УДК 519.2

СВОЙСТВА СТАТИСТИКИ КОЛМОГОРОВА-СМИРНОВА

Ташков И.А.
МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва

Поступила в редакцию 03.02.2016, после переработки 20.02.2016.

В статье рассматривается оценка статистики Колмогорова-Смирнова при малых объемах выборки. Доказана неулучшаемая верхняя оценка распределения статистики при объеме выборки 2 и 3.

Ключевые слова: статистика Колмогорова-Смирнова.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 2. С. 31–38.

1. Введение

Рассмотрим независимые одинаково распределенные случайные величины $x_1, \ldots, x_n$ с непрерывной функцией распределения $F(x)$. Обозначим $F_n(x)$ эмпирическую функцию распределения, построенную по упомянутым случайным величинам.

В 1956 году в статье Дворецкого, Кифера, Волфовица [1] доказано неравенство

$$P(\sup_{-\infty<x<+\infty} \sqrt{n} \cdot (F_n(x) - F(x)) > \lambda) \leqslant Ce^{-2\lambda^2} \tag{1}$$

с некоторой постоянной C. Двумя годами позже Бирнбаум и Маккарти [2] предположили, что C можно взять равной 1, исходя из собственных численных вычислений и асимптотического выражения, полученного Смирновым в [3]

$$P(\sup_x \sqrt{n} \cdot (F_n(x) - F(x)) > \lambda) = e^{-2\lambda^2} \left(1 - \frac{2\lambda}{3\sqrt{n}} + O(n^{-1})\right) \text{ для } \lambda = O(n^{\frac{1}{6}}).$$

Деврой и Уайз [4] в 1979 году показали, что $C \leqslant 306$. Шорак и Уеллнер [5] в 1986 году показали, что $C \leqslant 29$. Лучшего результата добился в своей статье Ху [6] (1985), показавший, что $C \leqslant 2\sqrt{2}$.

В данной статье доказано неравенство (1) с постоянной $C = 1$ для $n = 2$ и $n = 3$. Перепишем неравенство для удобства последующих ссылок

$$P(\sup_{-\infty<x<+\infty} \sqrt{n} \cdot (F_n(x) - F(x)) > \lambda) \leqslant e^{-2\lambda^2}, \text{ где } \lambda \geqslant 0. \tag{2}$$

В статье Смирнова [3] показано, что

$$P_n^+(\lambda) = P(\sup_{-\infty<x<+\infty} (F_n(x) - F(x)) \leqslant \frac{\lambda}{\sqrt{n}}) =$$
$$= 1 - (1 - \frac{\lambda}{\sqrt{n}})^n - \lambda\sqrt{n} \sum_{k=r+1}^{n-1} \frac{C_n^k (k - \lambda\sqrt{n})^k (n - k + \lambda\sqrt{n})^{n-k-1}}{n^n} \tag{3}$$

для $0 < \lambda < \sqrt{n}$, где $r = [\lambda\sqrt{n}]$. Заметим, что $P_n^+(\lambda) = 0$ для $\lambda \le 0$ и $P_n^+(\lambda) = 1$ для $\lambda \ge \sqrt{n}$.

2. Предварительные результаты

Докажем сначала одно общее утверждение, которое частично подтверждает гипотезу о том, что неравенство (1) справедливо с постоянной $C = 1$. Обозначим $f_n^+ = 1 - P_n^+(\lambda)$, где функция $P_n^+(\lambda)$ определена в (3). Исследуем функцию $f_n^+(\lambda)$ на полуинтервале $[(n-1)/\sqrt{n}, n/\sqrt{n})$. На указанном полуинтервале функция $f_n^+(\lambda)$ принимает вид

$$f_n^+(\lambda) = (1 - \frac{\lambda}{\sqrt{n}})^n \text{ при } \lambda \in [\frac{n-1}{\sqrt{n}}, \sqrt{n}).$$

Прологарифмируем, а затем продифференцируем по переменной λ функцию

$$f_n^+(\lambda) \cdot e^{2\lambda^2} = (1 - \frac{\lambda}{\sqrt{n}})^n \cdot e^{2\lambda^2} \text{ при } \lambda \in [\frac{n-1}{\sqrt{n}}, \sqrt{n}). \tag{4}$$

В результате получим

$$(\ln(f_n^+(\lambda) \cdot e^{2\lambda^2}))' = (\ln((1 - \frac{\lambda}{\sqrt{n}})^n \cdot e^{2\lambda^2}))' = \frac{(2\lambda - \sqrt{n})^2}{\lambda - \sqrt{n}}.$$

Заметим, что дробь отрицательна для $0 \leqslant \lambda < \sqrt{n}$. Поэтому функция (4) убывает и, следовательно, принимает свое максимальное значение в точке $\lambda = 0$. Максимальное значение функции равно единице. Отсюда следует неравенство (2) для $\lambda \in [(n-1)/\sqrt{n}, \sqrt{n})$. Для удобства ссылок сформулируем доказанный результат в виде леммы.

Лемма 1. *Для $\lambda \in [(n-1)/\sqrt{n}, \sqrt{n})$ выполняется неравенство*

$$P(\sup_{-\infty<x<+\infty} \sqrt{n} \cdot (F_n(x) - F(x)) > \lambda) \leqslant e^{-2\lambda^2}.$$

3. Основные результаты

В этом разделе будет доказано неравенство (2) для $n = 2$ и $n = 3$. Рассмотрим случай $n = 2$. Докажем, что

$$f_2^+(\lambda) \cdot e^{2\lambda^2} \leqslant 1 \text{ при } \lambda \in [0, \sqrt{2}).$$

Это неравенство выполняется для $\lambda \in [1/\sqrt{2}, \sqrt{2})$ по лемме 1. Докажем неравенство для $\lambda \in [0, 1/\sqrt{2})$.

Функция $f_2^+(\lambda)$, $\lambda \in [0, 1/\sqrt{2})$, имеет следующий вид

$$f_2^+(\lambda) = (1 - \frac{\lambda}{\sqrt{2}})^2 + 2\lambda\sqrt{2}\frac{(1-\sqrt{2}\lambda)}{4} = -\frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} + 1.$$

Прологарифмируем и затем продифференцируем по λ произведение $f_2^+(\lambda)e^{2\lambda^2}$. В результате мы получим

$$\left(\ln(f_2^+(\lambda)\cdot e^{2\lambda^2})\right)' = \frac{2\lambda^3+2\sqrt{2}\lambda^2-3\lambda+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\lambda^2}{2}+\frac{\lambda}{\sqrt{2}}-1}. \tag{5}$$

Заметим, что знаменатель дроби (5) отрицателен на промежутке $\lambda\in[0,1/\sqrt{2})$. Докажем, что числитель указанной дроби положителен. Обозначим его $z(\lambda)$

$$z(\lambda)=2\lambda^3+2\sqrt{2}\lambda^2-3\lambda+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

и вычислим его производную

$$z'(\lambda)=6\lambda^2+4\sqrt{2}\lambda-3.$$

Корнями этого трехчлена являются $(-2\sqrt{2}\pm\sqrt{26})/6$. Поэтому

$$z'(\lambda)<0 \text{ при } \lambda\in\left[0,\frac{-2\sqrt{2}+\sqrt{26}}{6}\right),$$

$$z'(\lambda)=0 \text{ при } \lambda=\frac{-2\sqrt{2}+\sqrt{26}}{6},$$

$$z'(\lambda)>0 \text{ при } \lambda\in\left(\frac{-2\sqrt{2}+\sqrt{26}}{6},+\infty\right).$$

Следовательно, $z(\lambda)\geqslant z((-2\sqrt{2}+\sqrt{26})/6)$ для всех $\lambda\in[0,1/\sqrt{2})$. Значение функции $z(\lambda)$ в точке $\lambda_0=(-2\sqrt{2}+\sqrt{26})/6$ равно

$$z(\lambda_0)=\frac{2(-2^3\cdot 2\sqrt{2}+3\cdot 4\cdot 2\sqrt{26}-3\cdot 2\sqrt{2}\cdot 26+26\sqrt{26})}{3^3\cdot 2^3}+$$

$$+\frac{2\sqrt{2}(26-4\sqrt{2}\cdot\sqrt{26}+8)}{3^2\cdot 2^2}-\frac{3(\sqrt{26}-2\sqrt{2})}{3\cdot 2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(97-26\sqrt{13})}{3^3\cdot 2}>0.$$

Тем самым доказано, что функция

$$f_2^+(\lambda)e^{2\lambda^2}=(-\frac{\lambda^2}{2}-\frac{\lambda}{\sqrt{2}}+1)e^{2\lambda^2} \text{ при } \lambda\in[0,1/\sqrt{2})$$

убывает. Она принимает свое максимальное значение, равное единице, в точке $\lambda=0$. Таким образом, неравенство (2) для $n=2$ доказано.

Исследуем случай $n=3$. Рассмотрим функцию $f_n^+(\lambda)$ на трех промежутках: $[0,1/\sqrt{3})$, $[1/\sqrt{3},2/\sqrt{3})$ и $[2/\sqrt{3},\sqrt{3})$. В силу леммы 1 требуется рассмотреть лишь промежутки $[0,1/\sqrt{3})$ и $[1/\sqrt{3},2/\sqrt{3})$.

Рассмотрим полуинтервал $[0,1/\sqrt{3})$ и покажем, что $f_3^+(\lambda)e^{2\lambda^2}\leqslant 1$. На данном полуинтервале функция $f_3^+(\lambda)$ принимает следующий вид

$$f_3^+(\lambda)=(1-\frac{\lambda}{\sqrt{3}})^3+\lambda\sqrt{3}\left(\frac{C_3^1(1-\sqrt{3}\lambda)^1\cdot(3-1+\sqrt{3}\lambda)^1}{3^3}+\frac{C_3^2(2-\sqrt{3}\lambda)^2}{3^3}\right)=$$

$$= \frac{-\sqrt{3}\lambda^3 - 6\lambda^2 - 3\sqrt{3}\lambda + 9}{9}.$$

Прологарифмируем и затем продифференцируем по λ произведение $f_3^+(\lambda)e^{2\lambda^2}$. В результате мы получим

$$\left(\ln(f_3^+(\lambda)e^{2\lambda^2})\right)' = \frac{-\frac{4\sqrt{3}}{9}\lambda^4 - \frac{8}{3}\lambda^3 - \frac{5\sqrt{3}}{3}\lambda^2 + \frac{8}{3}\lambda - \frac{\sqrt{3}}{3}}{-\frac{\sqrt{3}}{9}\lambda^3 - \frac{2}{3}\lambda^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\lambda + 1}. \tag{6}$$

Знаменатель дроби (6) положителен для $\lambda \in [0, 1/\sqrt{3})$, так как он совпадает с положительной функцией $f_3^+(\lambda)$. Обозначим числитель в (6) как $z(\lambda)$ и докажем, что функция

$$z(\lambda) = -\frac{4\sqrt{3}}{9}\lambda^4 - \frac{8}{3}\lambda^3 - \frac{5\sqrt{3}}{3}\lambda^2 + \frac{8}{3}\lambda - \frac{\sqrt{3}}{3},\ \lambda \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

отрицательна. С этой целью исследуем ее производную

$$z'(\lambda) = -\frac{16\sqrt{3}}{9}\lambda^3 - 8\lambda^2 - \frac{10\sqrt{3}}{3}\lambda + \frac{8}{3},\ \lambda \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Производная $z'(\lambda)$ убывает. Ее значение в точке $\lambda = 0$ положительно, а в точке $\lambda = 1/\sqrt{3}$ — отрицательно. Поэтому производная $z'(\lambda)$ обращается в ноль в некоторой точке $\lambda_0 \in (0, 1/\sqrt{3})$. Функция $z(\lambda)$ достигает своего максимального значения в точке λ_0. Достаточно доказать, что $z(\lambda_0) < 0$.

Величину λ_0 можно вычислить по формуле Кардано (см. [7] стр. 235). Число λ_0 является решением уравнения

$$\lambda^3 + \frac{9}{2\sqrt{3}}\lambda^2 + \frac{15}{8}\lambda - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,$$

которое получается после деления производной на $-16\sqrt{3}/9$. Преобразуем это уравнение с помощью замены переменной $\lambda = y - \sqrt{3}/2$. В результате получится неполное кубическое уравнение

$$y^3 - \frac{3}{8}y - \frac{11\sqrt{3}}{16} = 0.$$

Это уравнение является частным случаем неполного кубического уравнения $y^3 + py + q = 0$. Его вещественный корень можно вычислить по формуле Кардано

$$y_0 = \left(-\frac{q}{2} + \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)^{1/2}\right)^{1/3} + \left(-\frac{q}{2} - \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)^{1/2}\right)^{1/3}.$$

В рассматриваемом случае при $p = -3/8$ и $q = -11\sqrt{3}/16$ получается, что

$$y_0 = \left(\frac{11\sqrt{3}}{32} + \frac{\sqrt{361}}{2^5}\right)^{1/3} + \left(\frac{11\sqrt{3}}{32} - \frac{\sqrt{361}}{2^5}\right)^{1/3}.$$

Требуемая величина $\lambda_0 = y_0 - \sqrt{3}/2$. Вычисления показывают, что $z(\lambda_0) < 0$. Тем самым доказано, что функция $z(\lambda), \lambda \in [0, 1/\sqrt{3})$, отрицательна. Поэтому функция $f_3^+(\lambda)e^{2\lambda^2}, \lambda \in [0, 1/\sqrt{3})$ убывает. Ее максимальное значение, равное единице, достигается в точке $\lambda = 0$. Следовательно неравенство (2) доказано на отрезке $[0, 1/\sqrt{3})$.

Докажем неравенство (2) для $n = 3$ на отрезке $[1/\sqrt{2}, 2/\sqrt{3})$. На указанном отрезке функция $f_3^+(\lambda)$ имеет следующий вид

$$f_3^+(\lambda) = 1 - \sqrt{3}\lambda + \lambda^2 - \frac{\lambda^3}{3\sqrt{3}} + \lambda\sqrt{3}\frac{C_3^2(2-\lambda\sqrt{3})^2}{3^3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}\lambda^3 - \frac{\lambda^2}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{9}\lambda + 1.$$

Докажем неравенство

$$f_3^+(\lambda) \cdot e^{2\lambda^2} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{9}\lambda^3 - \frac{\lambda^2}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{9}\lambda + 1\right) \cdot e^{2\lambda^2} \leqslant 1 \text{ для } \lambda \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

Прологарифмируем и затем продифференцируем по λ произведение $f_3^+(\lambda)e^{2\lambda^2}$. В результате получим

$$\Big(\ln(f_3^+(\lambda) \cdot e^{2\lambda^2})\Big)' = \frac{\frac{8\sqrt{3}}{9}\lambda^4 - \frac{4}{3}\lambda^3 - \frac{14\sqrt{3}}{9}\lambda^2 + \frac{10}{3}\lambda - \frac{5\sqrt{3}}{9}}{\frac{2\sqrt{3}}{9}\lambda^3 - \frac{\lambda^2}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{9}\lambda + 1}. \tag{7}$$

Знаменатель дроби (7) положителен, так как он совпадает с положительной функцией $f_3^+(\lambda)$. Тогда, подставив в знаменатель $\lambda = 2/\sqrt{3}$ и убедившись, что в этой точке знаменатель положителен, можно заключить из приведенных выше суждений, что он положителен всюду на $\lambda \in [1/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3})$.

Обозначим $z(\lambda)$ числитель дроби (7) и докажем, что функция

$$z(\lambda) = \frac{8\sqrt{3}}{9}\lambda^4 - \frac{4}{3}\lambda^3 - \frac{14\sqrt{3}}{9}\lambda^2 + \frac{10}{3}\lambda - \frac{5\sqrt{3}}{9}, \lambda \in [1/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3})$$

отрицательна. Первая и вторая производные функции равны

$$z'(\lambda) = \frac{32\sqrt{3}}{9}\lambda^3 - 4\lambda^2 - \frac{28\sqrt{3}}{9}\lambda + \frac{10}{3},$$

$$z''(\lambda) = \frac{32\sqrt{3}}{3}\lambda^2 - 8\lambda - \frac{28\sqrt{3}}{9}.$$

Корнями второй производной являются числа $(24 \pm 8\sqrt{65})/64\sqrt{3}$. Вторая производная удовлетворяет следующим условиям

$$z''(\lambda) < 0 \text{ при } \lambda \in \Big[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{24+8\sqrt{65}}{64\sqrt{3}}\Big),$$

$$z''(\lambda) = 0 \text{ при } \lambda = \frac{24+8\sqrt{65}}{64\sqrt{3}},$$

$$z''(\lambda) > 0 \text{ при } \lambda \in \Big(\frac{24+8\sqrt{65}}{64\sqrt{3}}, +\infty\Big).$$

Заметим, что $9/(8\sqrt{3}) < (24+8\sqrt{65})/(64\sqrt{3})$ и, следовательно, $z''(\lambda) < 0$ для $\lambda \in [1/\sqrt{3}, 9/(8\sqrt{3})]$. Первая производная $z'(\lambda)$ убывает на сегменте $[1/\sqrt{3}, 9/(8\sqrt{3})]$. Вычисления показывают, что $z'(1/\sqrt{3}) = 2/27$ и $z(1/\sqrt{3}) = -\sqrt{3}/81$. Применяя формулу Тейлора, мы получаем

$$z(\lambda) = z\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + z'(\psi)\left(\lambda - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \leq z\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + z'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\lambda - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \leq$$

$$\leq -\frac{\sqrt{3}}{81} + \frac{2}{27}\left(\frac{9}{8\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0.$$

Тем самым доказано неравенство

$$z(\lambda) \leq 0 \text{ для } \lambda \in \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{9}{8\sqrt{3}}\right].$$

Вычисления показывают, что $z'(9/(8\sqrt{3})) = -1/6 < 0$ и $z'(2/\sqrt{3}) = 34/27 > 0$. Производная $z'(\lambda)$ убывает на сегменте $[9/(8\sqrt{3}), (24+8\sqrt{65})/(64\sqrt{3})]$ и возрастает на сегменте $[(24+8\sqrt{65})/(64\sqrt{3}), 2\sqrt{3}]$. Найдется точка $\lambda_0 \in [(24+8\sqrt{65})/(64\sqrt{3}), 2/\sqrt{3})$ в которой производная $z'(\lambda)$ обращается в ноль. Функция $z(\lambda)$ убывает на сегменте $[9/(8\sqrt{3}), \lambda_0]$. Так как $z(9/(8\sqrt{3})) \leq 0$, то функция $z(\lambda)$ не положительна на сегменте $[9/(8\sqrt{3}), \lambda_0]$. Функция $z(\lambda)$ возрастает на сегменте $[\lambda_0, 2/\sqrt{3}]$ и, следовательно, достигает своего максимального значения в точке $\lambda = 2/\sqrt{3}$. Расчеты показывают, что $z(2/\sqrt{3}) < 0$. Тем самым доказано, что функция $z(\lambda)$ не положительна для всех $\lambda \in [1/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}]$. Поэтому функция

$$f_3^+(\lambda)e^{2\lambda^2} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{9}\lambda^3 - \frac{1}{3}\lambda^2 - \frac{5\sqrt{3}}{9}\lambda + 1\right)e^{2\lambda^2}$$

убывает на сегменте $[1/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3})$. Ее максимальное значение достигается в точке $\lambda = 1/\sqrt{3}$. Вычисления показывают, что $f_3^+(1/\sqrt{3})e^{2(1/\sqrt{3})^2} < 1$. Тем самым доказано неравенство (2) для $n = 3$.

В связи с тем, что и левая, и правая части выражения (2) при $\lambda = 0$ равны 1, полученная оценка с константой $C = 1$ из (1) является неулучшаемой.

Заключение

В статье получена оценка статистики Колмогорова-Смирнова при $n = 2$ и $n = 3$. Из данной оценки следует справедливость гипотезы Бирнбаума и Маккарти для указанных n.

Список литературы

[1] Dvoretzky A., Kiefer J., Wolfowitz J. Asymptotic minimax character of the sample distribution function and of the classical multinomial estimator // The Annals of Mathematical Statistics. 1956. Vol. 27, № 3. Pp. 642–669.

[2] Birnbaum Z.W., McCarty R.C. A distribution-free upper confidence bound for P(Y < X) based on independent samples of X and Y // The Annals of Mathematical Statistics. 1958. Vol. 29, № 2. Pp. 558–562.

[3] Смирнов Н.В. Приближение законов распределения случайных величин по эмпирическим данным // Успехи математических наук. 1944. № 10. С. 179–206.

[4] Devroye L.P., Wise G.L. On the recovery of discrete probability densities from imperfect measurements // Journal of the Franklin Institute. 1979. Vol. 307. Pp. 1–20.

[5] Shorack G.R., Wellner J.A. Empirical Processes with Applications to Statistics. N.Y.: Wiley, 1986. 976 p.

[6] Hu I. A uniform bound for the tail probability of Kolmogorov-Smirnov statistics // The Annals of Statistics. 1985. Vol. 13. Pp. 821–826.

[7] Курош А.Г. Вычисление корней многочленов // Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1968. С. 233–265.

Библиографическая ссылка

Ташков И.А. Свойства статистики Колмогорова-Смирнова // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 2. С. 31–38.

Сведения об авторах

1. **Ташков Иван Андреевич**
студент кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ им. М.В. Ломоносова.

PROPERTIES OF KOLMOGOROV-SMIRNOV STATISTICS

Tashkov Ivan Andreevich
Student of Mathematical Statistics department,
Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics,
Lomonosov Moscow State University
Russia, 119992, Moscow, GSP-1, Vorobyovi gory, Lomonosov MSU.

Received 03.02.2016, revised 20.02.2016.

In this paper Kolmogorov-Smirnov statistic is considered with small sample size. An unimproved estimate for the distribution of the statistic of sample volumes n=2 and n=3 is proved.

Keywords: Kolmogorov-Smirnov statistics.

Bibliographic citation

Tashkov I.A. Properties of Kolmogorov-Smirnov statistics. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2016, no. 2, pp. 31–38. (in Russian)

References

[1] Dvoretzky A., Kiefer J., Wolfowitz J. Asymptotic minimax character of the sample distribution function and of the classical multinomial estimator. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1956, vol. 27(3), pp. 642–669.

[2] Birnbaum Z.W., McCarty R.C. A distribution-free upper confidence bound for $P(Y < X)$ based on independent samples of X and Y. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1958, vol. 29(2), pp. 558–562.

[3] Smirnov N.V. Approximation of the laws of distribution of random variables from empirical data. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk* [Successes of Mathematical Sciences], 1944, no. 10, pp. 179–206. (in Russian)

[4] Devroye L.P., Wise G.L. On the recovery of discrete probability densities from imperfect measurements. *Journal of the Franklin Institute*, 1979, vol. 307, pp. 1–20.

[5] Shorack G.R., Wellner J.A. *Empirical Processes with Applications to Statistics.* Wiley, N.Y., 1986. 976 p.

[6] Hu I. A uniform bound for the tail probability of Kolmogorov-Smirnov statistics. *The Annals of Statistics*, 1985, vol. 13, pp. 821–826.

[7] Kurosh A.G. The calculation of the roots of polynomials. In *Kurs Vysshei Algebry* [Course of Higher Algebra]. Nauka Publ., Moscow, 1968. Pp. 233–265. (in Russian)