательной части числовой прямой функции, обладающие следующими свойствами:*

1. $L(0) = R(0) = 1$,

2. $L(t), R(t) < 1, \quad \forall t > 0$,

3. $\lim\limits_{t\to\infty} L(t) = \lim\limits_{t\to\infty} R(t) = 0$.

Определение 9. *Возможностная величина A называется возможностной величиной (L, R)-типа, если ее распределение имеет вид:*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{a-x}{\alpha}\right), & x < a, \\ 1, & a \le x \le b, \\ R\left(\dfrac{x-b}{\beta}\right), & x > b. \end{cases}$$

Здесь [a, b] – есть интервал толерантности A, a и b – соответственно, нижнее и верхнее модальные значения, α и β – коэффициенты нечеткости возможностной величины. Если $a = b$, то получаем *нечеткое число*, которое будем обозначать как $A = (a, \alpha, \beta)_{LR}$.

Пример 1. Если в качестве левой и правой форм взять кусочно-линейную функцию $L(x) = R(x) = \max\{0, 1 - x\}$, $x \ge 0$, то для случая нечетких чисел мы получаем так называемые *триангулярные нечеткие числа.*

Распределения возможностных величин (L, R)-типа удобны тем, что они являются параметризованными, что позволяет в ряде случаев сводить выполнение основных арифметических операций над возможностными величинами к выполнению этих операций над параметрами.

2. Агрегирование нечеткой информации и взаимодействие нечетких величин на основе t-норм

Агрегирование нечеткой информации может быть основано на треугольных нормах (t-нормах), которые обобщают операцию пересечения нечетких подмножеств и возможностных переменных [12,16–20].

Определение 10. *Отображение $T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ называется треугольной нормой (или t-нормой), если T — симметричное, ассоциативное, невозрастающее по каждому из аргументов и для любого $x \in [0,1]$:*

1. $T(1, x) = x$, $T(0, x) = 0$, *ограниченность,*
2. $T(x, y) = T(y, x)$, *симметричность,*
3. $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$, *ассоциативность,*
4. $T(w, y) \le T(x, z)$, *если* $w \le x, y \le z$, *монотонность.*

Пример 2. Примерами некоторых хорошо известных t-норм являются:

1. $T_W(x, y) = \begin{cases} min\{x, y\}, & \text{если } max\{x, y\} = 1, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$
2. t-норма Лукасевича $T_L(x, y) = \max\{x + y - 1, 0\}$,
3. алгебраическое произведение $T_P(x, y) = xy$,
4. операция взятия минимума $T_M(x, y) = \min\{x, y\}$.

Вышеперечисленные треугольные нормы связаны соотношением [21]:

$$T_W(x,y) \leq T_L(x,y) \leq T_P(x,y) \leq T_M(x,y),$$

в котором сравнение производится поточечно.

Треугольные нормы T_W и T_M являются экстремальными, при этом T_M называется сильной (сильнейшей), а T_W — слабой (слабейшей) t-нормами.

Определим теперь понятия T-связанности возможностных величин и их T-суммы [9, 20, 22–25].

Определение 11. *Пусть даны возможностное пространство* $(\Gamma, \mathbb{P}(\Gamma), \pi)$ *и* t-*норма* T. *Множества* $X_1, \ldots, X_n \in \mathbb{P}(\Gamma)$ *называются взаимно* T-*связанными, если для любого подмножества* $\{i_1, \ldots, i_k\}$ *множества* $\{1, \ldots, n\}$, $1 \leq k \leq n$:

$$\pi\Big(X_{i_1} \cap \ldots \cap X_{i_k}\Big) = T\Big(\pi(X_{i_1}), \ldots, \pi(X_{i_k})\Big),$$

где

$$T\Big(\pi(X_{i_1}), \ldots, \pi(X_{i_k})\Big) = T(T(\ldots T(T(\pi(X_{i_1}), \pi(X_{i_2})), \pi(X_{i_3})), \ldots \pi(X_{i_{k-1}})), \pi(X_{i_k})).$$

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ есть возможностные величины, определенные на возможностном пространстве $(\Gamma, \mathbb{P}(\Gamma), \pi)$.

Определение 12. *Возможностные величины* $A_1, \ldots, A_n$, *характеризующиеся функциями распределения* $\mu_{A_1}(x), \ldots, \mu_{A_n}(x)$, *называются взаимно* T-*связанными, если для любого подмножества* $\{i_1, \ldots, i_k\}$ *множества* $\{1, \ldots, n\}$, $1 \leq k \leq n$:

$$\begin{gathered}\mu_{A_{i_1},\ldots,A_{i_k}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) = \pi(\gamma \in \Gamma \mid A_{i_1}(\gamma) = x_{i_1}, \ldots, A_{i_k}(\gamma) = x_{i_k}) = \\ \pi(A_{i_1}^{-1}\{x_{i_1}\} \cap \ldots \cap A_{i_k}^{-1}\{x_{i_k}\}) = \\ T(\pi(A_{i_1}^{-1}\{x_{i_1}\}), \ldots, \pi(A_{i_k}^{-1}\{x_{i_k}\})) = T(\mu_{A_{i_1}}(x_{i_1}), \ldots, \mu_{A_{i_k}}(x_{i_k})), x_{i_j} \in \mathbb{E}^1.\end{gathered}$$

С помощью треугольных норм можно управлять процессом агрегирования нечеткой информации и, как следствие, контролировать рост неопределенности («нечеткости»), возникающий при проведении арифметических операций над нечеткими параметрами решаемых задач.

В частности, в [10] построено исчисление возможностей для случая слабейшей t-нормы T_W, используемое нами для построения непрямых методов решения задач возможностной оптимизации.

3. Задача уровневой возможностной оптимизации и непрямой метод ее решения

Рассмотрим следующую задачу уровневой возможностной оптимизации при построчных ограничениях по возможности:

$$k \to \max, \tag{2}$$

$$\pi\left\{f_0(x, \gamma) = k\right\} \geq \alpha_0, \tag{3}$$

$$\begin{cases} \pi\{f_i(x,\gamma)=0\} \geq \alpha_i, \ i=1,\ldots,m, \\ x \in \mathbb{X}, \end{cases} \tag{4}$$

где

$$f_0(x,\gamma) = \sum_{j=1}^{n} a_{0j}(\gamma)x_j, \quad f_i(x,\gamma) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\gamma)x_j - b_i(\gamma), \ i=1,\ldots,m.$$

Здесь (2)-(3) – модель критерия, а (4) – модель ограничений.

В контексте минисвязанных параметров данная задача достаточно полно исследована в работах [7, 8, 26], при этом ее эквивалентный детерминированный аналог в этом случае принимает вид:

$$k \to \max, \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{0j}^{-}(\alpha_0)x_j \leq k \leq \sum_{j=1}^{n} a_{0j}^{+}(\alpha_0)x_j, \tag{6}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-}(\alpha_i)x_j \leq b_i^{+}(\alpha_i), \ i=1,\ldots,m, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{+}(\alpha_i)x_j \geq b_i^{-}(\alpha_i), \ i=1,\ldots,m, \\ x \in \mathbb{X}, \end{cases} \tag{7}$$

где $a_{ij}^{-}(\alpha_i)$, $b_i^{-}(\alpha_i)$ – левые границы, а $a_{ij}^{+}(\alpha_i)$, $b_i^{+}(\alpha_i)$ – правые границы α_i-уровневых множеств нечетких величин $a_{ij}(\gamma)$ и $b_i(\gamma)$, соответственно. Здесь (5)-(6) – аналог модели критерия, (7) – аналог модели ограничений.

При взаимно T_W-связанных параметрах (L,R)-типа с

$$a_{ij}(\gamma) = (\hat{a}_{ij}, \eta_{ij}, \beta_{ij})_{LR}, \quad b_i(\gamma) = (\hat{b}_i, \eta_i, \beta_i)_{LR}$$

и идентичных функциях представления формы L и R в [1–3] был построен и исследован эквивалентный детерминированный аналог (2)-(4):

$$k \to \max, \tag{8}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{0j}x_j - \max_{j=1,\ldots,n}\{x_j\eta_{0j}\}L^{-1}(\alpha_0) \leq k, \\ \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{0j}x_j + \max_{j=1,\ldots,n}\{x_j\beta_{0j}\}R^{-1}(\alpha_0) \geq k, \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{ij}x_j - \max_{j=1,\ldots,n}\{x_j\eta_{ij}\}L^{-1}(\alpha_i) \leq \hat{b}_i + \beta_i R^{-1}(\alpha_i), \quad i=1,\ldots,m, \\ \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{ij}x_j + \max_{j=1,\ldots,n}\{x_j\beta_{ij}\}R^{-1}(\alpha_i) \geq \hat{b}_i - \eta_i L^{-1}(\alpha_i), \quad i=1,\ldots,m, \\ x \in \mathbb{X}, \end{cases} \tag{10}$$

где (8)-(9) есть эквивалент модели критерия, а (10) – эквивалент модели ограничений.

Как видно из детерминированных аналогов, одна лишь смена условия взаимодействия нечетких параметров задачи приводит к различным результатам. Задача (8)-(10) является в общем случае задачей многоэкстремальной и невыпуклой. Для ее решения в [27] специфицирован генетический алгоритм оптимизации.

Как уже было упомянуто во введении, в работах [1–3,27] при нахождении функции распределения $f_i'(x,\gamma) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\gamma)x_j$ предполагалось, что параметры $a_{ij}(\gamma)$ являются T_W-связанными, а далее при переходе к системе детерминированных неравенств производилась неявная замена возможностного пространства, в результате чего нечеткие величины $f_i'(x,\gamma)$ и $b_i(\gamma)$ становятся минисвязанными.

Докажем теорему, которая дает эквивалентный детерминированный аналог задачи (2)-(4) в том случае, когда возможностное пространство не меняется и все вычисления производятся в контексте треугольной нормы T_W. Все доказательства проведем для нечетких чисел, характеризующихся строго унимодальными функциями распределения.

Прежде всего докажем вспомогательную лемму, необходимую нам в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть $a(\gamma)$ и $b(\gamma)$ – взаимно T_W-связанные нечеткие величины, характеризующиеся квазивогнутыми полунепрерывными сверху строго унимодальными функциями распределения $\mu_a(x)$ и $\mu_b(x)$. Тогда возможностное неравенство*

$$\pi\{a(\gamma) = b(\gamma)\} >= \alpha$$

эквивалентно следующей совокупности систем детерминированных неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} a^-(\alpha) \le \hat{b} \le a^+(\alpha), \\ b^-(\alpha) \le \hat{a} \le b^+(\alpha), \end{array}\right.$$

где $a^-(\alpha)$ и $b^-(\alpha)$ – левые границы, $a^+(\alpha)$ и $b^+(\alpha)$ – правые границы α-уровневых множеств, $\hat{a}$ и $\hat{b}$ – модальные значения нечетких величин $a(\gamma)$ и $b(\gamma)$, соответственно.

Замечание 1. Совокупность неравенств понимается в обычном смысле – как дизъюнкция неравенств, в которой хотя бы одно должно быть истинным.

Доказательство. По определению имеем:

$$\pi\{a(\gamma) = b(\gamma)\} = \sup_x T_W(\mu_a(x), \mu_b(x)) = \sup_x \begin{cases} \mu_a(x), \text{ если } \mu_b(x) = 1, \\ \mu_b(x), \text{ если } \mu_a(x) = 1, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases} \quad (11)$$

Так как нечеткие величины $a(\gamma)$ и $b(\gamma)$ характеризуются строго унимодальными функциями распределения, то существует всего не более двух значений, в которых (11) отлично от нуля – это модальные значения этих величин: $\hat{a}$ и $\hat{b}$. В силу полунепрерывности сверху переходим от sup к max и имеем:

$$\pi\{a(\gamma) = b(\gamma)\} \ge \alpha \Rightarrow \max\{\mu_a(\hat{b}), \mu_b(\hat{a})\} \ge \alpha. \quad (12)$$

Благодаря квазивогнутости функций распределения, имеем:

$$\mu_a(\hat{b}) \geq \alpha \Rightarrow a^-(\alpha) \leq \hat{b} \leq a^+(\alpha) \quad \text{и} \quad \mu_b(\hat{a}) \geq \alpha \Rightarrow b^-(\alpha) \leq \hat{a} \leq b^+(\alpha). \tag{13}$$

Подставляя (13) в правило раскрытия неравенства (12) с максимумом в левой части: $\max\{a,b\} \geq c \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \geq c, \\ b \geq c, \end{array}\right.$ получаем утверждение леммы. □

Следствие 1. *Так как любую числовую константу можно представить в виде нечеткой величины, функция распределения которой равна единице в этой самой точке и нулю на остальной части числовой прямой, то для неравенства*

$$\pi\{a(\gamma) = k\} >= \alpha$$

из леммы 1 непосредственно следует эквивалентная система неравенств

$$a^-(\alpha) \leq k \leq a^+(\alpha),$$

где $a^-(\alpha)$ – левая граница, $a^+(\alpha)$ – правая граница α-уровневого множества нечеткой величины $a(\gamma)$, а k – числовая константа.

Следующая теорема дает эквивалентный детерминированный аналог системы ограничений (4).

Теорема 1. *Пусть в системе возможностных неравенств (4) $a_{ij}(\gamma)$ и $b_i(\gamma)$ есть T_W-связанные нечеткие величины (L,R)-типа со строго унимодальными функциями распределения*

$$\begin{array}{l} a_{ij}(\gamma) = (\hat{a}_{ij}, \eta_{ij}, \beta_{ij})_{LR},\ i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n, \\ b_i(\gamma) = (\hat{b}_i, \eta_i, \beta_i)_{LR},\ i = 1,\ldots,m, \end{array}$$

и одинаковыми функциями представления форм L и R. Если L и R имеют обратные функции, то эквивалентный детерминированный аналог системы (4) может быть представлен как

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \hat{b}_1 - \eta_1 L^{-1}(\alpha_1) \leq \sum\limits_{j=1}^{n} \hat{a}_{1j} x_j \leq \hat{b}_1 + \beta_1 R^{-1}(\alpha_1), \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \hat{a}_{1j} x_j - \max\limits_{j=1,\ldots,n}\{\eta_{1j} x_j\} L^{-1}(\alpha_1) \leq \hat{b}_1 \leq \sum\limits_{j=1}^{n} \hat{a}_{1j} x_j + \max\limits_{j=1,\ldots,n}\{\beta_{1j} x_j\} R^{-1}(\alpha_1), \end{array}\right. \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \left[\begin{array}{l} \hat{b}_n - \eta_i L^{-1}(\alpha_n) \leq \sum\limits_{j=1}^{n} \hat{a}_{nj} x_j \leq \hat{b}_n + \beta_i R^{-1}(\alpha_n), \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \hat{a}_{nj} x_j - \max\limits_{j=1,\ldots,n}\{\eta_{nj} x_j\} L^{-1}(\alpha_n) \leq \hat{b}_n \leq \sum\limits_{j=1}^{n} \hat{a}_{nj} x_j + \max\limits_{j=1,\ldots,n}\{\beta_{ij} x_j\} R^{-1}(\alpha_i), \end{array}\right. \\ x \in \mathbb{X}. \end{array}\right. \tag{11}$$

Доказательство. Функция $f_i(x,\gamma)$ описывается выражением

$$f_i(x,\gamma)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\gamma)x_j - b_i(\gamma).$$

Перенесем свободный член $b_i(\gamma)$ в правую часть уравнения и получим следующую форму ограничения:

$$\begin{cases} \pi\{f_i'(x,\gamma)=b_i(\gamma)\}\geq \alpha_i, \\ x\in \mathbb{X}. \end{cases}$$

Функция $f_i'(x,\gamma)$ является взвешенной T_W-суммой нечетких величин (L,R)-типа с одинаковыми функциями представления формы. Согласно [10] распределение возможностей $f_i'(x,\gamma)$ будет иметь вид

$$\mu_{f_i'}=\left(\sum_{j=1}^{n}\hat{a}_{ij}x_j,\ \max_{j=1\ldots n}\{\eta_{ij}x_j\},\ \max_{j=1\ldots n}\{\beta_{ij}x_j\}\right)_{LR}.$$

Таким образом, для $f_i'(x,\gamma)$ функции представления левой и правой форм $L^{f_i'}(t)$ и $R^{f_i'}(t)$, соответственно, будут выражаться соотношениями

$$L^{f_i'}(t)=L\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\hat{a}_{ij}x_j - t}{\max\limits_{j=1\ldots n}\{\eta_{ij}x_j\}}\right),\quad R^{f_i'}(t)=R\left(\frac{t-\sum\limits_{j=1}^{n}\hat{a}_{ij}x_j}{\max\limits_{j=1\ldots n}\{\beta_{ij}x_j\}}\right).$$

Для свободного члена функция распределения возможностей будет иметь вид, заданный в условии теоремы: $b_i(\gamma)=(\hat{b}_i,\eta_i,\beta_i)_{LR}$, а функции представления левой и правой формы, соответственно:

$$L^{b_i}(t)=L\left(\frac{\hat{b}_i-t}{\eta_i}\right),\quad R^{b_i}(t)=R\left(\frac{t-\hat{b}_i}{\beta_i}\right).$$

Согласно лемме 1, возможностное неравенство $\pi\{f_i'(x,\gamma)=b_i(\gamma)\}\geq\alpha_i$ эквивалентно следующей совокупности систем детерминированных неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} b_i^-(\alpha_i)\leq \sum\limits_{j=1}^{n}\hat{a}_{ij}x_j\leq b_i^+(\alpha_i), \\ {f'}_i^-(\alpha_i)\leq \hat{b}_i\leq {f'}_i^+(\alpha_i), \end{array}\right. \tag{12}$$

где $b_i^-(\alpha_i)$, ${f'}_i^-(\alpha_i)$ – левые границы, а $b_i^+(\alpha_i)$, ${f'}_i^+(\alpha_i)$ – правые границы α_i-уровневых множеств нечетких величин $b_i(\gamma)$ и $f_i'(\gamma)$, соответственно. Найдем ${f'}_i^-(\alpha_i)$ и ${f'}_i^+(\alpha_i)$:

$$L\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\hat{a}_{ij}x_j-{f'}_i^-(\alpha_i)}{\max\limits_{j=1\ldots n}\{\eta_{ij}x_j\}}\right)=\alpha_i\Longrightarrow {f'}_i^-(\alpha_i)=\sum_{j=1}^{n}\hat{a}_{ij}x_j-\max_{j=1\ldots n}\{\eta_{ij}x_j\}L^{-1}(\alpha_i),$$

$$R\left(\frac{f'^{+}_{i}(\alpha_i)-\sum_{j=1}^{n}\hat a_{ij}x_j}{\max\limits_{j=1\ldots n}\{\beta_{ij}x_j\}}\right)=\alpha_i \Longrightarrow f'^{+}_{i}(\alpha_i)=\sum_{j=1}^{n}\hat a_{ij}x_j+\max_{j=1\ldots n}\{\beta_{ij}x_j\}R^{-1}(\alpha_i).$$

Аналогичным образом находим $b_i^-(\alpha_i)$ и $b_i^+(\alpha_i)$:

$$b_i^-(\alpha_i)=\hat b_i-\eta_i L^{-1}(\alpha_i),\quad b_i^+(\alpha_i)=\hat b_i+\beta_i R^{-1}(\alpha_i).$$

Подставив полученные границы α_i-уровневых множеств в (12), получим утверждение теоремы. Что и требовалось доказать. □

Эквивалентный детерминированный аналог модели критерия (2)-(3) дает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть в (3)* $a_{0j}(\gamma)$ *–* T_W*-связанные нечеткие величины* (L,R)*-типа со строго унимодальными функциями распределения*

$$a_{0j}(\gamma)=(\hat a_{0j},\eta_{0j},\beta_{0j})_{LR},\ j=1,\ldots,n,$$

с одинаковыми функциями представления форм L *и* R*, причем* L *и* R *имеют обратные функции. Тогда эквивалентный детерминированный аналог модели (2)-(3) имеет вид*

$$\sum_{j=1}^{n}\hat a_{0j}x_j+\max_{j=1,\ldots,n}\{\beta_{0j}x_j\}R^{-1}(\alpha_0)\to\max. \tag{13}$$

Доказательство. Функция $f_0(x,\gamma)=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{0j}(\gamma)x_j$ является взвешенной T_W-суммой нечетких величин (L,R)-типа с одинаковыми функциями представления формы. Аналогично, как и при доказательстве теоремы 2, находим распределение возможностей $f_0(x,\gamma)$, а затем левую и правую границы его α_0-уровневого множества $f_0^-(\alpha_0)$ и $f_0^+(\alpha_0)$, соответственно:

$$f_0^-(\alpha_0)=\sum_{j=1}^{n}\hat a_{0j}x_j-\max_{j=1\ldots n}\{\eta_{0j}x_j\}L^{-1}(\alpha_0),$$

$$f_0^+(\alpha_0)=\sum_{j=1}^{n}\hat a_{0j}x_j+\max_{j=1\ldots n}\{\beta_{0j}x_j\}R^{-1}(\alpha_0).$$

В соответствии со следствием 1 из леммы 1 возможностное неравенство $\pi\{f_0(x,\gamma)=k\}\geq\alpha_0$ эквивалентно следующей системе детерминированных неравенств:

$$\begin{cases} f_0^-(\alpha_0)\leq k,\\ f_0^+(\alpha_0)\geq k,\end{cases}$$

что, в свою очередь, с учетом максимизации k эквивалентно

$$f_0^+(\alpha_0)\to\max.$$

Что и требовалось доказать. □

4. Сравнительное изучение методов на модельном примере

Рассмотрим модельный пример из [1] и дополним его решением, проводимым полностью в контексте T_W в соответствии с теоремами 1 и 2. Напомним условия задачи:

$$k \to \max, \tag{14}$$

$$\pi\left\{a_{01}(\gamma)x_1 + a_{02}(\gamma)x_2 = k\right\} \geq 0.5, \tag{15}$$

$$\begin{cases} \pi\left\{a_{11}(\gamma)x_1 + a_{12}(\gamma)x_2 - b_1(\gamma) = 0\right\} \geq 0.3, \\ \pi\left\{a_{21}(\gamma)x_1 + a_{22}(\gamma)x_2 - b_2(\gamma) = 0\right\} \geq 0.4, \\ x \in \mathbb{E}^2_+, \end{cases} \tag{16}$$

где

$$\begin{aligned} & a_{01}(\gamma) = (1,1,1)_{LR}, \quad a_{02}(\gamma) = \left(5, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)_{LR}, \\ & a_{11}(\gamma) = \left(8, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)_{LR}, \quad a_{12}(\gamma) = \left(-2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)_{LR}, \quad b_1(\gamma) = \left(14, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)_{LR}, \\ & a_{21}(\gamma) = (1,1,1)_{LR}, \quad a_{22}(\gamma) = (-5,2,2)_{LR}, \quad b_2(\gamma) = \left(0, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)_{LR}, \end{aligned}$$

$L(t) = R(t) = \max\{0, 1-t\},\ t \in \mathbb{E}^1_+$.

Соответствующая четкая задача имеет следующий вид:

$$x_1 + 5x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 8x_1 - 2x_2 - 14 = 0, \\ x_1 - 5x_2 = 0, \\ x \in \mathbb{E}^2_+. \end{cases}$$

Она имеет единственное решение:

$$\tilde{x}_1 \approx 1.842, \quad \tilde{x}_2 \approx 0.368, \quad F_C(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \approx 3.682.$$

Для минисвязанных нечетких параметров в соответствие с [7] эквивалентный детерминированный аналог модельного примера есть следующая задача линейного программирования:

$$1.5x_1 + 5.75x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 6.95x_1 - 2.35x_2 \leq 16.45, \\ 9.05x_1 - 1.65x_2 \geq 11.55, \\ 0.4x_1 - 6.2x_2 \leq 1.5, \\ 1.6x_1 - 3.8x_2 \geq -1.5, \\ x \in \mathbb{E}^2_+. \end{cases}$$

Полученная задача имеет следующее решение:

$$\tilde{x}_1 \approx 2.915, \quad \tilde{x}_2 \approx 1.622, \quad F_M(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \approx 13.701.$$

Для двойного контекста T_W-T_M, в котором операнды взвешенных сумм являются взаимно T_W-связанными, а сама сумма и свободный член – минисвязанными, имеем следующий детерминированный эквивалент:

$$x_1 + 5x_2 + \frac{1}{2}\max\left\{x_1, \frac{3}{2}x_2\right\} \to \max,$$

$$\begin{cases} 8x_1 - 2x_2 - \max\left\{\dfrac{3}{2}x_1, \dfrac{1}{2}x_2\right\} \cdot 0.7 \le 16.45, \\ 8x_1 - 2x_2 + \max\left\{\dfrac{3}{2}x_1, \dfrac{1}{2}x_2\right\} \cdot 0.7 \ge 11.55, \\ x_1 - 5x_2 - \max\{x_1, 2x_2\} \cdot 0.6 \le 1.5, \\ x_1 - 5x_2 + \max\{x_1, 2x_2\} \cdot 0.6 \ge -1.5, \\ x \in \mathbb{E}^2_+. \end{cases}$$

Решение задачи, полученное генетическим алгоритмом [27], следующее:

$$\tilde{x}_1 \approx 2.702,\ \tilde{x}_2 \approx 1.165,\ F_{WM}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \approx 9.876.$$

Наконец, для взаимно T_W-связанного контекста, в соответствии с теоремами 1 и 2, имеем следующий детерминированный эквивалент:

$$x_1 + 5x_2 + \frac{1}{2}\max\left\{x_1, \frac{3}{2}x_2\right\} \to \max,$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 11.55 \le 8x_1 - 2x_2 \le 16.45, \\ 8x_1 - 2x_2 - \max\left\{\dfrac{3}{2}x_1, \dfrac{1}{2}x_2\right\} \cdot 0.7 \le 14 \le 8x_1 - 2x_2 + \max\left\{\dfrac{3}{2}x_1, \dfrac{1}{2}x_2\right\} \cdot 0.7, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -1.5 \le x_1 - 5x_2 \le 1.5, \\ x_1 - 5x_2 - \max\{x_1, 2x_2\} \cdot 0.6 \le 0 \le x_1 - 5x_2 + \max\{x_1, 2x_2\} \cdot 0.6, \end{array}\right. \\ x \in \mathbb{E}^2_+. \end{cases}$$

Для данной задачи генетический алгоритм дает следующее решение:

$$\tilde{x}_1 \approx 2.243,\ \tilde{x}_2 \approx 0.749,\ F_W(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \approx 7.109.$$

Решения модельной задачи во всех четырех случаях сведены в таблицу 1, а области допустимых решений из соответствующих примеров представлены на Рис. 1. Для наглядности на рисунке опущена область $\mathbb{E}^2_+$.

Таблица 1: Решения оптимизационной задачи (14)-(16) при различных способах агрегирования нечеткой информации

параметры	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$
четкие	1.842	0.368	3.682
взаимно T_W-связанные	2.243	0.749	7.109
T_W-T_M-связанные	2.702	1.165	9.876
взаимно минисвязанные	2.915	1.6223	13.701

На Рис. 1 двумя сплошными линиями с пересечением в точке F_C обозначены ограничения четкой задачи, двумя парами линий с одним из пересечений в точке F_{WM} – ограничения задачи, решаемой в контексте T_{WM}, сплошная темная область задает ограничения задачи, решаемой при минисвязанных параметрах, а

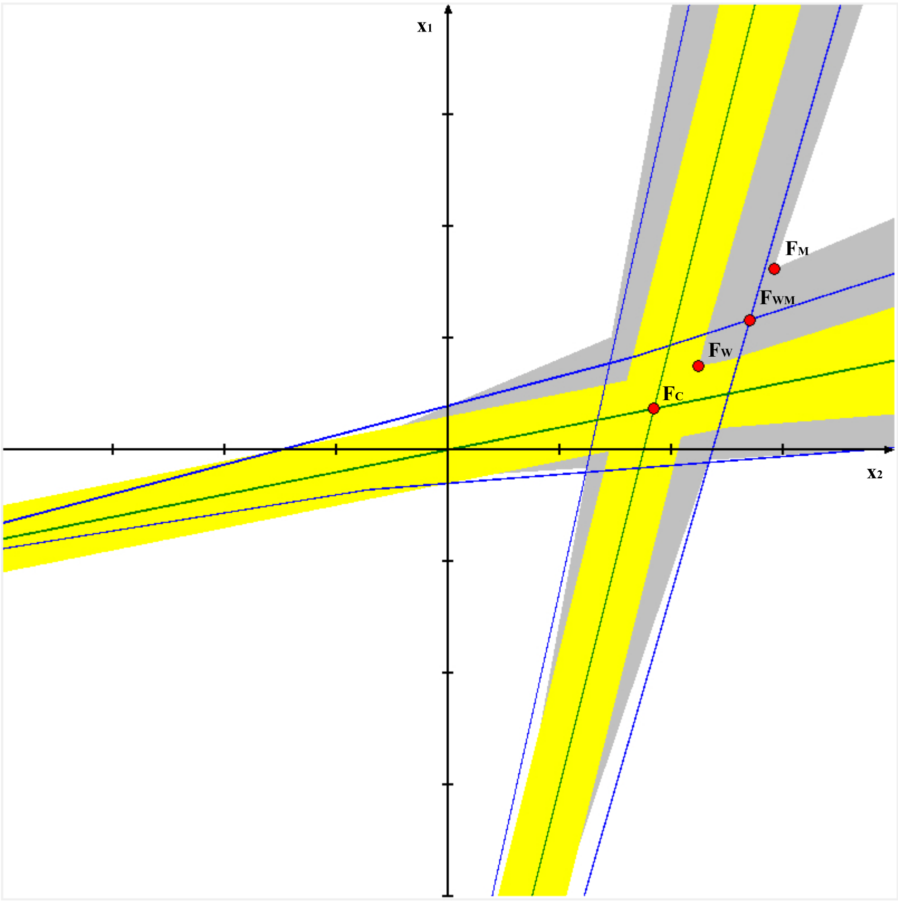

Рис. 1: Области допустимых решений задачи (14)-(16) в зависимости от t-нормы, участвующей в процессе агрегирования нечеткой информации

сплошные светлые области – ограничения задачи, решаемой полностью в контексте слабейшей t-нормы T_W. Точками обозначены значения вектора x, на которых достигаются оптимумы соответствующих задач.

Заключение

В работе построен непрямой метод решения задачи возможностной оптимизации, основанной на модели максимизации уровня достижения нечеткой цели при построчных ограничениях по возможности, в случае, когда параметры задачи являются T_W-связанными. В отличие от работ [1–3], в которых при построении эквивалента для задач аналогичной модели происходит неявная замена возможностного пространства, приводящая к тому, что суммы и свободные члены для ограничений задачи становятся минисвязанными, в настоящей работе контекст T_W-связанности сохраняется полностью. Доказанные теоремы позволяют строить аналоги для задач, в которых параметры являются нечеткими величинами (L,R)-типа, характеризующимися строго унимодальными функциями распределения.

Полученные результаты проиллюстрированы на модельном примере – приведен сравнительный анализ решения исследуемой задачи оптимизации в четырех случаях: в «четком» контексте, в контексте минисвязанности, T_W-связанности и в двойном контексте T_W-T_M, основанном на замене возможностного пространства в ходе решения задачи. Как видно из Рис. 1, при моделировании взаимодействия с помощью слабейшей t-нормы, область допустимых решений еще больше сужается.

Интерес для дальнейших исследований представляет более общий случай, когда параметры задачи представляют собой нечеткие величины с унимодальными функциями распределения возможностей, которые имеют в общем случае плато модальностей, а бинарные отношения являются нечеткими [28].

Список литературы

[1] Солдатенко И.С., Язенин А.В. Задачи возможностной оптимизации с взаимно t-связанными параметрами: сравнительное изучение // Известия РАН. Теория и системы управления. 2008. № 5. С. 87–98.

[2] Yazenin A., Soldatenko I. Possibilistic optimization tasks with mutually T-related parameters: solution methods and comparative analysis // Studies in Fuzziness and Soft Computing. 2010. Vol. 254. Pp. 163–192. doi:10.1007/978-3-642-13935-2_8

[3] Soldatenko I.S., Yazenin A.V. Possibilistic optimization problems with mutually t-related parameters // Proceedings of 2008 Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society, NAFIPS 2008. Pp. 1–5. doi:10.1109/NAFIPS.2008.4531249.

[4] Bellman R.E., Zadeh L.A. Decision making in a fuzzy environment // Management Science. 1970. Vol. 17. Pp. 141–162.

[5] Luhandjula M.K. On possibilistic linear programming // Fuzzy Sets and Systems. 1986. Vol. 18. Pp. 15–30.

[6] Luhandjula M.K. Fuzzy optimization: an appraisal // Fuzzy Sets and Systems. 1989. Vol. 30. Pp. 257–282.

[7] Yazenin A.V. On the problem of possibilistic optimization // Fuzzy Sets and Systems. 1996. Vol. 81. Pp. 133–140.

[8] Yazenin A.V., Wagenknecht M. Possibilistic optimization. Cottbus, Germany: Brandenburgische Technische Universitat, 1996.

[9] Rao M.B., Rashed A. Some comments on fuzzy variables // Fuzzy Sets and Systems. 1996. Vol. 6. Pp. 285–292.

[10] Солдатенко И.С. О взвешенной сумме взаимно Tw-связанных нечетких величин // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2007. № 4. С. 63–77.

[11] Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей / Пер. с франц. М.: Радио и связь, 1990.

[12] Nguyen H.T., Walker E.A. A first cours in fuzzy logic. CRC Press, 1997.

[13] Nahmias S. Fuzzy variables // Fuzzy Sets and Systems. 1978. Vol. 1. Pp. 97–110.

[14] Dubois D., Prade H. Fuzzy numbers: an overview // Analysis of Fuzzy Information / Ed. by J. Bezdek. Vol. 2. CRC-Press, Boca Raton, 1988. Pp. 3–39.

[15] Dubois D., Prade H. Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications. New York: Academic Press, 1980.

[16] Schweizer B., Sklar A. Probabilistic metric spaces. North Holland, New York, 1983.

[17] Klement E.P., Mesiar R., Pap E. Triangular norms. Position paper I: basic analytical and algebraic properties // Fuzzy Sets and Systems. 2004. Vol. 143, no. 1. Pp. 5–26.

[18] Klement E.P., Mesiar R., Pap E. Triangular norms. Position paper II: general constructions and parameterized families // Fuzzy Sets and Systems. 2004. Vol. 145, no. 3. Pp. 411–438.

[19] Klement E.P., Mesiar R., Pap E. Triangular norms. Position paper III: continuous t-norms // Fuzzy Sets and Systems. 2004. Vol. 145, no. 3. Pp. 439–454.

[20] Mesiar R. A note to the T-sum of $L-R$ fuzzy numbers // Fuzzy Sets and Systems. 1996. Vol. 79. Pp. 259–261.

[21] Klement E.P., Mesiar R., Pap E. A characterization of the ordering of continous t-norms // Fuzzy Sets and Systems. 1997. Vol. 86. Pp. 189–195.

[22] Marková-Stupňanová A. A note to the addition of fuzzy numbers based on a continous Archimedean T-norm // Fuzzy Sets and Systems. 1997. Vol. 91. Pp. 253–258.

[23] Mesiar R. Computation of $L-R$-fuzzy numbers // Proc. of 5th International Workshop on Current Issues in Fuzzy Technologies. Trento, Italy, 1995. Pp. 165–176.

[24] Mesiar R. Triangular-norm-based addition of fuzzy intervals // Fuzzy Sets and Systems. 1997. Vol. 91. Pp. 231–237.

[25] Mesiar R. Shape preserving additions of fuzzy intervals // Fuzzy Sets and Systems. 1997. Vol. 86. Pp. 73–78.

[26] Yazenin A.V. Fuzzy and Stochastic Programming // Fuzzy Sets and Systems. 1987. Vol. 22. Pp. 171–180.

[27] Солдатенко И.С. О генетическом алгоритме решения задачи возможностной оптимизации при взаимно Tw-связанных параметрах // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2008. № 8. С. 25–36.

[28] Гордеев Р.Н., Язенин А.В. Метод решения одной задачи возможностного программирования // Известия РАН. Теория и системы управления. 2006. № 3. С. 112–119.

Библиографическая ссылка

Солдатенко И.С. Об уточнении метода решения задачи возможностной оптимизации одного класса при Tw-связанных параметрах // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 1. С. 13–32.

Сведения об авторах

1. **Солдатенко Илья Сергеевич**
доцент кафедры информационных технологий, начальник отдела информационных технологий Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ. E-mail: soldis@tversu.ru

ON A REFINEMENT OF METHOD FOR SOLVING POSSIBILISTIC OPTIMIZATION PROBLEMS OF ONE CLASS WITH MUTUALLY TW-RELATED PARAMETERS

Soldatenko Ilia Sergeyevich
Associate Porfessor at Information Technologies department, Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU. E-mail: soldis@tversu.ru

Received 24.02.2016, revised 01.03.2016.

We refine results that were obtained in [1–3]. In the mentioned papers an indirect method of solving the possibilistic optimization problem with fuzzy parameters of (L,R)-type based on model of maximizing the level of fuzzy goal achievement in the context of weakest t-norm was constructed. In these works during the process of finding the distribution function of weighted sums involved in the construction of criteria and constraints it was assumed that the parameters of the optimization problem were mutually T_W-related. However later task's model space was being replaced while assuming that weighted sums and free terms are min-related. In this paper the above mentioned possibilistic optimization problem is investigated fully in the context of the weakest t-norm. A numerical example shows a comparative analysis of solving the optimization problem in 4 different cases: in "crisp" context, in mutaully min-related context, mutually T_W-related context and the dual T_W-T_M context, based on the replacement of model set in the course of solving the problem.

Keywords: possibilistic optimization, t-norm, aggregation of fuzzy information, the weakest triangular norm, (L,R)-type distributions, indirect method.

Bibliographic citation

Soldatenko I.S. On a refinement of method for solving possibilistic optimization problems of one class with mutually Tw-related parameters. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2016, no. 1, pp. 13–32. (in Russian)

References

[1] Soldatenko I.S., Yazenin A.V. Possibilistic optimization problems with mutually t-related parameters: comparative study. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2008, no. 5, pp. 87–98.

[2] Yazenin A., Soldatenko I. Possibilistic optimization tasks with mutually T-related parameters: solution methods and comparative analysis. *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, 2010, vol. 254, pp. 163–192. doi:10.1007/978-3-642-13935-2_8

[3] Soldatenko I.S., Yazenin A.V. Possibilistic optimization problems with mutually t-related parameters. *Proceedings of 2008 Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society, NAFIPS 2008.* New York, 2008. Pp. 1–5. doi:10.1109/NAFIPS.2008.4531249.

[4] Bellman R.E., Zadeh L.A. Decision making in a fuzzy environment. *Management Science*, 1970, vol. 17, pp. 141–162.

[5] Luhandjula M.K. On possibilistic linear programming. *Fuzzy Sets and Systems*, 1986, vol. 18, pp. 15–30.

[6] Luhandjula M.K. Fuzzy optimization: an appraisal. *Fuzzy Sets and Systems*, 1989, vol. 30, pp. 257–282.

[7] Yazenin A.V. On the problem of possibilistic optimization. *Fuzzy Sets and Systems*, 1996, vol. 81, pp. 133–140.

[8] Yazenin A.V., Wagenknecht M. *Possibilistic optimization.* Brandenburgische Technische Universitat, Cottbus, Germany, 1996.

[9] Rao M.B., Rashed A. Some comments on fuzzy variables. *Fuzzy Sets and Systems*, 1996, vol. 6, pp. 285–292.

[10] Soldatenko I.S. On a weighted sum of mutually Tw-related fuzzy values. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2007, no. 4, pp. 63–77. (in Russian)

[11] Dyubua D., Prad A. *Teoriya Vozmozhnostei* [Theory of Possibilities]. “Radio i svyaz” Publ., Moscow, 1990.

[12] Nguyen H.T., Walker E.A. *A First Cours in Fuzzy Logic.* CRC Press, 1997.

[13] Nahmias S. Fuzzy variables. *Fuzzy Sets and Systems*, 1978, vol. 1, pp. 97–110.

[14] Dubois D., Prade H. Fuzzy numbers: an overview. *Analysis of Fuzzy Information.* Ed. by J. Bezdek. Vol. 2. CRC-Press, Boca Raton, 1988. Pp. 3–39.

[15] Dubois D., Prade H. *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications.* Academic Press, New York, 1980.

[16] Schweizer B., Sklar A. *Probabilistic Metric Spaces.* North Holland, New York, 1983.

[17] Klement E.P., Mesiar R., Pap E. Triangular norms. Position paper I: basic analytical and algebraic properties. *Fuzzy Sets and Systems*, 2004, vol. 143(1), pp. 5–26.

[18] Klement E.P., Mesiar R., Pap E. Triangular norms. Position paper II: general constructions and parameterized families. *Fuzzy Sets and Systems*, 2004, vol. 145(3), pp. 411–438.

[19] Klement E.P., Mesiar R., Pap E. Triangular norms. Position paper III: continuous t-norms. *Fuzzy Sets and Systems*, 2004, vol. 145(3), pp. 439–454.

[20] Mesiar R. A note to the T-sum of L-R fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 1996, vol. 79, pp. 259–261.

[21] Klement E.P., Mesiar R., Pap E. A characterization of the ordering of continous t-norms. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, vol. 86, pp. 189–195.

[22] Marková-Stupňanová A. A note to the addition of fuzzy numbers based on a continous Archimedean T-norm. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, vol. 91, pp. 253–258.

[23] Mesiar R. Computation of L-R-fuzzy numbers. *Proc. of 5th International Workshop on Current Issues in Fuzzy Technologies*. Trento, 1995. Pp. 165–176.

[24] Mesiar R. Triangular-norm-based addition of fuzzy intervals. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, vol. 91, pp. 231–237.

[25] Mesiar R. Shape preserving additions of fuzzy intervals. *Fuzzy Sets and Systems*, 1997, vol. 86, pp. 73–78.

[26] Yazenin A.V. Fuzzy and Stochastic Programming. *Fuzzy Sets and Systems*, 1987, vol. 22, pp. 171–180.

[27] Soldatenko I.S. On genetic algorithm for solving possibilistic optimization problem with mutually Tw-related parameters. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2008, no. 8, pp. 25–36. (in Russian)

[28] Gordeev R.N., Yazenin A.V. A method for solving a problem of possibilistic programming. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2006, vol. 45(3), pp. 442–449.