УДК 533.6, 517.95

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ПОЛНЫХ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Григорьева В.В.[1], **Шеретов Ю.В.** [2]
[1] Тверской государственный технический университет, г. Тверь
[2] Кафедра математического анализа

Поступила в редакцию 15.01.2016, после переработки 20.01.2016.

Показано, что любое бесконечно дифференцируемое решение стационарной системы Эйлера является решением соответствующей квазигидродинамической системы тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет стационарной системе Навье–Стокса. Приведен пример точного решения, общего для трех указанных систем и описывающего изотермический вихрь в газе.

Ключевые слова: полные квазигидродинамические уравнения, системы Эйлера и Навье–Стокса, точные решения.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 1. С. 93–101.

Введение

Для описания течений газа широко использовались классические системы Эйлера и Навье–Стокса [1]. Нетривиальной является задача построения точных физически осмысленных решений этих систем. В 1997 г. автором была феноменологически выведена еще одна система уравнений [2], получившая название квазигидродинамической (КГД). Она стала предметом многочисленных исследований, обзоры которых приведены в [3] – [6]. КГД уравнения успешно использовались для изучения движений газа в микроканалах, а также при моделировании турбулентных течений.

В последнее время предложен новый подход к теоретическому обоснованию полных квазигидродинамических уравнений, использующий процедуру замыкания Колмана–Нолла [7]. КГД система была успешно применена для прямого моделирования течений в микрообразцах горных пород [8]. Другое направление связано с построением на основе системы КГД эффективных разностных схем расчета одномерных нестационарных газодинамических течений [9].

В данной работе сделан еще один шаг к теоретическому обоснованию КГД уравнений, выявлению их связей с классическими системами Эйлера и Навье–Стокса. Показано, что любое бесконечно дифференцируемое решение стационарной системы Эйлера является решением соответствующей КГД системы тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет стационарной системе Навье–Стокса. Приведен пример точного решения, общего для трех указанных систем и описывающего изотермический вихрь в газе.

1. Полная квазигидродинамическая система для установившихся течений. Системы Эйлера и Навье–Стокса

Квазигидродинамическая система, описывающая установившиеся течения сжимаемого вязкого теплопроводного газа, имеет вид

$$\mathrm{div}\ (\rho\vec{u}) = \mathrm{div}\ (\rho\vec{w}), \tag{1.1}$$

$$\mathrm{div}\ (\rho\vec{u}\otimes\vec{u}) + \nabla p = \rho\vec{F} + \mathrm{div}\ \Pi + \mathrm{div}\ [(\rho\vec{w}\otimes\vec{u}) + (\rho\vec{u}\otimes\vec{w})], \tag{1.2}$$

$$\mathrm{div}\ \Big[\rho\vec{u}\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}+\varepsilon\Big) + p\vec{u}\Big] + \mathrm{div}\ \vec{q} = \rho\big(\vec{F}\cdot(\vec{u}-\vec{w})\big) + \mathrm{div}\ (\Pi\cdot\vec{u}) +$$
$$+\mathrm{div}\ \Big[\rho\vec{w}\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}+\varepsilon\Big) + p\vec{w} + \rho\vec{u}(\vec{w}\cdot\vec{u})\Big]. \tag{1.3}$$

Здесь $\vec{F}=\vec{F}(\vec{x})$ – массовая плотность внешних сил. Входящие в (1.1) – (1.3) величины Π, $\vec{q}$ и $\vec{w}$ вычисляются по формулам

$$\Pi = \eta\Big((\nabla\otimes\vec{u}) + (\nabla\otimes\vec{u})^T - \frac{2}{3}I\mathrm{div}\ \vec{u}\Big), \tag{1.4}$$

$$\vec{q} = -æ\nabla T, \tag{1.5}$$

$$\vec{w} = \frac{\tau}{\rho}\big(\rho(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla p - \rho\vec{F}\big), \tag{1.6}$$

где I – единичный тензор-инвариант второго ранга. Для определенности будем считать, что сплошная среда представляет собой идеальный политропный газ. В этом случае к системе необходимо добавить уравнения состояния

$$p = \rho \mathrm{R} T, \qquad \varepsilon = c_v T. \tag{1.7}$$

Здесь R – газовая постоянная, c_v – удельная теплоемкость при постоянном объеме. Удельная внутренняя энергия ε является линейной функцией температуры T. Зависимость $\eta=\eta(T)$ коэффициента динамической вязкости от температуры выберем в виде

$$\eta = \eta_0\Big(\frac{T}{T_0}\Big)^{\omega}, \tag{1.8}$$

где η_0 – известное значение η при температуре T_0, ω – заданное число из промежутка $[0.5,\ 1]$. Коэффициент теплопроводности æ определяется с помощью выражения

$$æ = \frac{c_p\eta}{Pr}. \tag{1.9}$$

Символом c_p обозначена удельная теплоемкость при постоянном давлении, Pr – число Прандтля. Релаксационный параметр τ, имеющий размерность времени, может быть вычислен следующим образом:

$$\tau = \frac{\eta}{p\ Sc}. \tag{1.10}$$

Здесь Sc – число Шмидта.

Квазигидродинамическая система (1.1) – (1.3), дополненная выражениями (1.4) – (1.10), замкнута относительно неизвестных функций – плотности $\rho = \rho(\vec{x}) > 0$, скорости $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x})$ и давления $p = p(\vec{x}) > 0$. Для одноатомного газа твердых шаров при нормальных условиях $\omega = 0.5$, $\gamma = c_p/c_v = 5/3$, $Pr = 2/3$, $Sc = 3/4$. Предположим, что таким газом является гелий. Тогда $\Re = 2.0785 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К).

Если в системе (1.1) – (1.3) пренебречь диссипативными слагаемыми, содержащими η, æ и τ, то получим классическую стационарную систему Эйлера

$$\text{div }(\rho\vec{u}) = 0, \tag{1.11}$$

$$\text{div }(\rho\vec{u}\otimes\vec{u}) + \nabla p = \rho\vec{F}, \tag{1.12}$$

$$\text{div }\Big[\rho\vec{u}\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}+\varepsilon\Big)+p\vec{u}\Big] = \rho(\vec{F}\cdot\vec{u}). \tag{1.13}$$

Она замыкается уравнениями (1.7). Если же в (1.1) – (1.3) отбросить члены, зависящие от τ, то придем к системе Навье–Стокса

$$\text{div }(\rho\vec{u}) = 0, \tag{1.14}$$

$$\text{div }(\rho\vec{u}\otimes\vec{u}) + \nabla p = \rho\vec{F} + \text{div }\Pi, \tag{1.15}$$

$$\text{div }\Big[\rho\vec{u}\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}+\varepsilon\Big)+p\vec{u}\Big] + \text{div }\vec{q} = \rho(\vec{F}\cdot\vec{u}) + \text{div }(\Pi\cdot\vec{u}), \tag{1.16}$$

описывающей установившиеся течения сжимаемого вязкого теплопроводного газа. Эта система замыкается уравнениями (1.4), (1.5), (1.7) – (1.9).

2. Общие точные решения систем Эйлера, Навье–Стокса и квазигидродинамической системы

Нижеследующая теорема устанавливает связь между решениями систем Эйлера, Навье–Стокса и КГД в стационарном случае.

Теорема 1. *Пусть тройка* $(\rho, \vec{u}, p)$ *бесконечно дифференцируемых в некоторой области* $V \subset \mathbb{R}^3_{\vec{x}}$ *функций удовлетворяет стационарной системе Эйлера* (1.11) – (1.13). *Для того, чтобы тройка* $(\rho, \vec{u}, p)$ *была решением квазигидродинамической системы* (1.1) – (1.3), *необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла уравнениям Навье–Стокса* (1.14) – (1.16).

Доказательство. Необходимость. Пусть тройка $(\rho, \vec{u}, p)$ бесконечно дифференцируемых в некоторой области $V \subset \mathbb{R}^3_{\vec{x}}$ функций удовлетворяет как системе Эйлера (1.11) – (1.13), так и квазигидродинамической системе (1.1) – (1.3). Тогда

$$\vec{w} = \frac{\tau}{\rho}\Big(\text{div }(\rho\vec{u}\otimes\vec{u}) + \nabla p - \rho\vec{F} - \vec{u}\text{ div }(\rho\vec{u})\Big) = 0.$$

Из (1.2) и (1.3) находим

$$\text{div }\Pi = 0, \tag{2.1}$$

$$\text{div }\vec{q} = \text{div }(\Pi\cdot\vec{u}). \tag{2.2}$$

Отсюда следует, что тройка функций $(\rho, \vec{u}, p)$ удовлетворяет уравнениям Навье–Стокса (1.14) – (1.16).

Достаточность. Допустим, что тройка функций $(\rho, \vec{u}, p)$ удовлетворяет и системе Эйлера (1.11) – (1.13), и системе Навье–Стокса (1.14) – (1.16). Вновь получаем соотношения (2.1) – (2.2). Поскольку $\vec{w} = 0$, непосредственной проверкой убеждаемся в том, что набор функций $(\rho, \vec{u}, p)$ является решением КГД системы (1.1) – (1.3). □

Примеры точных решений, общих для систем Эйлера, Навье–Стокса и КГД, немногочисленны. Приведем один из таких примеров. Пренебрегая влиянием внешних сил, выпишем квазигидродинамическую систему в декартовых координатах для случая плоских стационарных течений:

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\Big[\tau\Big(\rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x}\Big)\Big] +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}\Big[\tau\Big(\rho u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y}\Big)\Big], \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial(\rho u_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_x u_y)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} =$$
$$= 2\frac{\partial}{\partial x}\Big(\eta \frac{\partial u_x}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\eta \frac{\partial u_x}{\partial y}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\eta \frac{\partial u_y}{\partial x}\Big) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\Big[\eta\Big(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\Big)\Big] +$$
$$+ 2\frac{\partial}{\partial x}\Big[\tau u_x\Big(\rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x}\Big)\Big] +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}\Big[\tau u_y\Big(\rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x}\Big)\Big] +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}\Big[\tau u_x\Big(\rho u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y}\Big)\Big], \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial(\rho u_y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_x u_y)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} =$$
$$= 2\frac{\partial}{\partial y}\Big(\eta \frac{\partial u_y}{\partial y}\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\eta \frac{\partial u_y}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\eta \frac{\partial u_x}{\partial y}\Big) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\Big[\eta\Big(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\Big)\Big] +$$
$$+ 2\frac{\partial}{\partial y}\Big[\tau u_y\Big(\rho u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y}\Big)\Big] +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x}\Big[\tau u_x\Big(\rho u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y}\Big)\Big] +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x}\Big[\tau u_y\Big(\rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x}\Big)\Big], \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[\rho u_x\Big(\frac{u_x^2 + u_y^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho}\Big)\Big] + \frac{\partial}{\partial y}\Big[\rho u_y\Big(\frac{u_x^2 + u_y^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho}\Big)\Big] =$$

$$= 2\frac{\partial}{\partial x}\Big(\eta u_x \frac{\partial u_x}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\eta u_x \frac{\partial u_x}{\partial y}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\eta u_x \frac{\partial u_y}{\partial x}\Big) +$$

$$+2\frac{\partial}{\partial y}\Big(\eta u_y \frac{\partial u_y}{\partial y}\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\eta u_y \frac{\partial u_y}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\eta u_y \frac{\partial u_x}{\partial y}\Big) -$$

$$-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\Big[\eta u_x\Big(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\Big)\Big] - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\Big[\eta u_y\Big(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\Big)\Big] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\Big(æ\frac{\partial T}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(æ\frac{\partial T}{\partial y}\Big) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\Big[\tau\Big(\frac{u_x^2 + u_y^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho}\Big)\Big(\rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x}\Big)\Big] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\Big[\tau\Big(\frac{u_x^2 + u_y^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho}\Big)\Big(\rho u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y}\Big)\Big] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\Big[\tau u_x^2\Big(\rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x}\Big)\Big] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\Big[\tau u_x u_y\Big(\rho u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y}\Big)\Big] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\Big[\tau u_x u_y\Big(\rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x}\Big)\Big] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\Big[\tau u_y^2\Big(\rho u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y}\Big)\Big]. \tag{2.6}$$

Дополним систему алгебраическими соотношениями

$$p = \rho \mathrm{R} T, \quad \varepsilon = c_v T, \quad \eta = \eta_0 \Big(\frac{T}{T_0}\Big)^{\omega}, \quad æ = \frac{c_p \eta}{Pr}, \quad \tau = \frac{\eta}{p\ Sc}. \tag{2.7}$$

В (2.3) – (2.7) неизвестными величинами являются плотность $\rho = \rho(x, y) > 0$, компоненты скорости $u_x = u_x(x, y)$ и $u_y = u_y(x, y)$, а также давление $p = p(x, y) > 0$.

Построим точное решение (2.3) – (2.7), отвечающее изотермическому вихрю. Пусть

$$u_x = -\Omega y, \quad u_y = \Omega x, \tag{2.8}$$

где $\Omega = const > 0$. Температуру газа будем считать постоянной, то есть

$$T = T_0 = const > 0. \tag{2.9}$$

Потребуем, чтобы

$$\rho u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \tag{2.10}$$

$$\rho u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + \rho u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \tag{2.11}$$

Принимая во внимание (2.8) и (2.9), а также уравнение Менделеева–Клапейрона $p = \rho \mathrm{R} T$, перепишем (2.10) и (2.11) в виде

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\Omega^2 x}{\mathrm{R} T_0}, \tag{2.12}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}=\frac{\Omega^2 y}{\mathrm{R}T_0}. \tag{2.13}$$

Отсюда

$$\rho=\rho_0\exp\Big(\frac{\Omega^2}{2\mathrm{R}T_0}\big(x^2+y^2\big)\Big). \tag{2.14}$$

Здесь ρ_0 – заданное положительное значение плотности при $(x,y)=(0,0)$. Соответственно,

$$p=p_0\exp\Big(\frac{\Omega^2}{2\mathrm{R}T_0}\big(x^2+y^2\big)\Big), \tag{2.15}$$

где $p_0=\rho_0\mathrm{R}T_0$.

Покажем, что набор функций (2.14), (2.8), (2.15) образует точное решение КГД системы (2.3) – (2.7). Заметим, что кроме (2.10), (2.11) имеют место следующие равенства:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=0, \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}=\rho\Big(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}\Big)+u_x\frac{\partial\rho}{\partial x}+u_y\frac{\partial\rho}{\partial y}=0, \tag{2.17}$$

$$u_x\Big(\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}\Big)+\rho u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+\rho u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial x}=0, \tag{2.18}$$

$$u_y\Big(\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}\Big)+\rho u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+\rho u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial y}=0, \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}=0, \tag{2.20}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x}\Big[\rho u_x\Big(\frac{u_x^2+u_y^2}{2}+\varepsilon+\frac{p}{\rho}\Big)\Big]+\frac{\partial}{\partial y}\Big[\rho u_y\Big(\frac{u_x^2+u_y^2}{2}+\varepsilon+\frac{p}{\rho}\Big)\Big]=\\ =\Big(\frac{u_x^2+u_y^2}{2}+\varepsilon+\frac{p}{\rho}\Big)\Big(\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}\Big)+\\ +\rho u_x\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{u_x^2+u_y^2}{2}+\varepsilon+\frac{p}{\rho}\Big)+\rho u_y\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{u_x^2+u_y^2}{2}+\varepsilon+\frac{p}{\rho}\Big)=0,\end{gathered} \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\text{æ}\frac{\partial T}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\text{æ}\frac{\partial T}{\partial y}\Big)=0. \tag{2.22}$$

Принимая во внимание (2.16) – (2.22), нетрудно убедиться в том, что равенства (2.3) – (2.6) выполняются.

Очевидно, что построенное решение является точным как для системы Эйлера (1.11) – (1.13), так и для системы Навье–Стокса (1.14) – (1.16). Другие примеры точных физически адекватных решений полных КГД уравнений в стационарном случае приведены в [5] на с. 184 – 189.

Заключение

Дальнейшие исследования могут быть направлены на выявление новых связей КГД системы с классическими уравнениями гидродинамики, разработку методов построения точных решений, поиск доказательств корректности постановок краевых и начально–краевых задач.

Список литературы

[1] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.

[2] Шеретов Ю.В. Квазигидродинамические уравнения как модель течений сжимаемой вязкой теплопроводной среды // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Тверской гос. ун–т, 1997. С. 127–155.

[3] Шеретов Ю.В. Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений. Тверь: Тверской гос. ун–т, 2000. 235 с.

[4] Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 400 с.

[5] Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской гос. ун–т, 2016. 222 с.

[6] Злотник А.А. О параболичности квазигидродинамической системы и устойчивости малых возмущений для нее // Математические заметки. 2008. Т. 83, № 5. С. 667–682.

[7] Балашов В.А., Савенков Е.Б. Феноменологический вывод квазигидродинамической системы уравнений с учетом объемной вязкости: Препринт № 68. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2015. 25 с.

[8] Балашов В.А., Савенков Е.Б. Применение квазигидродинамической системы уравнений для прямого моделирования течений в микрообразцах горных пород: Препринт № 84. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2015. 20 с.

[9] Злотник А.А., Гаврилин В.А. О дискретизации одномерной квазигидродинамической системы уравнений для реального газа // Вестник МЭИ. 2016. № 1. С. 1–16.

Библиографическая ссылка

Григорьева В.В., Шеретов Ю.В. О точных решениях полных квазигидродинамических уравнений для стационарных течений // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 1. С. 93–101.

Сведения об авторах

1. **Григорьева Вера Владимировна**
   доцент кафедры высшей математики Тверского государственного технического университета.

   Россия, 170026, г. Тверь, наб. А. Никитина, 22, ТвГТУ. E-mail: pontida@list.ru.

2. **Шеретов Юрий Владимирович**
   заведующий кафедрой математического анализа Тверского государственного университета.

   Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, 33, ТвГУ.
   E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru.

ON THE EXACT SOLUTIONS OF FULL QUASI–HYDRODYNAMIC EQUATIONS FOR STATIONARY FLOWS

Grigoryeva Vera Vladimirovna
Associate Professor at the Higher Mathematics department,
Tver State Technical University
Russia, 170026, Tver, A. Nikitin emb., 22, TvSTU. E-mail: pontida@list.ru

Sheretov Yurii Vladimirovich
Head of the Mathematical Analysis department, Tver State University
Russia, 170100, Tver, Zhelyabov st., 33, TvSU. E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

Received 15.01.2016, revised 20.01.2016.

It is shown that any infinitely differentiable solution of the stationary Euler system is the solution of corresponding quasi–hydrodynamic system if and only if it satisfies to stationary Navier–Stokes system. An example of the exact solution, which is common for three these systems and describes an isothermal vortex in gas, is given.

Keywords: full quasi–hydrodynamic equations, Euler and Navier–Stokes systems, exact solutions.

Bibliographic citation

Grigoryeva V.V., Sheretov Yu.V. On the exact solutions of full quasi–hydrodynamic equations for stationary flows. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2016, no. 1, pp. 93–101. (in Russian)

References

[1] Loytsyansky L.G. *Mekhanika Zhidkosti i Gaza* [Fluid and Gas Mechanics]. "Nauka" Publ., Moscow, 1987. 840 p. (in Russian)

[2] Sheretov Yu.V. Quasi–hydrodynamic equations as a model of viscous heat conducting medium flows. In: *Primemenie Funktsionalnogo Analiza v Teorii Priblizhenii* [Application of Functional Analysis in the Theory of Approximations]. Tver State University, Tver, 1997. Pp. 127–155. (in Russian)

[3] Sheretov Yu.V. *Matematicheskoe Modelirovanie Techenii Zhidkosti i Gaza na Osnove Kvazigidrodinamicheskikh i Kvazigazodinamicheskikh Uravnenii* [Mathematical Modeling of Fluid and Gas Flows on the Base of Quasi–hydrodynamic and Quasi–gas–dynamic Equations]. Tver State University, Tver, 2000. 235 p. (in Russian)

[4] Sheretov Yu.V. *Dinamika Sploshnykh Sred pri Prostranstvenno–Vremennom Osrednenii* [Dynamics of Continuous Media Under Spatiotemporal Averaging]. "Regular and Chaotic Dynamics" Publ., Moscow, Izhevsk, 2009. 400 p.

[5] Sheretov Yu.V. *Regulyarizovannye Uravneniya Gidrodinamiki* [Regularized Hydrodynamic Equations]. Tver State University, Tver, 2016. 222 p. (in Russian)

[6] Zlotnik A.A. Parabolicity of a quasihydrodynamic system of equations and the stability of its small perturbations. *Mathematical Notes*, 2008, vol. 83, no. 5-6, pp. 610—623.

[7] Balashov V.A., Savenkov E.B. *Fenomenologicheskii Vyvod Kvazigidrodinamicheskoi Sistemy Uravnenii s Uchetom Ob'emnoi Vyazkosti* [Phenomenological Derivation of Quasihydrodynamic Equations with Bulk Viscosity]. Preprint № 68. "Keldysh Institute of Applied Mathematics" Publ., Moscow, 2015. 25 p. (in Russian)

[8] Balashov V.A., Savenkov E.B. *Primenenie Kvazigidrodinamicheskoi Sistemy Uravnenii dlya Pryamogo Modelirovaniya Techenii v Mikroobraztsakh Gornykh Porod* [Application of Quasihydrodynamic Equation for Direct Numerical Simulation of Flow in Core Samples]. Preprint № 84. "Keldysh Institute of Applied Mathematics" Publ., Moscow, 2015. 20 p. (in Russian)

[9] Zlotnik A.A., Gavrilin V.A. On the discretization of one-dimensional quasi–hydrodynamic system of equations for real gas. *Vestnik Moskovskogo Energeticheskogo Instituta* [Herald of Moscow Power Engineering Institute], 2016, no. 1, pp. 1–16. (in Russian)