МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 517.94

О РАЗРЕШИМОСТИ ВНЕШНЕЙ ЗАДАЧИ СТОКСА

Захарова И.В.
Кафедра математической статистики и системного анализа

Поступила в редакцию 20.12.2015, после переработки 20.01.2016.

Исследуется стационарная задача об обтекании ограниченного тела потоком вязкой неньютоновской жидкости. В работе рассматривается внешняя задача Стокса, сформулированы условия ее разрешимости. Ищутся решения стационарной задачи, обладающие определенными свойствами на бесконечности.

Ключевые слова: внешняя задача Стокса, неньютоновские жидкости.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 1. С. 75–92.

Введение

Математическое изучение потока вязких несжимаемых жидкостей около трехмерного препятствия было предметом исследования многих работ. В [1] было установлено существование стационарного решения с конечным интегралом Дирихле. Эти решения поточечно стремятся к постоянному значению на бесконечности. В 1965 г. Р.Финн ввел так называемые PR-решения (физически реализуемые) [2].

В работах [3,4] доказана единственность решения в весовых пространствах Соболева, получены оценки в соответствующих нормах. Движение потока жидкости описывается системой уравнений

$$-\nu \ \mathrm{div}\ \Pi + (\bar{v}\nabla)\bar{v} + \nabla p = \bar{f}, \quad \mathrm{div}\ \bar{v} = 0 \text{ в } \Omega$$

с граничными условиями

$$\bar{v}\Big|_{\Gamma} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \bar{v}(x) = 0,$$

где

$$\Pi = (1+\xi(|S|^2))S, \quad S(\bar{v}) = \{S_{ij}\}_{i,j=1}^3 = \left\{\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right\}_{i,j=1}^3, \quad |S| = \left(\sum_{i,j=1}^3 S_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $\xi(t),\ t \geq 0$ – гладкая функция, имеющая ограниченные первую и вторую производные и удовлетворяющая условиям

$$\xi(0) = 0, \quad -1 + \gamma_0 \leq \xi(t) \leq \gamma_1,$$
$$\xi(t) \to 0 \text{ при } t \to 0, \quad \xi^{'}(t) \to 0 \text{ при } t \to 0, \tag{$*$}$$
$$\gamma_0 = \text{ const } > 0, \quad \gamma_1 = \text{ const } \geq -1 + \gamma_0,$$
$$\max_{t\geq 0} |\xi^{'}(t)| = M_1, \quad \max_{t\geq 0} |\xi^{''}(t)| = M_2.$$

Основной результат для внешней задачи следующий.

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – внешняя область, дополнение к компактному множеству, Γ есть граница области класса C^3. Если функция $\xi(t)$ удовлетворяет условиям $(*)$, $\bar{f} \in L^r_{\delta+2}(\Omega)$, $\frac{-3}{r} < \delta < 1 - \frac{3}{r}$, $r > 3$ и $\bar{f}$ может быть представлена в виде*

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{|x|^3}\bar{F}(x) + \tilde{f}(x),$$

где $\bar{F}(x)$ удовлетворяет условию согласования

$$\int\limits_\Gamma \bar{F} \cdot \bar{d}\, d\Gamma = 0, \quad \forall \bar{d} \in \mathbb{R}^3,$$

функция $\tilde{f}(x)$ такова, что

$$\tilde{f}(x) = O\left(\frac{1}{|x|^{3+\epsilon}}\right), \quad \epsilon > 0$$

и норма $\|\bar{f}\|_{L^r_{\delta+2}(\Omega)}$ достаточно мала, то существует единственное решение задачи, такое что

$$\bar{v} \in H^{2,r}_\delta(\Omega), \quad p \in H^{1,r}_{\delta+1}(\Omega),$$
$$\bar{v}(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad p(x) = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \quad \text{при } x \to \infty$$

и имеет место оценка

$$\|\bar{v}\|_{H^{2,r}_\delta(\Omega)} + \|p\|_{H^{1,r}_{\delta+1}(\Omega)} \leq c\|\bar{f}\|_{L^r_{\delta+2}(\Omega)}.$$

Решение задачи получено методом последовательных приближений. Эти приближения являются решениями подобных линейных задач. Исследование линейных задач основано на результатах С. Назарова и К. Пилескаса для внешней задачи для системы Стокса.

В данной работе задача рассмотрена в линеаризованной постановке для случая, когда скорость жидкости стремится к нулю на бесконечности. Доказана теорема, в которой сформулировано необходимое и достаточное условие существования решения задачи.

1. Постановка задачи

Рассматривается краевая задача Стокса в области Ω:

$$-\nu\Delta\bar{v} + \nabla p = \bar{f}, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \bar{v} = g, \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$\bar{v} = \bar{h}, \quad x \in \partial\Omega, \tag{3}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} \bar{v}(x) = 0, \tag{4}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3),\ x \in \mathbb{R}^3$.

Движение жидкости характеризуется вектор-функцией скорости $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ и давлением p, $\nu = const > 0$ – коэффициент вязкости жидкости,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right).$$

Здесь $\bar{f}(x) = (f_1, f_2, f_3)$ – заданная вектор-функция из $\mathbb{R}^3$, характеризующая силу, действующую на жидкость, $\bar{h} = (h_1, h_2, h_3)$ – векторная функция из $\mathbb{R}^3$, g – скалярная функция, $\nu = const > 0$ – коэффициент кинематической вязкости.

2. Основные определения

Определение 1. *Под Ω будем понимать внешнюю область в $\mathbb{R}^3$, то есть $\Omega = \mathbb{R}^3 \backslash \bar{G}$, где G – связанное, открытое, ограниченное множество. Без потери общности предположим, что декартова система координат выбрана так, что начало координат принадлежит области G. Предположим, что граница $\partial\Omega$ – гладкая, двумерная, ограниченная область.*

Определение 2. *Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^3$. $L^2(\Omega)$ – множество измеримых функций, т.ч.*

$$\|z; L^2(\Omega)\| = \left(\int\limits_\Omega |z(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пространство $L^2(\Omega)$ – есть гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(z, y) = \int\limits_\Omega z(x)y(x)\,dx.$$

Определение 3. *Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^3$. Пусть l – целое, неотрицательное число. Пространство $H^l(\Omega)$ – множество измеримых на Ω функций, имеющих все обобщенные производные вплоть до порядка l включительно, интегрируемые с квадратом, норма в котором определяется:*

$$\|z; H^l(\Omega)\| = \left(\sum_{|\alpha|=0}^{l} \int\limits_\Omega |D^\alpha z|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *– мультииндекс,* $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_i \geq 0$ *– целые числа,*

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}}.$$

Пространство $H^l(\Omega)$ – гильбертово пространство, скалярное произведение в котором задается соотношением

$$(z, y)_l = \sum_{|\alpha|=0}^{l} \int_\Omega D^\alpha z D^\alpha y \, dx.$$

Определение 4. *Пусть* Ω *– открытое множество в* $\mathbb{R}^3$*. Пусть* $\beta \in \mathbb{R}^1, l$ *– целое, неотрицательное число.*

$V^l_\beta(\Omega)$ *– весовое пространство измеримых на* Ω *функций, имеющих все обобщенные производные вплоть до порядка* l *включительно, интегрируемых с квадратом, для которых конечны интегралы*

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^{l} (1+r)^{2(\beta - l + |\alpha|)} |D^\alpha z|^2 \, dx$$

и норма в котором определяется следующим образом:

$$\|z, V^l_\beta(\Omega)\| = \left(\sum_{|\alpha|=0}^{l} \left\| (1+r)^{\beta - l + |\alpha|} D^\alpha z; L^2(\Omega) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

то есть

$$\|z, V^l_\beta(\Omega)\| = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^{l} (1+r)^{2(\beta - l + |\alpha|)} |D^\alpha z|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $r = |x|, \quad |x| = \left(\sum\limits_{i=1}^{3} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$

Определение 5. *Пусть* Ω *– открытое множество в* $\mathbb{R}^3$*. Пусть* $\beta \in \mathbb{R}^1, l$ *– целое, неотрицательное число.*

$D^l_\beta V(\Omega)$ *– пространство пар* $(\bar{v}, p)$*, где* $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3), \ v_i \in V^{l+1}_\beta(\Omega), \ p \in V^l_\beta(\Omega)$.

$$\left\| (\bar{v}, p); D^l_\beta V(\Omega) \right\| = \left\| v_1; V^{l+1}_\beta(\Omega) \right\| + \left\| v_2; V^{l+1}_\beta(\Omega) \right\| + \left\| v_3; V^{l+1}_\beta(\Omega) \right\| + \|p; V^l_\beta(\Omega)\|,$$

то есть

$$\left\| (\bar{v}, p); D^l_\beta V(\Omega) \right\| = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^{l+1} (1+r)^{2(\beta - l - 1 + |\alpha|)} |D^\alpha v_1|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^{l+1} (1+r)^{2(\beta - l - 1 + |\alpha|)} |D^\alpha v_2|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^{l+1} (1+)^{2(\beta - l - 1 + |\alpha|)} |D^\alpha v_3|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^{l} (1+r)^{2(\beta - l + |\alpha|)} |D^\alpha p|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Определение 6. *Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^3$ с гладкой компактной границей. Пусть l – целое неотрицательное число.*

Введем пространство $H^{l+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ для описания следов функций из пространства $H^{l+1}(\Omega)$. Норма в $H^{l+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ определяется так:

$$\left\| z; H^{l+\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \right\| = \left(\sum_{|\alpha|=0}^{l} \int\limits_{\partial\Omega} \left| D^\alpha z \right|^2 dx + \int\limits_{\partial\Omega} \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{|\alpha|=l} \frac{\left| D^\alpha z(y) - D^\alpha z(x) \right|^2}{|y-x|^4} \, dx \, dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Известно, что если $z \in H^{l+1}(\Omega)$, то ее след $z\big|_{\partial\Omega} \in H^{l+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ и имеет место неравенство

$$\left\| z\big|_{\partial\Omega}; H^{l+\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \right\| \le c \left\| z; H^{l+1}(\Omega) \right\|,$$

где c не зависит от z.

Определение 7. *Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^3$.*

Пусть $\beta \in \mathbb{R}^1, l$ – целое неотрицательное число.

Обозначим через $R^l_\beta V(\Omega, \partial\Omega) \equiv V^{l-1}_\beta(\Omega)^3 \times V^l_\beta(\Omega) \times H^{l+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, где

$$\left\| (\bar{f}, g, \bar{h}); R^l_\beta V(\Omega, \partial\Omega) \right\| = \left\| f_1; V^{l-1}_\beta(\Omega) \right\| + \left\| f_2; V^{l-1}_\beta(\Omega) \right\| + \left\| f_3; V^{l-1}_\beta(\Omega) \right\| +$$

$$+ \left\| g; V^l_\beta(\Omega) \right\| + \left\| h_1; H^{l+\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \right\| + \left\| h_2; H^{l+\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \right\| + \left\| h_3; H^{l+\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \right\|,$$

где $\bar{f} = (f_1, f_2, f_3)$, $\quad \bar{h} = (h_1, h_2, h_3)$, то есть

$$\left\| (\bar{f}, g, \bar{h}); R^l_\beta V(\Omega, \partial\Omega) \right\| = \left(\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^{l-1} (1+r)^{2(\beta-l+1+|\alpha|)} |D^\alpha f_1|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$\left(\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^{l-1} (1+r)^{2(\beta-l+1+|\alpha|)} |D^\alpha f_2|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^{l-1} (1+r)^{2(\beta-l+1+|\alpha|)} |D^\alpha f_3|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$\left(\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^{l} (1+r)^{2(\beta-l+|\alpha|)} |D^\alpha g|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left(\sum_{|\alpha|=0}^{l} \int\limits_{\partial\Omega} \left| D^\alpha h_1 \right|^2 dx + \int\limits_{\partial\Omega} \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{|\alpha|=l} \frac{\left| D^\alpha h_1(y) - D^\alpha h_1(x) \right|^2}{|y-x|^4} \, dx \, dy \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left(\sum_{|\alpha|=0}^{l} \int\limits_{\partial\Omega} \left| D^\alpha h_2 \right|^2 dx + \int\limits_{\partial\Omega} \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{|\alpha|=l} \frac{\left| D^\alpha h_2(y) - D^\alpha h_2(x) \right|^2}{|y-x|^4} \, dx \, dy \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left(\sum_{|\alpha|=0}^{l} \int\limits_{\partial\Omega} \left| D^\alpha h_3 \right|^2 dx + \int\limits_{\partial\Omega} \int\limits_{\partial\Omega} \sum_{|\alpha|=l} \frac{\left| D^\alpha h_3(y) - D^\alpha h_3(x) \right|^2}{|y-x|^4} \, dx \, dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Определение 8. *Пусть* Ω *– открытое множество в* $\mathbb{R}^3$ *. Пусть* l *– целое, неотрицательное число,* $\gamma \in (l+\frac{1}{2}, l+\frac{3}{2})$*. Воспользуемся обозначением, данным в [5] и примем за* $\mathcal{R}^l_\gamma V(\Omega,\partial\Omega)$ *– пространство, состоящее из троек функций* $(\bar{f}, g, \bar{h})$ *таких, что*

$$\bar{f} = (f_1, f_2, f_3), \quad \bar{h} = (h_1, h_2, h_3)$$

и допускающих представление:

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{r^3}\bar{F}(\omega) + \bar{\tilde{f}}(x), \quad g(x) = \frac{1}{r^2}G(\omega) + \tilde{g}(x), \quad \bar{h}(x) = \bar{\tilde{h}}(x),$$

где

$$(\bar{F}, G) \in H^{l-1}(\Gamma)^3 \times H^l(\Gamma), \omega \in \Gamma, \Gamma = \{x : |x| = 1\}, \quad (\bar{\tilde{f}}, \tilde{g}, \bar{\tilde{h}}) \in R^l_\gamma V(\Omega,\partial\Omega).$$

Норма в пространстве $\mathcal{R}^l_\gamma V(\Omega,\partial\Omega)$ *определяется следующим образом:*

$$\left\|(\bar{f}, g, \bar{h}); \mathcal{R}^l_\gamma V(\Omega,\partial\Omega)\right\| = \left(\left\|(\bar{F}, G); H^{l-1}(\Gamma)^3 \times H^l(\Gamma)\right\|^2 + \left\|(\bar{\tilde{f}}, \tilde{g}, \bar{\tilde{h}}); R^l_\gamma V(\Omega,\partial\Omega)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Определение 9. *Пусть* Ω *– открытое множество в* $\mathbb{R}^3$*. Пусть* l *– целое, неотрицательное число,* $\gamma \in (l+\frac{1}{2}, l+\frac{3}{2})$*. Используя обозначения [5], опишем* $\mathcal{D}^l_\gamma V(\Omega)$ *– множество функций вида* $(\bar{v}, p)$ *таких, что*

$$\bar{v}(x) = \frac{1}{r}\bar{V}(\omega) + \bar{\tilde{v}}(x), \quad p(x) = \frac{1}{r^2}P(\omega) + \tilde{p}(x),$$

где

$$(\bar{V}, P) \in H^{l+1}(\Gamma)^3 \times H^l(\Gamma), \quad \omega \in \Gamma, \quad \Gamma = \{x : |x| = 1\}, \quad (\bar{\tilde{v}}, \tilde{p}) \in D^l_\gamma V(\Omega).$$

Норма в пространстве $\mathcal{D}^l_\gamma V(\Omega)$ определена формулой:

$$\left\|(\bar{v}, p); \mathcal{D}^l_\gamma V(\Omega)\right\| = \left(\left\|(\bar{V}, P) \in H^{l+1}(\Gamma)^3 \times H^l(\Gamma)\right\|^2 + \left\|(\bar{\tilde{v}}, \tilde{p}); D^l_\gamma V(\Omega)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Отметим, что на бесконечности $\bar{\tilde{v}}$ убывает быстрее, чем $\frac{1}{r}$, а $\tilde{p}$ убывает быстрее, чем $\frac{1}{r^2}$. Покажем это.

$$\bar{\tilde{v}} \in V^{l+1}_\gamma(\Omega)^3,$$

то есть

$$\tilde{v}_1 \in V^{l+1}_\gamma(\Omega), \quad \tilde{v}_2 \in V^{l+1}_\gamma(\Omega), \quad \tilde{v}_3 \in V^{l+1}_\gamma(\Omega), \quad \tilde{p} \in V^l_\gamma(\Omega).$$

1. $\tilde{v}_i \in V^{l+1}_\gamma(\Omega)$, то есть

$$\left\|\tilde{v}_i; V^{l+1}_\gamma(\Omega)\right\|^2 = \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^{l+1} (1+r)^{2(\gamma-l-1+|\alpha|)} |D^\alpha \tilde{v}_i|^2 \, dx.$$

Пусть $|\alpha| = 0$.

Из определения пространства $V_\gamma^{l+1}(\Omega)$ следует, что интеграл

$$\int\limits_\Omega (1+r)^{2(\gamma-l-1)}|\tilde{v}_i|^2\,dx$$

сходится.

Напомним, что если функция $f(x)$ на бесконечности ведет себя степенным образом и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx < +\infty,$$

то $|f(x)| \le \frac{c}{|x|^{n+\epsilon}}$, $\epsilon > 0$, для достаточно больших x.

Пусть $\tilde{v}_i = O(\frac{1}{r^m})$. Тогда

$$\int\limits_\Omega (1+r)^{2(\gamma-l-1)}\frac{1}{r^{2m}}\,dx < +\infty.$$

Показатель степени: $k = 2m - 2(\gamma - l - 1)$ и $k > 3$, так как $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Тогда

$$2m - 2(\gamma - l - 1) > 3,$$

следовательно $m > \frac{1}{2} + \gamma - l$. Так как $\gamma > l + \frac{1}{2}$, то $m > 1$, следовательно $\tilde{v}_i = O(\frac{1}{r^{1+\epsilon}})$, $\epsilon > 0$.

2. Аналогично получаем для $\tilde{p} \in V_\gamma^l(\Omega)$, то есть

$$\left\|\tilde{p}; V_\gamma^l(\Omega)\right\|^2 = \int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^{l} (1+r)^{2(\gamma-l+|\alpha|)}|D^\alpha\tilde{p}|^2\,dx.$$

Пусть $|\alpha| = 0$.

Из определения пространства $V_\gamma^l(\Omega)$ следует, что интеграл

$$\int\limits_\Omega (1+r)^{2(\gamma-l)}|\tilde{p}|^2\,dx$$

сходится.

Пусть $\tilde{p} = O(\frac{1}{r^{m_1}})$. Тогда

$$\int\limits_\Omega (1+r)^{2(\gamma-l)}\frac{1}{r^{2m_1}}\,dx < +\infty.$$

Показатель степени: $2m_1 - 2(\gamma - l) > 3$, так как $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Тогда

$$m_1 > \frac{3}{2} + \gamma - l.$$

Так как $\gamma > l + \frac{1}{2}$, то $m_1 > 2$, следовательно $\tilde{p} = O(\frac{1}{r^{2+\epsilon}})$, $\epsilon > 0$.

Пространство $\mathcal{D}^l_\gamma V(\Omega)$ есть пространство функций, которому принадлежат PR-решения, то есть функции, имеющие заданный порядок убывания на бесконечности. Пространство $\mathcal{R}^l_\gamma V(\Omega, \partial\Omega)$ есть пространство данных задачи Стокса, решения которых принадлежат пространству $\mathcal{D}^l_\gamma V(\Omega)$.

3. Разрешимость задачи Стокса

Пусть $(\bar{v}, p)$ есть PR-решение задачи (1)-(4) из $D^l_\gamma V(\Omega)$. Это, в частности, означает, что скорость $\bar{v}$ убывает на бесконечности не медленнее, чем $\frac{c}{r}$, а давление убывает на бесконечности не медленнее, чем $\frac{c_1}{r^2}$. Так как в уравнении (1) системы Стокса содержится дифференцирование скорости второго порядка и давления первого порядка, то очевидно, что $\bar{f}$ убывает на бесконечности не медленнее, чем $\frac{c_2}{r^3}$. Аналогично функция g должна убывать на бесконечности не медленнее, чем $\frac{c_3}{r^2}$. Этими соображениями и продиктован выбор пространства $R^l_\gamma V(\Omega, \partial\Omega)$ для тройки $(\bar{f}, g, \bar{h})$ – правых частей исходной задачи (1)-(3).

Рассмотрим задачу Стокса в сферических координатах:

$$x_1 = r\, sin\theta\, cos\phi,$$

$$x_2 = r\, sin\theta\, sin\phi,$$

$$x_3 = r\, cos\theta.$$

Для этого перепишем систему Стокса в сферических координатах (r, ω), то есть

$$r = |x|, \omega = (\phi, \theta), 0 \le \phi < 2\pi,\ 0 \le \theta < \pi.$$

Будем искать решение в виде

$$\bar{v}(x) = r^\lambda \bar{V}(\omega),\ p(x) = r^{\lambda-1} P(\omega), \lambda \in \mathbb{C}, \tag{5}$$

которые разрешают систему Стокса в $\mathbb{R}^3$

$$-\nu\Delta\bar{v} + \nabla p = 0, \nabla \cdot \bar{v} = 0,\ x \in R^3 \backslash 0. \tag{6}$$

Для пары $(\bar{V}, P)$ получаем систему дифференциальных уравнений на единичной сфере $\Gamma = \{x : |x| = 1\}$, зависящих от комплексного параметра λ.

Оператор Лапласа представим в виде $\Delta\bar{v} = \nabla(\nabla \cdot \bar{v}) - \nabla \times (\nabla \times \bar{v})$, где «$\times$» означает векторное произведение в $\mathbb{R}^3$.

Вектор скорости принимает вид

$$\bar{v} = (r^\lambda V_r(\theta, \phi), r^\lambda V_\theta(\theta, \phi), r^\lambda V_r(\theta, \phi)).$$

Далее для удобства записи обозначим $(V_r(\theta, \phi), V_\theta(\theta, \phi), V_r(\theta, \phi))$ через (V_r, V_θ, V_ϕ).

$$\nabla \cdot \bar{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 r^\lambda V_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(r^\lambda V_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(r^\lambda V_\phi) =$$

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^{2+\lambda} V_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(r^\lambda V_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(r^\lambda V_\phi) =$$

$$= (2+\lambda)r^{\lambda-1}V_r + \frac{r^{\lambda-1}}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(V_\theta\sin\theta) + \frac{r^{\lambda-1}}{\sin\theta}\frac{\partial V_\phi}{\partial\phi}.$$

$$\nabla(\nabla\cdot\bar{v}) = \frac{\partial}{\partial r}\left((2+\lambda)r^{\lambda-1}V_r + \frac{r^{\lambda-1}}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(V_\theta\sin\theta) + \frac{r^{\lambda-1}}{\sin\theta}\frac{\partial V_\phi}{\partial\phi}\right)\vec{i}_r +$$
$$+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left((2+\lambda)r^{\lambda-1}V_r + \frac{r^{\lambda-1}}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(V_\theta\sin\theta) + \frac{r^{\lambda-1}}{\sin\theta}\frac{\partial V_\phi}{\partial\phi}\right)\vec{i}_\theta$$
$$+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left((2+\lambda)r^{\lambda-1}V_r + \frac{r^{\lambda-1}}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(V_\theta\sin\theta) + \frac{r^{\lambda-1}}{\sin\theta}\frac{\partial V_\phi}{\partial\phi}\right)\vec{i}_\phi,$$

где $(\vec{i}_r, \vec{i}_\theta, \vec{i}_\phi)$ – базисные векторы сферической системы координат.

После дифференцирования получаем

$$\nabla(\nabla\cdot\bar{v}) = \left((\lambda+2)(\lambda-1)r^{\lambda-2}V_r + (\lambda-1)r^{\lambda-2}(\operatorname{ctg}\theta V_\theta + \frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}) + (\lambda-1)r^{\lambda-2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V_\phi}{\partial\phi}\right)\vec{i}_r +$$
$$+\left((\lambda+2)r^{\lambda-2}\frac{\partial V_r}{\partial\theta} + r^{\lambda-2}\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} - r^{\lambda-2}\frac{1}{\sin^2\theta}V_\theta + r^{\lambda-2}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial\theta^2} +\right.$$
$$\left.+r^{\lambda-2}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial V_\phi}{\partial\phi} + r^{\lambda-2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 V_\phi}{\partial\phi\partial\theta}\right)\vec{i}_\theta +$$
$$+\left((\lambda+2)r^{\lambda-2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\phi} + r^{\lambda-2}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial V_\theta}{\partial\phi} + r^{\lambda-2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 V_\phi}{\partial\phi\partial\theta} + r^{\lambda-2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_\phi}{\partial\phi^2}\right)\vec{i}_\phi.$$

Далее

$$\nabla\times\bar{v} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(r^\lambda\sin\theta V_\phi) - r^\lambda\frac{\partial V_\theta}{\partial\phi}\right)\vec{i}_r + \frac{1}{r}\left(r^\lambda\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(r\cdot r^\lambda V_\phi)}{\partial r}\right)\vec{i}_\theta +$$
$$+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r\cdot r^\lambda V_\theta)}{\partial r} - r^\lambda\frac{\partial V_r}{\partial\theta}\right)\vec{i}_\phi.$$

$$\nabla\times(\nabla\times\bar{v}) = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{1}{r}\{\frac{\partial(r\cdot r^\lambda V_\theta)}{\partial r} - r^\lambda\frac{\partial V_r}{\partial\theta}\}) -\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial\phi}(\frac{1}{r}\{r^\lambda\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(r\cdot r^\lambda V_\phi)}{\partial r}\})\right)\vec{i}_r +$$
$$+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(\frac{1}{r\sin\theta}\{\frac{\partial}{\partial\theta}(r^\lambda\sin\theta V_\phi) - r^\lambda\frac{\partial V_\theta}{\partial\phi}\}) - \frac{\partial}{\partial r}(r\frac{1}{r}\{\frac{\partial(r\cdot r^\lambda V_\theta)}{\partial r} - r^\lambda\frac{\partial V_r}{\partial\theta}\})\right)\vec{i}_\theta +$$
$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{1}{r}\{r^\lambda\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(r\cdot r^\lambda V_\phi)}{\partial r}\}) - \frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{1}{r\sin\theta}\{\frac{\partial}{\partial\theta}(r^\lambda\sin\theta V_\phi) - r^\lambda\frac{\partial V_\theta}{\partial\phi}\})\right)\vec{i}_\phi,$$

$$\nabla\times(\nabla\times\bar{v}) =$$

$$= ((\lambda+1)r^{\lambda-2}\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} - r^{\lambda-2}\frac{\partial^2 V_r}{\partial\theta^2} + (\lambda+1)r^{\lambda-2}\operatorname{ctg}\theta V_\theta - r^{\lambda-2}\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial V_r}{\partial\theta} - r^{\lambda-2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_r}{\partial\phi^2} +$$

$$+(\lambda+1)r^{\lambda-2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V_\phi}{\partial\phi})\vec{i}_r + (r^{\lambda-2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 V_\phi}{\partial\phi\partial\theta} + r^{\lambda-2}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial V_\phi}{\partial\phi} - r^{\lambda-2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial\phi^2} -$$

$$-r^{\lambda-2}(\lambda+1)\lambda V_\theta + r^{\lambda-2}\lambda\frac{\partial V_r}{\partial\theta})\vec{i}_\theta + (r^{\lambda-2}\lambda\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\phi} - r^{\lambda-2}\lambda(\lambda+1)V_\phi + r^{\lambda-2}\frac{1}{\sin^2\theta}V_r -$$

$$-r^{\lambda-2}\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial V_\phi}{\partial\theta} - r^{\lambda-2}\frac{\partial^2 V_\phi}{\partial\theta^2} + r^{\lambda-2}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial V_\phi}{\partial\phi} + r^{\lambda-2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial\phi\partial\theta})\vec{i}_\phi.$$

Таким образом,

$$\Delta\bar{v} = r^{\lambda-2}\Bigg((\lambda+2)(\lambda-1)V_r + \frac{\partial^2 V_r}{\partial\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial V_r}{\partial\theta} +$$

$$+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_r}{\partial\phi^2} - 2(\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V_\phi}{\partial\phi} + \operatorname{ctg}\theta V_\theta)\Bigg)\vec{i}_r +$$

$$+r^{\lambda-2}\Bigg((\lambda+1)\lambda V_\theta + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial\theta^2} - \frac{1}{\sin^2\theta}V_\theta + 2\frac{\partial V_r}{\partial\theta}\Bigg)\vec{i}_\theta +$$

$$+r^{\lambda-2}\Bigg((\lambda+1)\lambda V_\phi + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial V_\phi}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_\phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 V_\phi}{\partial\theta^2} - \frac{1}{\sin^2\theta}V_\phi + 2\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\phi}\Bigg)\vec{i}_\phi.$$

Для давления $p(x) = r^{\lambda-1}P(\theta,\phi)$ имеем

$$\nabla p = r^{\lambda-2}\Bigg((\lambda-1)P(\theta,\phi)\vec{i}_r + \frac{\partial P(\theta,\phi)}{\partial\phi}\vec{i}_\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial P(\theta,\phi)}{\partial\phi}\vec{i}_\phi\Bigg).$$

Таким образом, в сферических координатах систему (6) можно записать следующим образом

$$-\nu\Bigg((\lambda+1)\lambda-2\Bigg)V_r - \nu\Bigg(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial V_r}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_r}{\partial\phi^2}\Bigg) +$$

$$+\frac{2\nu}{\sin\theta}\Bigg(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta V_\theta) + \frac{\partial V_\phi}{\partial\phi}\Bigg) + (\lambda-1)P = 0, \tag{7}$$

$$-\nu\Bigg((\lambda+1)\lambda V_\theta\Bigg) - \nu\Bigg(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial\phi^2}\Bigg) +$$

$$+\frac{\nu V_\theta}{\sin^2\theta} - 2\nu\frac{\partial V_r}{\partial\theta} + \frac{\partial P}{\partial\theta} = 0, \tag{8}$$

$$-\nu\Bigg((\lambda+1)\lambda V_\phi\Bigg) - \nu\Bigg(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial V_\phi}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_\phi}{\partial\phi^2}\Bigg) -$$

$$-\frac{2\nu}{\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\phi} + \frac{\nu V_\phi}{\sin^2\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial\phi} = 0, \tag{9}$$

$$-(\lambda+2)V_r - \frac{1}{\sin\theta}\Bigg(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta V_\theta) + \frac{\partial V_\phi}{\partial\phi}\Bigg) = 0. \tag{10}$$

Обозначим полученную систему (7)-(10) через $S(\lambda; D_\omega)(\bar{V}, P) = 0,\ \omega \in \Gamma$.

Семейство отображений $\lambda \to S(\lambda; \cdot)$ называется пучком операторов, связанным с системой Стокса (6). Значения комплексной переменной λ, для которой задача (7)-(10) имеет нетривиальные решения, называются собственными значениями задачи и соответствующие нетривиальные решения называются собственными векторами. Очевидно, что функции вида (5) – решения системы Стокса тогда и только тогда, когда λ – собственное значение задачи (7)-(10).

В работе [5] была доказана

Теорема 2. *Собственные числа пучка $\lambda \to S(\lambda, \cdot)$ состоят из чисел $\lambda \in \mathbb{Z}$.*

Если $\lambda \in \mathbb{Z}$, то существуют нетривиальные решения $S(\lambda; D_\omega)(\bar{V}, P) = 0$, которые являются гладкими на сфере Γ. В случае $\lambda \geq 0$ собственные степенные решения $(r^\lambda \bar{V}(\omega), r^{\lambda-1}P(\omega))$ состоят каждый из однородных полиномов. А в случае $\lambda < 0$ эти решения могут быть получены дифференцированием столбцов

$$E^{(j)}(x) = \frac{1}{8\pi\nu|x|^3}\left(\delta_{j1}|x|^2 + x_1x_j, \delta_{j2}|x|^2 + x_2x_j\delta_{j3}|x|^2 + x_3x_j, 2\nu x_j\right)^T, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$E^{(4)}(x) = \left(\nabla_x \frac{1}{2\pi\nu|x|}, \quad 0\right)^T \tag{11}$$

фундаментальной матрицы E системы Стокса.

В частности, значению $\lambda = -1$ соответствуют три степенных решения $(\bar{v}^{(j)}, p^{(j)}) = E^{(j)}, j = 1, 2, 3$:

$$(\bar{v}^{(1)}, p^{(1)}) = \frac{1}{8\pi\nu|x|^3}\left(|x|^2 + x_1^2, x_1x_2, x_1x_3, 2\nu x_1\right)^T,$$

$$(\bar{v}^{(2)}, p^{(2)}) = \frac{1}{8\pi\nu|x|^3}\left(x_1x_2, |x|^2 + x_2^2, x_2x_3, 2\nu x_2\right)^T,$$

$$(\bar{v}^{(3)}, p^{(3)}) = \frac{1}{8\pi\nu|x|^3}\left((x_1x_3, x_2x_3, |x|^2 + x_3^2, 2\nu x_3\right)^T.$$

Степенное решение, соответствующее значению $\lambda = 0$, имеет вид $(\bar{v}, p) = (\bar{c}, 0),\ \bar{c} \in \mathbb{R}^3$.

Сформулируем и докажем следующую теорему

Теорема 3. *Пусть $S(\lambda; \cdot)$ – пучок операторов задачи (6).*

Задача

$$S(-1; D_\omega)(\bar{V}, P) = (\bar{F}, G),\ \omega \in \Gamma, \tag{12}$$

где $(\bar{F}, G) \in H^{l-1}(\Gamma)^3 \times H^l(\Gamma)$, имеет решение $(\bar{V}, P) \in H^{l+1}(\Gamma)^3 \times H^l(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда выполняется условие согласования

$$\int\limits_\Gamma \bar{F} \cdot \bar{c}\, d\Gamma_\omega = 0 \quad \forall \bar{c} \in \mathbb{R}^3. \tag{13}$$

Решение $(\bar{V}, P)$ не является единственным. Однородная задача (12) имеет три линейно независимых решения:

$$\xi^{(1)}(\omega) = \frac{1}{8\pi\nu}\bigg(1+\sin^2\theta\cos^2\phi, \sin^2\theta\sin\phi\cos\phi, \sin\theta\cos\theta\cos\phi, 2\nu\sin\theta\cos\phi\bigg),$$

$$\xi^{(2)}(\omega) = \frac{1}{8\pi\nu}\bigg(sin^2\theta\cos\phi\sin\phi, 1+\sin^2\theta\sin^2\phi, \sin\theta\cos\theta\sin\phi, 2\nu\sin\theta\sin\phi\bigg), \quad (14)$$

$$\xi^{(3)}(\omega) = \frac{1}{8\pi\nu}\bigg(\sin\theta\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi\cos\phi, 1+\cos^2\theta, 2\nu\cos\theta\bigg).$$

Заметим, что $\xi^{(i)}(\omega)$ – след столбца $E^{(j)}$, $\quad j = 1, 2, 3$ на сфере Γ.

Доказательство. Так как мы ищем физически осмысленные решения задачи Стокса, то рассмотрим задачу (7) -(10) при $\lambda = -1$.

Оператор $S(-1; D_\omega)$ будет иметь вид:

$$2\nu V_r - \nu\bigg(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial V_r}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_r}{\partial\phi^2}\bigg) + \frac{2\nu}{\sin\theta}\bigg(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta V_\theta) + \frac{\partial V_\phi}{\partial\phi}\bigg) - 2P = 0,$$

$$-\nu\bigg(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial\phi^2}\bigg) + \frac{\nu V_\theta}{\sin^2\theta} - 2\nu\frac{\partial V_r}{\partial\theta} + \frac{\partial P}{\partial\theta} = 0,$$

$$-\nu\bigg(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial V_\phi}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_\phi}{\partial\phi^2}\bigg) - \frac{2\nu}{\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\phi} + \frac{\nu V_\phi}{\sin^2\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial\phi} = 0,$$

$$-V_r - \frac{1}{\sin\theta}\bigg(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta V_\phi) + \frac{\partial V_\phi}{\partial\phi}\bigg) = 0.$$

Найдем для оператора $S(-1; D_\omega)$ сопряженный ему оператор. Сопряженным оператору $S(-1; D_\omega)$ является оператор $S(0; D_\omega)$ вида:

$$2\nu V_r - \nu\bigg(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial V_r}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_r}{\partial\phi^2}\bigg) + \frac{2\nu}{\sin\theta}\bigg(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta V_\theta) + \frac{\partial V_\phi}{\partial\phi}\bigg) - P = 0,$$

$$-\nu\bigg(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial\phi^2}\bigg) + \frac{\nu V_\theta}{\sin^2\theta} - 2\nu\frac{\partial V_r}{\partial\theta} + \frac{\partial P}{\partial\theta} = 0,$$

$$-\nu\bigg(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial V_\phi}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_\phi}{\partial\phi^2}\bigg) - \frac{2\nu}{\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\phi} + \frac{\nu V_\phi}{\sin^2\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial\phi} = 0,$$

$$-2V_r - \frac{1}{\sin\theta}\bigg(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta V_\theta) + \frac{\partial V_\phi}{\partial\phi}\bigg) = 0.$$

Докажем, что операторы $S(-1; D_\omega)$ и $S(0; D_\omega)$ сопряжены. Для этого достаточно показать, что

$$< S(-1; D_\omega)(\bar{V}, P), (\bar{U}, Q) >=< (\bar{V}, P), S(0; D_\omega)(\bar{U}, Q) >, \quad (15)$$

где $< \cdot, \cdot >$ означает скалярное произведение в пространстве $L^2(\Gamma)$.

К левой части соотношения (15) применим формулу интегрирования по частям и учтем периодичность функций $\bar{V}(\omega), P(\omega), \bar{U}(\omega), Q(\omega)$:

$$< S(-1;D_\omega)(\bar{V},P),(\bar{U},Q) >= \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta U_r[2\nu V_r -$$

$$-\nu\Bigg(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial V_r}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_r}{\partial\phi^2}\Bigg) + \frac{2\nu}{\sin\theta}\Bigg(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta V_\theta) + \frac{\partial V_\phi}{\partial\phi}] - 2P\Bigg)\,d\theta +$$

$$+\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta U_\theta\Bigg(-\nu\Bigg(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial\phi^2}\Bigg) + \frac{\nu V_\theta}{\sin^2\theta} - 2\nu\frac{\partial V_r}{\partial\theta} + \frac{\partial P}{\partial\theta}\Bigg)\,d\theta +$$

$$+\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta U_\phi\Bigg(-\nu\Bigg(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial V_\phi}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_\phi}{\partial\phi^2}\Bigg) -$$

$$-\frac{2\nu}{\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\phi} + \frac{\nu V_\phi}{\sin^2\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial\phi}\Bigg)\,d\theta +$$

$$+\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta Q\Bigg(-V_r - \frac{1}{\sin\theta}\Bigg(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta V_\theta) + \frac{\partial V_\phi}{\partial\phi}\Bigg)\Bigg)\,d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi}\Bigg(2\nu V_r U_r \sin\theta - \nu\Bigg(\frac{1}{\sin\theta}\sin\theta U_r\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial V_r}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\sin\theta U_r\frac{\partial^2 V_r}{\partial\phi^2}\Bigg) +$$

$$+\frac{2\nu}{\sin\theta}\sin\theta U_r\Bigg(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta V_\theta) + \frac{\partial V_\phi}{\partial\phi}\Bigg) - 2P\sin\theta U_r\Bigg)\,d\theta +$$

$$+\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi}\Bigg(-\nu\Bigg(\frac{1}{\sin\theta}\sin\theta U_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\sin\theta U_\theta\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial\phi^2}\Bigg) + \frac{\nu V_\theta}{\sin^2\theta}\sin\theta U_\theta -$$

$$-2\nu\sin\theta U_\theta\frac{\partial V_r}{\partial\theta} + \sin\theta U_\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}\Bigg)\,d\theta +$$

$$+\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi}\Bigg(-\nu\Bigg(\frac{1}{\sin\theta}\sin\theta U_\phi\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial V_\phi}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\sin\theta U_\phi\frac{\partial^2 V_\phi}{\partial\phi^2}\Bigg) - \frac{2\nu}{\sin\theta}\sin\theta U_\phi\frac{\partial V_r}{\partial\phi} +$$

$$+\frac{\nu V_\phi}{\sin^2\theta}\sin\theta U_\phi + \frac{1}{\sin\theta}\sin\theta U_\phi\frac{\partial P}{\partial\phi}\Bigg)\,d\theta +$$

$$+\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi}\Bigg(-V_r\sin\theta Q - \frac{1}{\sin\theta}\sin\theta Q\Bigg(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta V_\theta) + \frac{\partial V_\phi}{\partial\phi}\Bigg)\Bigg)\,d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi}\Bigg(2\nu V_r U_r\sin\theta - \nu\Bigg(\Bigg(U_r\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial V_r}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin\theta}U_r\frac{\partial^2 V_r}{\partial\phi^2}\Bigg) +$$

$$+2\nu U_r\biggl(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta V_\theta)+\frac{\partial V_\phi}{\partial\phi}\biggr)-2P\sin\theta U_r\biggr)\,d\theta+$$

$$+\int\limits_0^{2\pi}d\phi\int\limits_0^{\pi}\biggl(-\nu\biggl(U_\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin\theta}U_\theta\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial\phi^2}\biggr)+\frac{\nu V_\theta}{\sin\theta}U_\theta-$$

$$-2\nu\sin\theta U_\theta\frac{\partial V_r}{\partial\theta}+\sin\theta U_\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}\biggr)+$$

$$+\int\limits_0^{2\pi}d\phi\int\limits_0^{\pi}\biggl(-\nu\biggl(U_\phi\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial V_\phi}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin\theta}U_\phi\frac{\partial^2 V_\phi}{\partial\phi^2}\biggr)-2\nu U_\phi\frac{\partial V_r}{\partial\phi}+$$

$$+\frac{\nu V_\phi}{\sin\theta}U_\phi+U_\phi\frac{\partial P}{\partial\phi}\biggr)\,d\theta+$$

$$+\int\limits_0^{2\pi}d\phi\int\limits_0^{\pi}\biggl(-V_r\sin\theta Q-Q\biggl(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta V_\theta)+\frac{\partial V_\phi}{\partial\phi}\biggr)\biggr)\,d\theta=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\phi\int\limits_0^{\pi}\biggl(2\nu V_rU_r\sin\theta+\nu\sin\theta\frac{\partial V_r}{\partial\theta}\frac{\partial U_r}{\partial\theta}+\nu\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U_r}{\partial\phi}\frac{\partial V_r}{\partial\phi}-$$

$$-2\nu\sin\theta V_\theta\frac{\partial U_r}{\partial\theta}-2\nu V_\phi\frac{\partial U_r}{\partial\phi}-2P\sin\theta U_r\biggr)\,d\theta+$$

$$+\int\limits_0^{2\pi}d\phi\int\limits_0^{\pi}\biggl(\nu\sin\theta\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta}\frac{\partial U_\theta}{\partial\theta}+\nu\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U_\theta}{\partial\phi}\frac{\partial V_\theta}{\partial\phi}+\frac{\nu V_\theta}{\sin\theta}U_\theta+$$

$$+2\nu\cos\theta V_rU_\theta+2\nu\sin\theta V_r\frac{\partial U_\theta}{\partial\theta}-\cos\theta U_\theta P-\sin\theta P\frac{\partial U_\theta}{\partial\theta}\biggr)\,d\theta+$$

$$+\int\limits_0^{2\pi}d\phi\int\limits_0^{\pi}\biggl(\nu\sin\theta\frac{\partial V_\phi}{\partial\theta}\frac{\partial U_\phi}{\partial\theta}+\nu\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U_\phi}{\partial\phi}\frac{\partial V_\phi}{\partial\phi}+2\nu V_r\frac{\partial U_\phi}{\partial\phi}+\frac{\nu V_\phi}{\sin\theta}U_\phi-P\frac{\partial U_\phi}{\partial\phi}\biggr)\,d\theta+$$

$$+\int\limits_0^{2\pi}d\phi\int\limits_0^{\pi}\biggl(-V_r\sin\theta Q+\sin\theta V_\theta\frac{\partial Q}{\partial\theta}+V_\phi\frac{\partial Q}{\partial\phi}\biggr)\,d\theta=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\phi\int\limits_0^{\pi}\biggl(2\nu V_rU_r\sin\theta-\nu\cos\theta V_r\frac{\partial U_r}{\partial\theta}-\nu\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 U_r}{\partial\phi^2}V_r-\nu\sin\theta V_r\frac{\partial^2 U_r}{\partial\theta^2}-$$

$$-2\nu\sin\theta V_\theta\frac{\partial U_r}{\partial\theta}-2\nu V_\phi\frac{\partial U_r}{\partial\phi}-2P\sin\theta U_r\biggr)\,d\theta+$$

$$+\int\limits_0^{2\pi}d\phi\int\limits_0^{\pi}\biggl(-\nu\sin\theta V_\theta\frac{\partial U_\theta}{\partial\theta}-\nu\frac{1}{\sin\theta}V_\theta\frac{\partial^2 U_\theta}{\partial\phi^2}-\nu\cos\theta V_\theta\frac{\partial U_\theta}{\partial\theta}+\frac{\nu V_\theta}{\sin\theta}U_\theta+$$

$$+2\nu\cos\theta U_\theta V_r + 2\nu\sin\theta V_r\frac{\partial U_\theta}{\partial\theta} - \cos\theta U_\theta P - \sin\theta P\frac{\partial U_\theta}{\partial\theta}\Big)\,d\theta +$$

$$+\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^{\pi}\Big(- \nu\sin\theta V_\phi\frac{\partial^2 lU_\phi}{\partial\theta^2} - \nu\frac{1}{\sin\theta}V_\phi\frac{\partial^2 U_\phi}{\partial\phi^2} - \nu\cos\theta V_\phi\frac{\partial U_\phi}{\partial\theta} + 2\nu V_r\frac{\partial U_\phi}{\partial\phi} +$$

$$+\frac{\nu V_\phi}{\sin\theta}U_\phi - P\frac{\partial U_\phi}{\partial\phi}\Big)\,d\theta +$$

$$+\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^{\pi}\Big(- V_r\sin\theta Q + \sin\theta V_\theta\frac{\partial Q}{\partial\theta} + V_\phi\frac{\partial Q}{\partial\phi}\Big)\,d\theta =$$

$$=\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^{\pi}\sin\theta V_r\Big(2\nu U_r - \nu\big[\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial U_r}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 U_r}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U_r}{\partial\phi^2}\big] +$$

$$+\frac{2\nu}{\sin\theta}\Big(\cos\theta U_\theta + \sin\theta\frac{\partial U_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial U_\phi}{\partial\phi}\Big) - Q\Big)\,d\theta +$$

$$=\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^{\pi}\sin\theta V_\theta\Big(- \nu\big[\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial U_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U_\theta}{\partial\phi^2}\big] + \frac{\nu U_\theta}{\sin^2\theta} - 2\nu\frac{\partial U_r}{\partial\theta} + \frac{\partial Q}{\partial\theta}\Big)\,d\theta +$$

$$=\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^{\pi}\sin\theta V_\phi\Big(- \nu\big[\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial U_\phi}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 U_\phi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U_\phi}{\partial\phi^2}\big] +$$

$$+\frac{\nu U_\phi}{\sin^2\theta} - \frac{2\nu}{\sin\theta}\frac{\partial U_r}{\partial\phi} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Q}{\partial\phi}\Big)\,d\theta +$$

$$=\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^{\pi}\sin\theta P\Big(- 2U_r - \frac{1}{\sin\theta}\Big[\sin\theta\frac{\partial U_\theta}{\partial\theta} + \cos\theta U_\theta + \frac{\partial U_\phi}{\partial\phi}\Big]\Big)\,d\theta =$$

$$=\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^{\pi}\sin\theta V_r\Big(2\nu U_r - \nu\Big(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial U_r}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U_r}{\partial\phi^2}\Big) +$$

$$+\frac{2\nu}{\sin\theta}\Big(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta U\theta) + \frac{\partial U_\phi}{\partial\phi}\Big) - Q\Big)\,d\theta +$$

$$=\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^{\pi}\sin\theta V_\theta\Big(-\nu\Big(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial U_\theta}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U_\theta}{\partial\phi^2}\Big) + \frac{\nu U_\theta}{\sin^2\theta} - 2\nu\frac{\partial U_r}{\partial\theta} + \frac{\partial Q}{\partial\theta}\Big)\,d\theta +$$

$$+\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^{\pi}\sin\theta V_\phi\Big(- \nu\Big(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial U_\phi}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U_\phi}{\partial\phi^2}\Big) +$$

$$+\frac{\nu U_\phi}{\sin^2\theta} - \frac{2\nu}{\sin\theta}\frac{\partial U_r}{\partial\phi} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Q}{\partial\phi}\Big)\,d\theta +$$

$$+\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta P\Big(-2U_r - \frac{1}{\sin\theta}\Big(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta U_\theta) + \frac{\partial U_\phi}{\partial\phi}\Big)\Big)\, d\theta. \qquad (16)$$

Правая часть (15) имеет вид:

$$< (\bar V, P), S(0; D_\omega)(\bar U, Q) >=$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta V_r \Big(2\nu U_r - \nu\Big(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial U_r}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U_r}{\partial\phi^2}\Big) +$$

$$+ \frac{2\nu}{\sin\theta}\Big(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta U_\theta) + \frac{\partial U_\phi}{\partial\phi}\Big) - Q\Big)\, d\theta +$$

$$+\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta V_\theta \Big(-\nu\Big(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial U_\theta}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U_\theta}{\partial\phi^2}\Big) + \frac{\partial U_r}{\partial\theta} +$$

$$+ \frac{\nu U_\theta}{\sin^2\theta} - 2\nu\frac{\partial U_r}{\partial\theta} + \frac{\partial Q}{\partial\theta}\Big)\, d\theta + \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta V_\phi \Big(-\nu\Big(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial U_\phi}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U_\phi}{\partial\phi^2}\Big) -$$

$$- \frac{2\nu}{\sin\theta}\frac{\partial U_r}{\partial\phi} + \frac{\nu U_\phi}{\sin^2\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial Q}{\partial\phi}\Big)\, d\theta +$$

$$+\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta P\Big(-2U_r - \frac{1}{\sin\theta}\Big(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta U_\theta) + \frac{\partial U_\phi}{\partial\phi}\Big)\Big)\, d\theta. \qquad (17)$$

Сравнивая полученные результаты, делаем вывод, что верна формула (15). Таким образом, операторы $S(-1; D_\omega)$ и $S(0; D_\omega)$ сопряжены.

В работе [6] установлено, что система Стокса является эллиптической. Из этого факта следует, что порожденный оператором системы Стокса оператор $S(\lambda; D_\omega)$ обладает свойством фредгольмовости, которое означает, в частности, что операторное уравнения $S(-1; D_\omega)(\bar V, P) = (\bar F, G)$ разрешимо тогда и только тогда, когда $(\bar F, G)$ ортогонально всем решениям сопряженного уравнения. Из (15) следует, что для уравнения

$$S(-1; D_\omega)(\bar V, P) = (\bar F, G)$$

сопряженное уравнение имеет вид $S(0; D_\omega)(\bar U, Q) = (\bar H, I)$.

Найдем решения сопряженного однородного уравнения $S(0; D_\omega)(\bar U, Q) = (\bar 0, 0)$.

В теореме 2 доказано, что ненулевые решения сопряженного однородного уравнения

$$S(0; D_\omega)(\bar U, Q) = (\bar 0, 0)$$

есть вектор $(\bar c, 0)$ $\forall \bar c \in \mathbb{R}^3$. Следовательно, уравнение

$$S(-1; D_\omega)(\bar V, P) = (\bar F, G)$$

разрешимо тогда и только тогда, когда $(\bar F, G)$ ортогонально $(\bar c, 0)$ $\forall \bar c \in \mathbb{R}^3$. Это означает, что выполняется условие согласования (13).

Для линейно-независимых решений $\xi^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$ однородной задачи (12) в силу теоремы 2, получаем формулу (14). $\square$

Заключение

В статье сформулированы условия разрешимости стационарной трехмерной задачи об обтекании ограниченного тела потоком вязкой жидкости. Задача рассмотрена в линеаризованной постановке для случая, когда скорость жидкости стремится к нулю на бесконечности. Найдены решения стационарной задачи, обладающие определенными свойствами на бесконечности. Представляется интересным описать класс функций для правой части уравнения движения, которые удовлетворяют условию согласования. Полученные результаты могут быть использованы при решении нелинейной задачи Стокса с помощью итерационных методов.

Список литературы

[1] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.

[2] Finn R. On the exterior srationary problem for the Navier-Stokes equations, and associated perturbation problem // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1965. Vol. 19. Pp. 363–406.

[3] Mogilevski I., Zakharova I. The stationary flows for a certain type of nonnewtonian fluids // Far East Journal of Applied Mathematics. 2004. Vol. 15, no. 2. Pp. 259–277.

[4] Захарова И.В. О единственности решения задачи об обтекании ограниченного тела установившимся потоком неньютоновской жидкости // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2007. № 7. С. 61–88.

[5] Nazarov S., Pileskas K. On steady Stokes and Navier-Stokes problems with zero velocity at infinity in a three-dimentional exterior domain // Journal of Mathematics of Kyoto University. 2000. Vol. 40. Pp. 475–492.

[6] Nazarov S.A., Plamenevskii B.A. Elliptic boundary value problems in domains with piecewise smooth boundaries. Berlin: Walter de Gruyter and Co, 1994.

[7] Borchers W., Pileskas K. Existence, uniqueness and asymptotics of steady jets // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1992. Vol. 120. Pp. 1–49.

Библиографическая ссылка

Захарова И.В. О разрешимости внешней задачи Стокса // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 1. С. 75–92.

Сведения об авторах

1. **Захарова Ирина Владимировна**
доцент кафедры математической статистики и системного анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

ON THE SOLVABILITY OF THE EXTERNAL STOKES PROBLEM

Zakharova Irina Vladimirovna
Associate Professor at Mathematical Statistics and Systems Analysis department,
Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU.

Received 20.12.2015, revised 20.01.2016.

The stationary problem of a flow about solid by the stream of viscous non-Newtonian fluid is investigated. In paper we consider the external Stokes problem, conditions for its solvability are formulated. Solution of the stationary problem with certain properties at infinity is investigated.

Keywords: exterior Stokes problem, non-Newtonian fluids.

Bibliographic citation

Zakharova I.V. On the solvability of the external Stokes problem. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2016, no. 1, pp. 75–92. (in Russian)

References

[1] Ladyzhenskaya O.A. *Matematicheskie Voprosy Dinamiki Vyazkoi Neszhimaemoi Zhidkosti* [Mathematical Theory of Viscous Incompressible Fluid]. "Nauka" Publ., Moscow, 1970. 288 p. (in Russian)

[2] Finn R. On the exterior srationary problem for the Navier-Stokes equations, and associated perturbation problem. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1965, vol. 19, pp. 363–406.

[3] Mogilevski I., Zakharova I. The stationary flows for a certain type of nonnewtonian fluids. *Far East Journal of Applied Mathematics*, 2004, vol. 15 (2), pp. 259–277.

[4] Zakharova I.V. Uniqueness of the solution of the problem of flow past a finite body by steady flow of non-Newtonian fluid. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2007, no. 7, pp. 61–78. (in Russian)

[5] Nazarov S., Pileskas K. On steady Stokes and Navier-Stokes problems with zero velocity at infinity in a three-dimentional exterior domain. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 2000, vol. 40, pp. 475–492.

[6] Nazarov S.A., Plamenevskii B.A. *Elliptic Boundary Value Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries*. Walter de Gruyter and Co, Berlin, 1994.

[7] Borchers W., Pileskas K. Existence, uniqueness and asymptotics of steady jets. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1992, vol. 120, pp. 1–49.