УДК 510.652

О ПРИМЕНЕНИИ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ К ИССЛЕДОВАНИЮ РАЗРЕШИМОСТИ ТЕОРИИ С ОПЕРАТОРОМ ФИКСИРОВАННОЙ ТОЧКИ

Золотов А.С.
Кафедра информатики

Поступила в редакцию 15.01.2016, после переработки 08.02.2016.

Мы исследуем вопрос об эффективной элиминации оператора фиксированной точки для некоторых формул специального вида, содержащих равенства, в теории целых чисел с функцией следования. Для формул с двумя кластерами мы строим конечный автомат для языка, состоящего из слов, соответствующих минимальной фиксированной точке.

Ключевые слова: разрешимость, оператор фиксированной точки, конечный автомат.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 1. С. 103–115.

Введение

Вопрос о разрешимости теорий является одной из центральных проблем математической логики. К настоящему моменту в этой области получен целый ряд как положительных, так и отрицательных результатов (см. [2–4, 7]). При получении этих результатов используются разные приемы и техники доказательств.

В установлении разрешимости теорий находят свое применение конечные автоматы. Так, одним из способов доказательства разрешимости некоторой теории первого порядка является доказательство ее «автоматности», то есть возможности распознавать отношения данной теории при помощи конечного автомата (см. [1]). Таким образом, например, можно достаточно просто доказать разрешимость арифметики Пресбургера. В работе [8] при помощи автоматов, работающих с бесконечной лентой, доказывается разрешимость слабой монадической теории второго порядка с двумя функциями следования, а в [10] проводится исследование выразительной силы монадических состояний над упорядоченным случайным графом при помощи конечных автоматов.

Язык логики первого порядка с оператором фиксированной точки является математическим аналогом языка запросов SQL с возможностью строить рекурсивные запросы. Проблеме безопасности рекурсивных запросов посвящены работы [5,11,12], а в [13] показано, что рассмотрение бинарного оператора фиксированной точки приводит к теории с неразрешимой проблемой определенности данного оператора, для чего показывается, что проблема остановки счетчиковой машины может быть сведена к проблеме определенности некоторого IFP-оператора в теории одной функции следования.

Обогащениям языка логики первого порядка итеративными операторами посвящен ряд работ. Так, в [6] рассматривается выразительная сила различных итеративных операторов для конечных систем, показывается, что некоторые разновидности этих операторов эквивалентны друг другу.

В [14] и [9] рассматривается вопрос о разрешимости теории одного следования с оператором транзитивного замыкания, а в [15] доказывается неразрешимость арифметики Пресбургера и арифметики Сколема, обогащенных этим оператором. В работе [16] описаны начальные сведения об элиминации оператора фиксированной точки для формул некоторого вида в рассматриваемой нами теории. Рассматривается случай, когда при построении новая точка находится всегда слева (или справа) от уже имеющихся точек отношения. Показано, что тогда фиксированная точка для формулы, содержащей равенства, будет иметь повторяющуюся структуру, что позволяет описать построенное отношение формулой первого порядка без FP-оператора, добавив в сигнатуру знаки неравенств и предикаты делимости на константу.

В данной работе мы продолжаем рассматривать формулы с равенствами специального вида в фрагменте теории одного следования, содержащем под оператором фиксированной точки дизъюнкцию конъюнкций равенств. Мы показываем, что при наличии двух находящихся достаточно далеко скоплений точек в отношении, строящемся на начальном этапе, участок наименьшей фиксированной точки между этими скоплениями имеет регулярную природу. Для этого мы рассматриваем язык, состоящий из слов, описывающих наименьшие фиксированные точки, построенные для двух скоплений, после чего доказываем, что данный язык является автоматным. Это позволяем нам сделать вывод, что на участке между скоплениями отношение будет иметь повторяющиеся фрагменты при условии, что эти скопления находятся достаточно далеко.

1. Основные определения

Считаем, что формулы строятся по обычным для логики первого порядка правилам, за исключением оператора фиксированной точки.

Определение 1 (см. [6])**.** *Формулой* FP*-логики называется формула, построенная по правилам логики первого порядка, а также с помощью оператора инфляционной фиксированной точки* FP*: если $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ – формула со свободными переменными $\bar{x}$ и $\bar{y}$, содержащая несигнатурный предикатный символ Q, входящий в ϕ только положительно, то $\mathrm{FP}_{Q(\bar{y})}(\phi)$ – формула исходной сигнатуры со свободными переменными $\bar{x}$ и $\bar{y}$.*

Семантика атомных формул, булевых связок и кванторов определяется как в логике первого порядка. Дадим определение семантики FP-формул.

Определение 2. *Будем обозначать через $s^k(x)$ k-кратное применение s: $\underbrace{s(s(\ldots s}_{k\ \text{раз}}(x)\ldots)$.*

Определение 3. *Пусть $\mathfrak{A}$ – это алгебраическая система, $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ – формула, с новым предикатным символом Q, m – количество элементов набора $\bar{y}$. Зафиксируем значение переменных $\bar{x}$ – $\bar{a} \in |\mathfrak{A}|$. Определим семейство множеств $\{Q_i^{\bar{a}}\}_{i \in \omega}$ следующим образом:*

$$Q_0^{\bar{a}} = \emptyset; \quad Q_{i+1}^{\bar{a}} = \{\bar{y} \in |\mathfrak{A}| : (\mathfrak{A}, Q_i^{\bar{a}}) \models \phi(\bar{a}, \bar{y})\}, \text{ для } i \in \omega.$$

Считаем формулу $\mathrm{FP}_{Q(\bar{y})}(\phi)(\bar{a}, \bar{y})$ истинной, если существует такой номер $n \in \omega$, что $\bar{y} \in Q_n^{\bar{a}}$, и ложной в противном случае.

Формулу вида

$$\psi(x, \bar{z}, \bar{y}, v) \equiv \left(\bigwedge_{i=1}^{n} (y_i = s^{k_i}(x)) \right) \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{m} (x = s^{t_j}(z_j)) \right) \wedge (v = s^l(x)),$$
$$k_i \in \omega, t_j \in \omega, l \in \mathbb{Z}$$

будем называть шаблоном (простым шаблоном).

Величину $h(\psi)$, равную $K(\psi) + T(\psi)$, где $K(\psi) = \max\{k_i : i = \overline{1,n}\}$, $T(\psi) = \max\{t_j : j = \overline{1,m}\}$ будем называть шириной шаблона.

Будем говорить, что шаблон имеет сдвиг, *если выполнено одно из двух: $l \geq 0$ и $l > K(\psi)$ или же $l < 0$ и $-l > T(\psi)$; в противном случае, шаблон* не имеет сдвига.

При $l \geq 0$ определим величину сдвига шаблона *$S(\psi)$ как $l - K(\psi)$, в противном случае положим $S(\psi)$ равной $l + T(\psi)$. Обозначим число l через $l(\psi)$.*

Знаком *шаблона будем называть знак его величины сдвига.*

Замечание 1. Так как символ Q входит в ϕ положительно, то $Q_i^{\bar{a}} \subseteq Q_{i+1}^{\bar{a}}$.

В данной работе будем рассматривать следующую интерпретацию I. Ее областью являются целые числа. Здесь и далее $I(x)$ – элемент интерпретации, приписываемый переменной x. Интерпретация I приписывает символу 0 нуль, символу s – функцию прибавления единицы. Также I предписывает, что $x < y$ должно быть истинно тогда и только тогда, когда $I(x)$ меньше $I(y)$, $x = y$ должно быть истинно тогда и только тогда, когда $I(x)$ равно $I(y)$. Также $I \models D_m(x)$ тогда и только тогда, когда $I(x)$ делится на m для всякого натурального $m > 0$.

Определение 4. *Будем говорить, что множество точек образует H-*кластер, *если расстояние между соседними из них не превосходит H.*

2. О фиксированной точке для двух кластеров

Всюду в данной работе полагаем, что формулы под оператором фиксированной точки имеют следующий вид. Пусть $\Phi \equiv \mathrm{FP}_{Q(v)}(\phi_0 \vee \phi_1)(\bar{z}, x)$ такова, что

$$\phi_0 \equiv \bigvee_{i=1}^{n} (v = z_i), \quad \phi_1 \equiv \bigvee_{i=1}^{m} (\exists v_1) \dots (\exists v_{k_i})(Q(v_1) \wedge \dots \wedge Q(v_{k_i}) \wedge \psi_i(v_1, \dots, v_{k_i}, v)),$$

где ψ_i – шаблоны, причем среди них есть шаблоны как с положительной, так и с отрицательной величиной сдвига. При этом считаем, что значения переменных из набора $\bar{z}$ образуют два H-кластера, где $H = \max\{h(\psi_i), i = 1 \dots m\}$.

Определение 5. *Отношение Q назовем $\mathrm{FP}_{Q(v)}(\phi)$-устойчивым, если $Q = \{y \in |\mathfrak{A}| : (\mathfrak{A}, Q) \models \phi(y)\}$, $\mathrm{FP}_{Q(v)}(\phi)$-неустойчивым – в противном случае. Когда будет ясно из контекста, о какой формуле идет речь, будем называть Q просто устойчивым или неустойчивым, соответственно.*

Приведем несколько известных утверждений об устойчивых отношениях.

Лемма 1. *Пусть Q_1 и Q_2 – $\mathrm{FP}_{Q(v)}(\phi)$-устойчивые отношения, содержащие отношение A. Тогда $Q_1 \cap Q_2$ – также $\mathrm{FP}_{Q(v)}(\phi)$-устойчивое отношение, содержащее A.*

Доказательство. Очевидно, что $A \subseteq Q_1 \cap Q_2$. Если же пересечение не является устойчивым, то в нем найдется область, к которой можно применить шаблон и добавить новую точку. Но тогда та же область есть как в Q_1, так и в Q_2, а добавляемая точка отсутствует хотя бы в одном из них, что противоречит их устойчивости. □

Замечание 2. Пусть $\Phi \equiv \mathrm{FP}_{Q(v)}(\phi)(\bar{z}, x)$. Пусть $A = \{I(z_1), \ldots, I(z_n)\}$. Нетрудно видеть, что, в силу положительности формулы ϕ, рассматриваемая фиксированная точка есть минимальное относительно включения устойчивое отношение, содержащее A.

Лемма 2. *Пусть $\Phi \equiv \mathrm{FP}_{Q(v)}(\phi)(\bar{z}, x)$. Пусть $A = \{I(z_1), \ldots, I(z_n)\}$. Тогда $\Phi(\bar{z}, x)$ истинна тогда и только тогда, когда $I(x)$ принадлежит пересечению всех устойчивых отношений, содержащих A.*

Доказательство. Пересечение всех устойчивых отношений, содержащих A, очевидно, лежит в минимальном устойчивом отношении, содержащем A. В обратную сторону, если есть точка, в минимальном отношении, не содержащаяся в каком-либо из устойчивых, то пересечение данных отношений будет устойчивым, будет содержать A и окажется строго меньше минимального, что приводит к противоречию. □

Замечание 3. Всюду далее под устойчивостью будем понимать $\mathrm{FP}_{Q(v)}(\phi_0 \vee \phi_1)(\bar{z}, x)$-устойчивость для конкретных ϕ_0 и ϕ_1.

Пусть точки $z_1 < \cdots < z_{k_1}$ образуют первый H-кластер, а $z'_1 < \cdots < z'_{k_2}$ – соответственно, второй, причем, выполнено $z_{k_1} < z'_1$. Рассмотрим величину ρ_1 равную $\max\{H \cdot k_1 + 1, H \cdot k_2 + 1, R\}$, где

$$R = (n-1)H + L \cdot 2^L + L \cdot (2^L)!, \quad L = \max_i h(\psi_i) + \max_i S(\psi_i) + 1.$$

Смысл данных констант заключается в следующем. Рассмотрим построение фиксированной точки при условии, что есть только один кластер, а также используются шаблоны только одного знака. Величина $(n-1)H$ описывает максимальную ширину H-кластера из n точек. Точки отношения, находясь на расстоянии L или более не могут входить в один и тот же шаблон, иными словами, влиять друг на друга. Тогда, если разбить числовую прямую на отрезки длины L, то при построении фиксированной точки влиять друг на друга будут только соседние отрезки. Всего есть 2^L различных способов включить разместить на отрезке длины L точки отношения. Таким образом, если мы рассматриваем участок числовой прямой, содержащий более 2^L отрезков (и имеющий длину более $L \cdot 2^L$), то на нем обязательно будут хотя бы два повторяющихся способа расстановки точек отношения. При этом последующие отрезки определяются только предыдущими, а значит, что если повторы начнутся, то так и продолжатся далее. Длина повторяющейся части заведомо не известна, но что участок, содержащий в себе $(2^L)!$ отрезков (и имеющий длину $l \cdot (2^L)!$) содержит в себе целое число повторов. Таким образом, R есть сумма размера кластера, длины специальной неповторяющейся части и длины одного повтора при рассмотрении способов расстановки точек отношения в отрезках длины L.

Если расстояние между $I(z_{k_1})$ и $I(z_1')$ не превосходит $2\rho_1$, то эти точки можно объединить в один $2\rho_1$-кластер, данный случай мы не рассматриваем. В противном же случае обозначим ρ_0 расстояние между $I(z_{k_1})$ и $I(z_1')$, взятое по модулю $2\rho_1$, оно легко определяется при помощи конечной дизъюнкции. Покажем, что можно эффективно разбить числовую прямую на непересекающиеся отрезки длины $2\rho_1$ так, что в одном из отрезков будет целиком содержаться первый кластер, а в другом – второй.

Если $0 \leq \rho_0 \leq \rho_1$, то в качестве первого отрезка, содержащего первый кластер, рассмотрим $[I(s^{-2\rho_1}(z_{k_1})), I(z_{k_1})]$, а в качестве отрезка, содержащего второй кластер – $[I(s^{-\rho_0}(z_1')), I(s^{2\rho_1-\rho_0}(z_1'))]$. Оба эти отрезка имеют длину $2\rho_1$, а между ними поместится целое число отрезков длины $2\rho_1$ в силу выбора ρ_0 и ρ_1.

Если же $\rho_1 < \rho_0 < 2\rho_1$, то в рассмотрим отрезки $[I(s^{-\rho_1}(z_{k_1})), I(s^{\rho_1}(z_{k_1}))]$ и $[I(s^{-\rho_0+\rho_1}(z_1')), I(s^{-\rho_0+3\rho_1}(z_1'))]$ соответственно. Условие на отрезки опять же будет выполняться в силу выбора ρ_0 и ρ_1.

Главный вопрос, который изучается в данной работе, состоит в том, как будет выглядеть участок фиксированной точки между кластерами. Обозначим ρ величину $2\rho_1$, то есть длину отрезков, построенных выше. Существует 2^ρ вариантов расположения точек отношения внутри отрезка длины ρ пронумеруем как-либо эти варианты числами $1, \ldots, 2^\rho$ и обозначим S_i вариант расположения точек в отрезке с номером i. Рассмотрим конечный алфавит $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{2^\rho}\}$ и поставим в соответствие символу α_i вариант отрезка с номером i для всякого $i = \overline{1, 2^\rho}$. Введем на символах алфавита отношение частичного порядка, согласованное с теоретико-множественным включением отрезков.

Определение 6. *Положим $\alpha_i < \alpha_j$ тогда и только тогда, когда $S_i \subset S_j$ и аналогично $\alpha_i \leq \alpha_j$ тогда и только тогда, когда $S_i \subseteq S_j$.*

Определение 7. *Будем обозначать $w[i]$ символ слова w с номером i. Также будем обозначать $|w|$ длину слова w.*

Распространим отношение на слова в алфавите Σ.

Определение 8. *Положим*

$$v < u \iff |v| = |u| \wedge (\forall j)(v[j] \leq u[j]) \wedge (\exists i)(v[i] < u[i]),$$

аналогично

$$v \leq u \iff |v| = |u| \wedge (\forall j)(v[j] \leq u[j]).$$

Таким образом, перейдем от рассмотрения участка отношения между двумя кластерами к рассмотрению конечного слова в алфавите Σ, соответствующего этому участку.

Определение 9. *Обозначим через $sect_i(x, y)$ формулу, истинную тогда и только тогда, когда $I(x)$ принадлежит отрезку с номером i при условии, что левая граница этого отрезка есть $I(y)$. Данная формула для каждого i строится непосредственно и представляет собой конечную дизъюнкцию равенств.*

Определение 10. *Будем говорить, что символы α_i и α_k не изменяют символ α_j слева и справа при построении $\mathrm{FP}_{Q(v)}(\phi_0 \vee \phi_1)(\bar{z}, x)$ (будем писать $St(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k)$), если истинна формула*

$$\begin{aligned}&(\forall x)(sect_j(x, 0) \iff \\ &\qquad \iff FP^1_{Q(v)}(sect_i(s^{-\rho}(0), v) \vee sect_j(0, v) \vee sect_k(s^{\rho}(0), v) \vee \phi_1)(\bar{z}, x) \wedge \\ &\qquad\qquad \wedge (x = 0 \vee x = s(0) \vee \dots \vee x = s^{\rho-1}(0))).\end{aligned}$$

Замечание 4. Определенное выше отношение строится эффективно, поскольку формула в его определении является формулой первого порядка.

Определение 11. *Конечное слово $w, |w| > 2$ в алфавите Σ будем называть устойчивым, если для любых трех идущих подряд символов α, β, γ слова w выполнено $St(\alpha, \beta, \gamma)$.*

Пусть процесс построения фиксированной точки длится достаточно долго. Тогда рано или поздно наступит такой момент, что в отрезок, содержащий левый начальный кластер, уже ничего нового добавляться не будет. Уберем из отношения все точки левее данного отрезка и снова начнем процесс построения фиксированной точки. Заметим, что в результате в силу монотонности мы получим то же самое отношение, что и в случае построения фиксированной точки из исходного начального кластера, так как добавили только точки, которые и так появятся в отношении. При построении наступит такой момент, когда в отрезок непосредственно слева от отрезка, содержащего левый начальный кластер, также перестанут добавляться точки. При этом окончательное расположение точек в нем однозначно определяется его соседом справа, который в процессе построения остается неизменным. Снова уберем из отношения все точки левее рассматриваемого отрезка и продолжим процесс построения, продолжим получать отрезки, в которые уже ничего не добавляется, лежащие все левее и левее. Если данный процесс будет идти достаточно долго, то на участках левее первого кластера начнутся повторы расположений точек внутри отрезков длины ρ. При этом длину специальной («неповторяющейся») части положим равной $\rho \cdot 2^{\rho}$, поскольку существует 2^{ρ} способов расположения точек отношения внутри отрезка длины ρ, а длину повтора – $\rho \cdot (2^{\rho})!$, так как точная его длина заведомо неизвестна, но можно утверждать, что она не превзойдет $\rho \cdot 2^{\rho}$ и кратна ρ, а значит, делит $\rho \cdot (2^{\rho})!$, то есть в участке такой длины содержится целое число повторов. Аналогичные рассуждения можно провести и для правого начального кластера.

Замечание 5. Рассмотрим слово w, соответствующее участку фиксированной точки от $I(z_1) - \rho \cdot 2^{\rho} - 2\rho \cdot (2^{\rho})!$ и до $I(z'_{k_2}) + \rho \cdot 2^{\rho} + 2\rho \cdot (2^{\rho})!$, то есть рассматриваем начальные кластеры, участок между ними, неповторяющиеся части и два повтора с каждой из сторон. Тогда w является устойчивым.

Задача следующих нескольких лемм заключается в том, чтобы показать возможность распознавания при помощи конечного автомата устойчивых слов, соответствующих участку фиксированной точки, содержащему начальные кластеры, участок между ними, неповторяющиеся части и два повтора с каждой из сторон (см. замечание 5).

Лемма 3. *Пусть*

$$W_{St} = \{w \in \Sigma^* | w \; - \textit{устойчивое}, |w| > 2\}.$$

Тогда W_{St} *– автоматный язык.*

Доказательство. Искомый детерминированный автомат строится по отношению St. Приведем его описание. Первые два символа автомат считывает, запоминая их номера в паре индексов состояний. Затем, пусть на некотором шаге автомат, находясь в состоянии q_{ij}, видит α_k. Тогда если $(\alpha_i, \alpha_j, \alpha_k) \in St$, то автомат переходит в состояние q_{jk}, иначе переходит в ошибочное состояние $q!$, в котором остается до конца чтения слова. Принимающими состояниями будут все состояния с двойными индексами. По построению и согласно определению отношения St данный автомат распознает W_{St}. □

Лемма 4. *Пусть*

$$W^{ij} = \{w \in \Sigma^* | \textit{существует } v \in \Sigma^*, v < w, |v| = |w|, v \; - \textit{устойчивое}, \\ |w| > 2 + 4(2^\rho)! + 2(2^\rho), v[2(2^\rho)!] \geq \alpha_i, v[|w| - 2(2^\rho)!] \geq \alpha_j\}.$$

Тогда W^{ij} *– автоматный язык для всех пар* $i, j \in \{1, \ldots, 2^\rho\}$.

Доказательство. Построим недетерминированный автомат, распознающий данный язык. При помощи верхнего индекса в состоянии «считаем» прочитанные буквы. Первый символ $w[1]$ автомат считывает и переходит недетерминированно в состояние $q^1_{w[1]}$ или в одно из $\bar{q}^1_\alpha$, где $\alpha \in \Sigma, \alpha < w[1]$. Затем, аналогичным образом поступаем со вторым символом, но если находились в состоянии с чертой, то переходим только в одно из состояний с чертой (при этом также увеличивая верхний индекс). Начиная с третьего символа и далее находясь в состоянии $q^i_{\alpha\beta}$ (без черты) и видя символ γ, либо переходим в $\bar{q}^{i+1}_{\beta,\delta}$ для некоторого δ такого, что $(\alpha, \beta, \delta) \in St$ и $\delta < \gamma$, либо переходим в состояние $q^{i+1}_{\beta,\gamma}$, если $(\alpha, \beta, \gamma) \in St$. Если же $(\alpha, \beta, \gamma) \notin St$ и указанного δ тоже не существует, переходим в ошибочное состояние. Заметим, если находимся в состоянии с чертой, то переходим также только в одно из состояний с чертой.

Для всех состояний вида $q^{T+1}_{\delta\epsilon}$, где $T = 2(2^\rho)! + 2^\rho$, определяем переходы следующим образом. Если $\epsilon < \alpha_i$, то переходим в ошибочное состояние. Если же $\epsilon \geq \alpha_i$, то добавим пустой переход в $p_{\delta\epsilon}$. Аналогичным образом поступаем и для состояний вида $\bar{q}^T_{\delta\epsilon}$, но переходим состояние $\bar{p}_{\delta\epsilon}$. Состояния вида $p_{\alpha\beta}$ и $\bar{p}_{\alpha\beta}$ будут использоваться для чтения участка слова, соответствующего участку отношения между кластерами.

Для состояний такого $p_{\alpha\beta}$ переходы определяются аналогично переходам для состояний, описанных выше, но с небольшими изменениями. Во-первых, не будем вводить верхних индексов. Во-вторых, для всякого состояния вида $p_{\alpha\beta}$ при $\beta \geq \alpha_j$

добавим пустой переход в состояние $d_{\alpha\beta}^{-1}$ (аналогично поступаем с состояниями с чертой, но опять же переходим в состояния с чертой).

В состоянии вида $d_{\alpha\beta}^{i}$ нужны будут для чтения участка слова, соответствующего участку отношения правее второго кластера. Изменения нижних индексов, появление черты и увеличение верхнего индекса будет происходить так же, как и описано выше. При этом, для состояния вида $d_{\alpha\beta}^{T-1}$, где T определено так же, как и выше, для всякого входного символа τ такого, найдется τ' такое, что $\tau' < \tau, (\alpha, \beta, \tau') \in St$, сделаем переход в единственное заключительное состояние F. Для состояний вида $\bar{d}_{\alpha\beta}^{T-1}$ переходы в F для всякого символа τ такого, что $(\alpha, \beta, \tau) \in St$ или найдется τ' такое, что $\tau' < \tau, (\alpha, \beta, \tau') \in St$.

Нетрудно видеть из построения автомата, что если существует устойчивое слово v, меньшее входного, на местах с номерами T и $|w| - T$ стоят символы, не меньшие α_i и α_j соответственно, то существует путь в автомате такой, что на некотором этапе будет совершен переход в состояние с чертой, а когда слово закончится, то можно будет совершить переход в заключительное состояние. Если же не существует подходящих устойчивых слов, меньших входного, то в ходе работы автомата либо будет совершен переход в ошибочное состояние, либо весь путь будет проходить по состояниям без черты, соответственно, в заключительное состояние попасть будет невозможно, то есть такое слово не принимается. $\square$

Замечание 6. Пусть

$$B_c = \{w \in \Sigma^* | w = uuw', |u| = c, |w'| \neq 0\},$$
$$E_c = \{w \in \Sigma^* | w = w''vv, |v| = c, |w''| \neq 0\}.$$

Тогда при любом фиксированном натуральном $c > 0$ языки B_c и E_c являются автоматными.

Замечание 7. Для всякого натурального $c > 0$ язык $L_c = \{w \in \Sigma^* || w| > c\}$ является автоматным.

Замечание 8. Для всякого натурального $c > 0$ и для всякого $i \in \{1, \dots, 2^\rho\}$ языки $Lg_c^i = \{w \in \Sigma^* | w[c] \geq \alpha_i\}$ и $Rg_c^i = \{w \in \Sigma^* | w[|w| - c] \geq \alpha_j\}$ являются автоматными.

Лемма 5. *Пусть*

$$W_{St}^{ij} = \{w \in \Sigma^* | w \text{ – минимальное устойчивое такое, что }$$
$$|w| > 2 + 4(2^\rho)! + 2(2^\rho), w[(2^\rho) + 2(2^\rho)!] \geq \alpha_i, w[|w| - (2^\rho) - 2(2^\rho)!] \geq \alpha_j\}.$$

Тогда W_{St}^{ij} *– автоматные языки для любой пары* $i, j \in \{1, \dots, 2^\rho\}$.

Доказательство. Рассмотрим дополнение $\overline{W^{ij}}$ к языку из леммы 4, оно является автоматным. В него попадут слова, не удовлетворяющие хотя бы одному из условий в определении языка. Рассмотрим множество

$$Lg_{2(2^\rho)!}^{i} \cap Rg_{2(2^\rho)!}^{j} \cap L_{2+4(2^\rho)!+2(2^\rho)} \cap B_{(2^\rho)!} \cap E_{(2^\rho)!} \cap \overline{W^{ij}} \cap W_{St}.$$

По построению всякое слово w, попадающее в это множество, обладает следующими свойствами:

1. $|w| > 2 + 4(2^\rho)! + 2(2^\rho)$;
2. $w = uuw', |u| = (2^\rho)!, |w'| \neq 0$;
3. $w = w''vv, |v| = (2^\rho)!, |w''| \neq 0$;
4. $w[2^\rho + 2(2^\rho)!] \geq \alpha_i$;
5. $w[|w| - 2^\rho - 2(2^\rho)!] \geq \alpha_j$;
6. не существует устойчивого слова v такого,что $v < w, |v| = |w|$, и v удовлетворяет условиям 4 и 5 (а также 1).

Таким образом, получаем, что

$$W_{St}^{ij} = Lg^i_{2(2^\rho)!+2^\rho} \cap Rg^j_{2(2^\rho)!+2^\rho} \cap L_{2+4(2^\rho)!+2(2^\rho)} \cap B_{(2^\rho)!} \cap E_{(2^\rho)!} \cap \overline{W^{ij}} \cap W_{St}.$$

Автоматность данного языка следует из лемм 3 и 4, замечаний 6, 7, 8, а также того, что класс автоматных языков замкнут относительно дополнения и пересечения. □

Следствие 1. *При фиксированных i и j язык W_{St}^{ij} для каждого натурального числа n содержит в точности одно слово длины n.*

Доказательство. Непосредственно следует из того, что фиксированная точка есть минимальное (и наименьшее) устойчивое отношение, содержащее оба кластера. □

Теорема 1. *Пусть $w \in W_{St}^{ij}$, автомат с наименьшим числом состояний для языка W_{St}^{ij} имеет N состояний, а $|w| > 3(N+1) + 4(2^\rho)! + 2(2^\rho)$. Тогда $w = \alpha x u^p \bar{y} v z \beta$, для некоторого положительного целого числа p, где $|\alpha| = |\beta| = 2(2^\rho)! + (2^\rho)$, $|xu| \leq N+1, |\bar{y}vz| \leq 2(N+1)$.*

Доказательство. Рассмотрим автомат, распознающий W_{St}^{ij} с наименьшим числом состояний, это число равно N. Пусть $w \in W_{St}^{ij}, |w| > 3(N+1) + 4(2^\rho)! + 2(2^\rho)$. Рассмотрим подслово w' слова w, входящее в w с позиции $2^\rho + 2(2^\rho)!$ и заканчивающееся символом с номером $|w| - 2^\rho - 2(2^\rho)!$. Поскольку $w' > 3N$, при чтении первого $N+1$ символа данного подслова автомат пройдет через одно и то же состояние q_1 хотя бы дважды. Аналогично, при чтении последнего $N+1$ символа слова автомат также пройдет через одно и то же состояние q_2 хотя бы дважды. Тогда слово w' представимо в виде $xuyvz$, где u – участок слова, при чтении которого автомат перешел из q_1 в q_1, а при чтении v он перешел из q_2 в q_2, $|xu| \leq N+1, |vz| \leq N+1$. Пусть $|u| = l_1 \leq N+1, |v| = l_2 \leq N+1$. Заменим w' в слове w на $xu^{kl_2}yvz$ для достаточно большого целого положительного k, обозначим это слово w_1. Нетрудно видеть, что $w_1 \in W_{St}^{ij}$, так как при чтении данного слова автомат просто сделает несколько дополнительных циклов, а во всем остальном будет работать так же, как и на слове w. Аналогично, заменим w' в слове w на $xuyv^{kl_1}z$, обозначим полученное слово w_2, для которого также выполнено $w_2 \in W_{St}^{ij}$. Однако, $|w_1| = |w_2|$, тогда, по следствию 1, $w_1 = w_2$. В частности, это означает, что $u^{l_2}y = yv^{l_1}$. Тогда, при условии, что $|y| > N+1 \geq |u|$ получаем, что $y = uy'$. Аналогичные рассуждения можно продолжать до тех пор, пока длина центральной части превосходит $N+1$ (тогда можно гарантировать, что она больше длины слова u). Таким образом, слово w' представимо в виде $xu^p\bar{y}vz$ для подходящих p и $\bar{y}$, причем, $|xu| \leq N+1, |\bar{y}vz| \leq 2(N+1)$. □

Заключение

В данной работе мы с помощью конечных автоматов исследовали устройство наименьшей фиксированной точки отношения, содержащего два скопления точек. Мы показали, что если данные скопления находятся достаточно далеко друг от друга, то участок между ними будет иметь регулярную структуру, а именно, повторяющиеся фрагменты. Полученные результаты дают возможность элиминировать FP-оператор в данном случае, перебрав все устойчивые отношения, содержащие исходное, а затем рассмотрев их пересечение.

Интерес представляет обобщение данного подхода на случай с произвольным конечным числом скоплений точек в начальном отношении, а также вопрос об элиминации FP-оператора в случае, когда формула содержит неравенства и предикаты делимости.

Список литературы

[1] Blumensath A., Graedel E. Automatic structures // Proc. of 15th IEEE Symposium on Logic in Computer Science. 2000. Pp. 51–62.

[2] Boolos G.S., Jefferey R.C. Computability and Logic. Cambridge University Press, 1994.

[3] Church A. A note on the Entscheidungs problem // The Journal of Symbolic Logic. 1936. No. 1. Pp. 40–41.

[4] Church A. An unsolvable problem of elementary number theory // American Journal of Mathematics. 1936. Vol 58. Pp. 345–363.

[5] Dudakov S.M. On inflationary fix-point operators safety // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2015. Vol. 36, no. 4. Pp. 328–331.

[6] Gurevich Y., Shelah S. Fixed-point extensions of first-order logic // Annals of Pure and Applied Logic. 1986. Vol. 32. Pp. 265–280.

[7] Presburger M. Uber die Vollstandigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt // Comptes Rendus du I congres de Mathematiciens des Pays Slaves. Warszawa, 1929. Pp. 92—101.

[8] Rabin M.O. Decidability of second-order theories and automata on infinite trees // Transactions of the American Mathematical Society. 1969. Vol. 141, no. 7. Pp. 1–35.

[9] Zolotov A.S. On decidability of the theory with the transitive closure operator // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2015. Vol. 36, no. 4. Pp. 434–440.

[10] Дудаков С.М. Монадические состояния над упорядоченным универсальным случайным графом и конечные автоматы // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2011. Т. 75, № 5. С. 47–64.

[11] Дудаков С.М. О безопасности рекурсивных запросов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2012. № 4(27). С. 71–80.

[12] Дудаков С.М. О безопасности IFP-операторов и рекурсивных запросов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2013. № 2(29). С. 5–13.

[13] Дудаков С.М. Неразрешимость проблемы определенности бинарных IFP-операторов для теории одного следования // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 4. С. 7–15.

[14] Золотов А.С. Применение оператора транзитивного замыкания для формул с одной функции следования и предикатами делимости // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2013. № 1(28). С. 101–117.

[15] Золотов А.С. О неразрешимости аддитивных и мультипликативных теорий натуральных чисел с оператором транзитивного замыкания // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 3. С. 117–124.

[16] Золотов А.С. Об элиминации оператора фиксированной точки для некоторых формул в теории одного следования // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 4. С. 27–37.

Библиографическая ссылка

Золотов А.С. О применении конечных автоматов к исследованию разрешимости теории с оператором фиксированной точки // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 1. С. 103–115.

Сведения об авторах

1. **Золотов Александр Сергеевич**
   аспирант кафедры информатики Тверского государственного университета.

   Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

ON THE APPLICATION OF FINITE-STATE MACHINES TO THE INVESTIGATION OF THE FIXED-POINT THEORY DECIDABILITY

Zolotov Alexander Sergeevich
PhD student of Computer Science department, Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU.

Received 15.01.2016, revised 08.02.2016.

We investigate effective elimination of the fixed point operator in a theory of integers with a single successor function. We construct a finite-state machine for a language containing words matching the least fixed point.

Keywords: decidability, fixed point operator, finite-state machine.

Bibliographic citation

Zolotov A.S. On the application of finite-state machines to the investigation of the fixed-point theory decidability. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2016, no. 1, pp. 103–115. (in Russian)

References

[1] Blumensath A., Graedel E. Automatic structures. *Proc. of 15th IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, 2000. Pp. 51–62.

[2] Boolos G.S., Jefferey R.C. *Computability and Logic*. Cambridge University Press, 1994.

[3] Church A. A note on the Entscheidungs problem. *The Journal of Symbolic Logic*, 1936, no. 1, pp. 40–41.

[4] Church A. An unsolvable problem of elementary number theory. *American Journal of Mathematics*, 1936, vol. 58, pp. 345–363.

[5] Dudakov S.M. On inflationary fix-point operators safety. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2015, vol. 36(4), pp. 328–331.

[6] Gurevich Y., Shelah S. Fixed-point extensions of first-order logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 1986, vol. 32, pp. 265–280.

[7] Presburger M. Uber die Vollstandigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt. *Comptes Rendus du I congres de Mathematiciens des Pays Slaves*. Warszawa, 1929. Pp. 92–101.

[8] Rabin M.O. Decidability of second-order theories and automata on infinite trees. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1969, vol. 141(7), pp. 1–35.

[9] Zolotov A.S. On decidability of the theory with the transitive closure operator. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2015, vol. 36(4), pp. 434–440.

[10] Dudakov S.M. Monadic structures over an ordered universal random graph and finite automata. *Izvestiya: Mathematics*, 2011, vol. 75(5), pp. 915–932.

[11] Dudakov S.M. On safety of recursive queries. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2012, no. 4(27), pp. 71–80. (in Russian)

[12] Dudakov S.M. On safety of IFP-operators and recursive queries. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2013, no. 2(29), pp. 5–13. (in Russian)

[13] Dudakov S.M. On undecidability of definiteness of binary IFP-operators for one successor function theory. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2014, no. 4, pp. 7–15. (in Russian)

[14] Zolotov A.S. The use of the transitive closure operator on formulas with a single successor function and divisibility predicates. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2013, no. 1(28), pp. 101–117. (in Russian)

[15] Zolotov A.S. On undecidability of additive and multiplicative theories of natural numbers with the transitive closure operator. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2014, no. 3, pp. 117–124. (in Russian)

[16] Zolotov A.S. On the elimination of fixed point operator for some formulas in a theory of single successor function. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2015, no. 4, pp. 27–37. (in Russian)