УДК 519.872

АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ АВТОРЕГРЕССИОННОГО ТИПА

Леонтьев Н.Д.
МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва

Поступила в редакцию 20.05.2016, после переработки 03.06.2016.

В работе рассматривается одноканальная система массового обслуживания с неограниченным числом мест для ожидания, в которую поступает пуассоновский поток групп требований. Особенностью системы является авторегрессионная зависимость размеров групп поступающих требований: размер n-й поступившей в систему группы требований либо с некоторой фиксированной вероятностью равен размеру $(n-1)$-й поступившей в систему группы требований, либо с дополнительной вероятностью является независимой от него случайной величиной. Длительности обслуживания требований являются независимыми случайными величинами с произвольным распределением. Изучается стационарный режим функционирования системы; получено выражение для производящей функции длины очереди, а также математическое ожидание длины очереди в частном случае.

Ключевые слова: теория массового обслуживания, стационарный режим, системы с групповым поступлением требований.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 2. С. 39–48.

Введение

Настоящая работа является продолжением статьи [1], где рассмотрена система массового обслуживания типа $M|G|1$ с групповым поступлением требований, в которой размеры поступающих групп связаны регрессионной зависимостью. Мы концентрируемся на изучении стационарного режима функционирования системы. Основными результатами статьи являются выражения для распределения и математического ожидания длины очереди.

1. Описание системы

Рассмотрим систему обслуживания, состоящую из одного обслуживающего устройства, на которое поступает простейший поток групп требований с интенсивностью a. Будем считать, что число мест для ожидания не ограничено, а длительность обслуживания требований имеет функцию распределения $B(x)$ с плотностью $b(x)$ и преобразованием Лапласа $\beta(s)$. Поступающие в систему группы требований могут иметь размер $1,\ldots,M$ с вероятностями, соответственно, $h_1,\ldots,h_M$.

При этом размер n-й поступившей в систему группы требований с вероятностью $0 \le p < 1$ равен размеру $(n-1)$-й, либо с дополнительной вероятностью $1-p$ является независимой от него случайной величиной.

Определим следующие случайные процессы:

– $L(t)$ – число требований в системе в момент t;

– $X(t)$ – время, прошедшее с начала обслуживания требования, находящегося на обслуживании в момент t[1];

– $N(t)$ – размер последней поступившей в систему до момента t группы требований.

Введем следующие обозначения:

$$P(n,k,x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}(L(t)=n, N(t)=k, X(t)<x),$$
$$P(n,k,t) = \mathbf{P}(L(t)=n, N(t)=k).$$

Обозначим

$$\pi(z,k,x,s) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_0^{\infty} e^{-st} P(n,k,x,t)dt, \;\; \pi_0(k,s) = \int_0^{\infty} e^{-st} P(0,k,t)dt$$

при $|z| \le 1$, $\mathrm{Re}\,(s) > 0$.

2. Предварительные результаты

В статье [1] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Функция $\pi(z,k,x,s)$ при $|z|<1$, $k=1,\dots,M$, $x \ge 0$, $\mathrm{Re}\,(s)>0$ определяется по формуле*

$$\pi(z,k,x,s) = (1-B(x)) \sum_{n=1}^{M} C_n(z,s) \frac{(1-p)h_k a z^k}{\widetilde{\lambda}_n(z) - paz^k} \exp\left(-\left(s+a-\widetilde{\lambda}_n(z)\right)x\right),$$

где

$$C_n(z,s) = \frac{1}{1-z^{-1}\beta\left(s+a-\widetilde{\lambda}_n(z)\right)} \frac{\prod\limits_{i=1}^{M}\left(\widetilde{\lambda}_n(z)-paz^i\right)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{M}\left(\widetilde{\lambda}_n(z)-\widetilde{\lambda}_j(z)\right)} \sum_{m=1}^{M} \frac{b_m(z,s)}{\widetilde{\lambda}_n(z)-paz^m}, \qquad (1)$$

$$b_m(z,s) = -(s+a)\pi_0(m,s) + h_m + \left[p\pi_0(m,s)az^m + (1-p)\sum_{n=1}^{M}\pi_0(n,s)h_m az^m\right].$$

[1] В случае, когда система свободна, можно для определенности положить $X(t)=0$.

$\widetilde{\lambda}_1(z),\ldots,\widetilde{\lambda}_M(z)$ *определяются из уравнения*

$$\prod_{i=1}^{M}\left(paz^i-\widetilde{\lambda}\right)+\sum_{i=1}^{M}(1-p)h_iaz^i\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{M}\left(paz^j-\widetilde{\lambda}\right)=0, \tag{2}$$

а $\pi_0(1,s),\ldots,\pi_0(M,s)$ — *из системы*

$$\sum_{m=1}^{M}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq m}}^{M}\left(\widetilde{\lambda}_n(z_n)-paz_n^j\right)\left(-(s+a)\pi_0(m,s)+h_m+\widetilde{\lambda}_n(z_n)\pi_0(m,s)\right)=0, \tag{3}$$

в которой $z_n=z_n(s)$ — *решение функционального уравнения*

$$z_n=\beta\left(s+a-\widetilde{\lambda}_n(z_n)\right). \tag{4}$$

Введем обозначения

$$P(n,t)=\mathbf{P}(L(t)=n)$$

и

$$\pi(z,k,s)=\sum_{n=1}^{\infty}z^n\int_0^{\infty}e^{-st}P(n,k,t)dt,$$

$$\pi(z,s)=\sum_{n=1}^{\infty}z^n\int_0^{\infty}e^{-st}P(n,t)dt,$$

при $|z|<1$, $\operatorname{Re}(s)>0$.

Имеем

$$\pi(z,k,s)=\int_0^{\infty}\pi(z,k,x,s)dx=$$

$$=\sum_{n=1}^{M}C_n(z,s)\frac{(1-p)h_kaz^k}{\widetilde{\lambda}_n(z)-paz^k}\int_0^{\infty}(1-B(x))\exp\left(-\left(s+a-\widetilde{\lambda}_n(z)\right)x\right)dx=$$

$$=\sum_{n=1}^{M}C_n(z,s)\frac{(1-p)h_kaz^k}{\widetilde{\lambda}_n(z)-paz^k}(s+a-\widetilde{\lambda}_n(z))^{-1}(1-\beta(s+a-\widetilde{\lambda}_n(z))).$$

Далее, подставляя $\widetilde{\lambda}_n(z)$ в уравнение (2), получим

$$\prod_{i=1}^{M}\left(paz^i-\widetilde{\lambda}_n(z)\right)+\sum_{i=1}^{M}(1-p)h_iaz^i\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{M}\left(paz^j-\widetilde{\lambda}_n(z)\right)=0.$$

Поделив обе части уравнения на $\prod\limits_{i=1}^{M}\Big(paz^i-\widetilde{\lambda}_n(z)\Big)$, после некоторых преобразований получим

$$\sum_{i=1}^{M}\frac{(1-p)h_i az^i}{\widetilde{\lambda}_n(z)-paz^i}=1.$$

С учетом этого результата будем иметь

$$\begin{aligned}
&\pi(z,s)=\sum_{k=1}^{M}\pi(z,k,s)=\\
&=\sum_{n=1}^{M}C_n(z,s)(s+a-\widetilde{\lambda}_n(z))^{-1}(1-\beta(s+a-\widetilde{\lambda}_n(z)))\sum_{k=1}^{M}\frac{(1-p)h_k az^k}{\widetilde{\lambda}_n(z)-paz^k}=\\
&=\sum_{n=1}^{M}C_n(z,s)(s+a-\widetilde{\lambda}_n(z))^{-1}(1-\beta(s+a-\widetilde{\lambda}_n(z))).
\end{aligned}$$

Подставим выражение для $C_n(z,s)$ из (1):

$$\begin{aligned}
\pi(z,s)=\sum_{n=1}^{M}&(s+a-\widetilde{\lambda}_n(z))^{-1}\frac{1-\beta(s+a-\widetilde{\lambda}_n(z))}{1-z^{-1}\beta(s+a-\widetilde{\lambda}_n(z))}\times\\
&\times\frac{\prod\limits_{i=1}^{M}\Big(\widetilde{\lambda}_n(z)-paz^i\Big)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{M}\Big(\widetilde{\lambda}_n(z)-\widetilde{\lambda}_j(z)\Big)}\sum_{m=1}^{M}\frac{b_m(z,s)}{\widetilde{\lambda}_n(z)-paz^m}.
\end{aligned}$$

Упростим последний множитель, подставив в него выражение для $b_m(z,s)$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{M}\frac{b_m(z,s)}{\widetilde{\lambda}_n(z)-paz^m}=\sum_{m=1}^{M}\frac{h_m-(s+a-paz^m)\pi_0(m,s)}{\widetilde{\lambda}_n(z)-paz^m}+\\
&+\sum_{k=1}^{M}\pi_0(k,s)\sum_{m=1}^{M}\frac{(1-p)h_m az^m}{\widetilde{\lambda}_n(z)-paz^m}=\sum_{m=1}^{M}\frac{h_m-(s+a-paz^m)\pi_0(m,s)}{\widetilde{\lambda}_n(z)-paz^m}+\\
&+\sum_{k=1}^{M}\pi_0(k,s)=\sum_{m=1}^{M}\frac{h_m-(s+a-paz^m)\pi_0(m,s)+(\widetilde{\lambda}_n(z)-paz^m)\pi_0(m,s)}{\widetilde{\lambda}_n(z)-paz^m}=\\
&=\sum_{m=1}^{M}\frac{h_m-(s+a-\widetilde{\lambda}_n(z))\pi_0(m,s)}{\widetilde{\lambda}_n(z)-paz^m}.
\end{aligned}$$

Итак, окончательное выражение для $\pi(z,s)$ принимает вид

$$\pi(z,s)=\sum_{n=1}^{M}(s+a-\widetilde{\lambda}_n(z))^{-1}\frac{1-\beta(s+a-\widetilde{\lambda}_n(z))}{1-z^{-1}\beta(s+a-\widetilde{\lambda}_n(z))}\times$$
$$\times\frac{\prod\limits_{i=1}^{M}\left(\widetilde{\lambda}_n(z)-paz^i\right)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{M}\left(\widetilde{\lambda}_n(z)-\widetilde{\lambda}_j(z)\right)}\sum_{m=1}^{M}\frac{h_m-(s+a-\widetilde{\lambda}_n(z))\pi_0(m,s)}{\widetilde{\lambda}_n(z)-paz^m}.$$

3. Стационарный режим

В дальнейшем будем предполагать, что $a\beta_1\mathbf{E}H<1$, где $\beta_1=-\beta'(0)=\int_0^\infty xdB(x)$, а $\mathbf{E}H=\sum\limits_{n=1}^{M}nh_n$.

Обозначим

$$\pi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}z^n\lim_{t\to\infty}P(n,t),$$
$$p_0(m)=\lim_{t\to\infty}P(0,m,t).$$

В соответствии с абелевой теоремой (см. Приложение)

$$\pi(z)=\lim_{s\to0+}s\pi(z,s)=\sum_{n=1}^{M}(a-\widetilde{\lambda}_n(z))^{-1}\frac{1-\beta(a-\widetilde{\lambda}_n(z))}{1-z^{-1}\beta(a-\widetilde{\lambda}_n(z))}\times$$
$$\times\frac{\prod\limits_{i=1}^{M}\left(\widetilde{\lambda}_n(z)-paz^i\right)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{M}\left(\widetilde{\lambda}_n(z)-\widetilde{\lambda}_j(z)\right)}\sum_{m=1}^{M}\frac{-(a-\widetilde{\lambda}_n(z))\lim\limits_{s\to0+}s\pi_0(m,s)}{\widetilde{\lambda}_n(z)-paz^m}=$$
$$=-\sum_{n=1}^{M}\frac{1-\beta(a-\widetilde{\lambda}_n(z))}{1-z^{-1}\beta(a-\widetilde{\lambda}_n(z))}\frac{\prod\limits_{i=1}^{M}\left(\widetilde{\lambda}_n(z)-paz^i\right)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{M}\left(\widetilde{\lambda}_n(z)-\widetilde{\lambda}_j(z)\right)}\sum_{m=1}^{M}\frac{p_0(m)}{\widetilde{\lambda}_n(z)-paz^m}. \qquad (5)$$

3.1 Частный случай $M=2$

Рассмотрим более подробно ситуацию, когда $M=2$.

Характеристическое уравнение (2) в этом случае будет квадратным и примет вид

$$\widetilde{\lambda}^2-\widetilde{\lambda}(paz+paz^2+(1-p)h_1az+(1-p)h_2az^2)+pa^2z^3=0.$$

Его корни

$$\widetilde{\lambda}_1(z) = \frac{paz + paz^2 + (1-p)h_1az + (1-p)h_2az^2 + \sqrt{D}}{2},$$
$$\widetilde{\lambda}_2(z) = \frac{paz + paz^2 + (1-p)h_1az + (1-p)h_2az^2 - \sqrt{D}}{2}.$$

где $D = (paz + paz^2 + (1-p)h_1az + (1-p)h_2az^2)^2 - 4pa^2z^3$. Легко видеть, что $D(1) = (a - pa)^2$, $\widetilde{\lambda}_1(1) = a$, $\widetilde{\lambda}_2(1) = pa$. Также нетрудно установить, что

$$\widetilde{\lambda}_1'(1) = a(1 + h_2),$$
$$\widetilde{\lambda}_1''(1) = \frac{2ah_2(1 - ph_2)}{1-p},$$
$$\widetilde{\lambda}_2'(1) = pa(1 + h_1) = pa(2 - h_2).$$

Из уравнения (4) следует, что

$$z_i'(s) = \beta'\left(s + a - \widetilde{\lambda}_i(z_i(s))\right)\left(1 - \widetilde{\lambda}_i'(z_i(s))z_i'(s)\right),$$

а значит

$$z_i'(s) = \frac{\beta'\left(s + a - \widetilde{\lambda}_i(z_i(s))\right)}{1 + \beta'\left(s + a - \widetilde{\lambda}_i(z_i(s))\right)\widetilde{\lambda}_i'(z_i(s))}.$$

С учетом полученных выше выражений для $\widetilde{\lambda}_1(z)$ и $\widetilde{\lambda}_2(z)$, нетрудно установить, что $z_1(0) = 1$, а значит $z_1'(0) = -\frac{\beta_1}{1 - a\beta_1(1+h_2)}$.

Система (3) примет вид

$$(\widetilde{\lambda}_1 - paz_1^2)(-(s+a)\pi_0(1,s) + h_1 + \widetilde{\lambda}_1\pi_0(1,s)) +$$
$$+ (\widetilde{\lambda}_1 - paz_1)(-(s+a)\pi_0(2,s) + h_2 + \widetilde{\lambda}_1\pi_0(2,s)) = 0,$$
$$(\widetilde{\lambda}_2 - paz_2^2)(-(s+a)\pi_0(1,s) + h_1 + \widetilde{\lambda}_2\pi_0(1,s)) +$$
$$+ (\widetilde{\lambda}_2 - paz_2)(-(s+a)\pi_0(2,s) + h_2 + \widetilde{\lambda}_2\pi_0(2,s)) = 0.$$

Ее решение

$$\pi_0(1,s) = \frac{1}{(\widetilde{\lambda}_1 - paz_1^2)(\widetilde{\lambda}_2 - paz_2) - (\widetilde{\lambda}_1 - paz_1)(\widetilde{\lambda}_2 - paz_2^2)} \times$$
$$\times \left\{ \left[\frac{(\widetilde{\lambda}_1 - paz_1^2)(\widetilde{\lambda}_2 - paz_2)}{s + a - \widetilde{\lambda}_1} - \frac{(\widetilde{\lambda}_1 - paz_1)(\widetilde{\lambda}_2 - paz_2^2)}{s + a - \widetilde{\lambda}_2} \right] h_1 + \right.$$
$$\left. + \frac{\widetilde{\lambda}_1 - \widetilde{\lambda}_2}{(s + a - \widetilde{\lambda}_1)(s + a - \widetilde{\lambda_2})}(\widetilde{\lambda}_1 - paz_1)(\widetilde{\lambda}_2 - paz_2)h_2 \right\},$$
$$\pi_0(2,s) = \frac{1}{(\widetilde{\lambda}_1 - paz_1^2)(\widetilde{\lambda}_2 - paz_2) - (\widetilde{\lambda}_1 - paz_1)(\widetilde{\lambda}_2 - paz_2^2)} \times$$

$$\times\left\{\frac{\widetilde{\lambda}_2-\widetilde{\lambda}_1}{(s+a-\widetilde{\lambda}_1)(s+a-\widetilde{\lambda}_2)}(\widetilde{\lambda}_1-paz_1^2)(\widetilde{\lambda}_2-paz_2^2)h_1+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{(\widetilde{\lambda}_1-paz_1^2)(\widetilde{\lambda}_2-paz_2)}{s+a-\widetilde{\lambda}_2}-\frac{(\widetilde{\lambda}_1-paz_1)(\widetilde{\lambda}_2-paz_2^2)}{s+a-\widetilde{\lambda}_1}\right]h_2\right\}.$$

Отсюда

$$p_0(1)=\lim_{s\to 0+}s\pi_0(1,s)=\frac{\widetilde{\lambda}_2(z_2(0))-paz_2(0)}{paz_2^2(0)-paz_2(0)}(1-a\beta_1(1+h_2)),$$

$$p_0(2)=\lim_{s\to 0+}s\pi_0(2,s)=-\frac{\widetilde{\lambda}_2(z_2(0))-paz_2^2(0)}{paz_2^2(0)-paz_2(0)}(1-a\beta_1(1+h_2)).$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\lim_{s\to 0}\frac{s}{s+a-\widetilde{\lambda}_1}=\lim_{s\to 0}\frac{s}{s+a-\widetilde{\lambda}_1(z_1(s))}=\frac{1}{1-\widetilde{\lambda}_1'(z_1(0))z_1'(0)}=$$

$$=\frac{1}{1+a(1+h_2)\frac{\beta_1}{1-a\beta_1(1+h_2)}}=1-a\beta_1(1+h_2).$$

Выражение (5) в случае $M=2$ примет вид

$$\pi(z)=-\left\{\frac{1-\beta(a-\widetilde{\lambda}_1(z))}{1-z^{-1}\beta(a-\widetilde{\lambda}_1(z))}\frac{1}{\widetilde{\lambda}_1(z)-\widetilde{\lambda}_2(z)}\times\right.$$

$$\times\Big((\widetilde{\lambda}_1(z)-paz^2)p_0(1)+(\widetilde{\lambda}_1(z)-paz)p_0(2)\Big)+$$

$$+\frac{1-\beta(a-\widetilde{\lambda}_2(z))}{1-z^{-1}\beta(a-\widetilde{\lambda}_2(z))}\frac{1}{\widetilde{\lambda}_2(z)-\widetilde{\lambda}_1(z)}\times$$

$$\left.\times\Big((\widetilde{\lambda}_2(z)-paz^2)p_0(1)+(\widetilde{\lambda}_2(z)-paz)p_0(2)\Big)\right\}=-\frac{1}{\widetilde{\lambda}_1(z)-\widetilde{\lambda}_2(z)}\times$$

$$\times\left\{\frac{z(1-\beta(a-\widetilde{\lambda}_1(z)))}{z-\beta(a-\widetilde{\lambda}_1(z))}\Big((\widetilde{\lambda}_1(z)-paz^2)p_0(1)+(\widetilde{\lambda}_1(z)-paz)p_0(2)\Big)-\right.$$

$$\left.-\frac{z(1-\beta(a-\widetilde{\lambda}_2(z)))}{z-\beta(a-\widetilde{\lambda}_2(z))}\Big((\widetilde{\lambda}_2(z)-paz^2)p_0(1)+(\widetilde{\lambda}_2(z)-paz)p_0(2)\Big)\right\}.$$

Найдем математическое ожидание длины очереди в стационарном режиме. Имеем $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{E}L(t)=\pi'(1)$. Продифференцируем $\pi(z)$:

$$\pi'(z)=\frac{\widetilde{\lambda}_1'(z)-\widetilde{\lambda}_2'(z)}{(\widetilde{\lambda}_1(z)-\widetilde{\lambda}_2(z))^2}\times$$

$$\times\left\{\frac{z(1-\beta(a-\widetilde{\lambda}_1(z)))}{z-\beta(a-\widetilde{\lambda}_1(z))}\Big((\widetilde{\lambda}_1(z)-paz^2)p_0(1)+(\widetilde{\lambda}_1(z)-paz)p_0(2)\Big)-\right.$$

$$-\frac{z(1-\beta(a-\widetilde{\lambda}_2(z)))}{z-\beta(a-\widetilde{\lambda}_2(z))}\Big((\widetilde{\lambda}_2(z)-paz^2)p_0(1)+(\widetilde{\lambda}_2(z)-paz)p_0(2)\Big)\Big\}-$$

$$-\frac{1}{\widetilde{\lambda}_1(z)-\widetilde{\lambda}_2(z)}\times$$

$$\times\Big\{\frac{-\beta(a-\widetilde{\lambda}_1(z))+\beta^2(a-\widetilde{\lambda}_1(z))+z^2\beta'(a-\widetilde{\lambda}_1(z))\widetilde{\lambda}_1'(z)-z\beta'(a-\widetilde{\lambda}_1(z))\widetilde{\lambda}_1'(z)}{(z-\beta(a-\widetilde{\lambda}_1(z)))^2}\times$$

$$\times\Big((\widetilde{\lambda}_1(z)-paz^2)p_0(1)+(\widetilde{\lambda}_1(z)-paz)p_0(2)\Big)+$$

$$+\frac{z(1-\beta(a-\widetilde{\lambda}_1(z)))}{z-\beta(a-\widetilde{\lambda}_1(z))}\Big((\widetilde{\lambda}_1'(z)-2paz)p_0(1)+(\widetilde{\lambda}_1'(z)-pa)p_0(2)\Big)-$$

$$-\frac{-\beta(a-\widetilde{\lambda}_2(z))+\beta^2(a-\widetilde{\lambda}_2(z))+z^2\beta'(a-\widetilde{\lambda}_2(z))\widetilde{\lambda}_2'(z)-z\beta'(a-\widetilde{\lambda}_2(z))\widetilde{\lambda}_2'(z)}{(z-\beta(a-\widetilde{\lambda}_2(z)))^2}\times$$

$$\times\Big((\widetilde{\lambda}_2(z)-paz^2)p_0(1)+(\widetilde{\lambda}_2(z)-paz)p_0(2)\Big)-$$

$$-\frac{z(1-\beta(a-\widetilde{\lambda}_2(z)))}{z-\beta(a-\widetilde{\lambda}_2(z))}\Big((\widetilde{\lambda}_2'(z)-2paz)p_0(1)+(\widetilde{\lambda}_2'(z)-pa)p_0(2)\Big)\Big\}.$$

Вычислим

$$\lim_{z\to1}\frac{z(1-\beta(a-\widetilde{\lambda}_1(z)))}{z-\beta(a-\widetilde{\lambda}_1(z))}=\lim_{z\to1}\frac{1-\beta(a-\widetilde{\lambda}_1(z))+z\beta'(a-\widetilde{\lambda}_1(z))\widetilde{\lambda}_1'(z)}{1+\beta'(a-\widetilde{\lambda}_1(z))\widetilde{\lambda}_1'(z)}=$$

$$=\frac{1-1+1(-\beta_1)a(1+h_2)}{1+(-\beta_1)a(1+h_2)}=\frac{-a\beta_1(1+h_2)}{1-a\beta_1(1+h_2)}.$$

Обозначим

$$f(z)=-\beta(a-\widetilde{\lambda}_1(z))+\beta^2(a-\widetilde{\lambda}_1(z))+z^2\beta'(a-\widetilde{\lambda}_1(z))\widetilde{\lambda}_1'(z)-z\beta'(a-\widetilde{\lambda}_1(z))\widetilde{\lambda}_1'(z),$$

$$g(z)=(z-\beta(a-\widetilde{\lambda}_1(z)))^2.$$

Имеем

$$\lim_{z\to1}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f''(1)}{g''(1)}=\frac{2a^2\beta_1^2(1+h_2)^2-a^2\beta_2(1+h_2)^2-2a\beta_1\frac{h_2(1-ph_2)}{1-p}-2a\beta_1(1+h_2)}{2(1-a\beta_1(1+h_2))^2},$$

где $\beta_2=\beta''(0)=\int_0^\infty x^2dB(x)$. Тем самым

$$\pi'(1)=\frac{p}{1-p}(1-h_2)+a\beta_1(1+h_2)+\frac{a^2\beta_2(1+h_2)^2}{2(1-a\beta_1(1+h_2))}+$$

$$+\frac{a\beta_1}{1-a\beta_1(1+h_2)}\frac{h_2(1-ph_2)}{1-p}-\frac{p}{1-p}\frac{1}{1-a\beta_1(1+h_2)}p_0(1).$$

Заключение

Мы рассмотрели систему массового обслуживания типа $M|G|1$ с групповым поступлением требований, в которой размеры поступающих групп связаны регрессионной зависимостью: размер n-й поступившей в систему группы требований либо с некоторой фиксированной вероятностью равен размеру $(n-1)$-й поступившей в систему группы требований, либо с дополнительной вероятностью является независимой от него случайной величиной. Исследован стационарный режим функционирования системы; найдено распределение длины очереди и математическое ожидания длины очереди для случая $M = 2$.

Приложение

Теорема 2 (Абелева теорема для преобразования Лапласа)**.** *Пусть $f(t)$ — функция действительного переменного и существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$. Тогда имеет место равенство*

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s \int\limits_0^\infty e^{-st} f(t)dt.$$

Доказательство. См., например, [2]. □

Список литературы

[1] Леонтьев Н.Д., Ушаков В.Г. Анализ системы обслуживания с входящим потоком авторегрессионного типа // Информатика и ее применения. 2014. Т. 8, № 3. С. 39–44.

[2] Doetsch G. Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation. Berlin: Springer Verlag, 1974. 326 p.

Библиографическая ссылка

Леонтьев Н.Д. Анализ стационарного режима функционирования системы массового обслуживания с входящим потоком авторегрессионного типа // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 2. С. 39–48.

Сведения об авторах

1. **Леонтьев Николай Дмитриевич**
аспирант факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ им. М.В. Ломоносова.

ANALYSIS OF THE STEADY-STATE BEHAVIOR OF A QUEUEING SYSTEM WITH AUTOREGRESSIVE ARRIVALS

Leontyev Nikolay Dmitrievich
PhD student at Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics,
Lomonosov Moscow State University

Received 20.05.2016, revised 03.06.2016.

The paper studies a single server queueing system with infinite capacity and with batch Poisson arrival process. A feature of the system under study is autoregressive dependence of the arriving batch sizes: the size of the nth batch is equal to the size of the $(n-1)$st batch with a fixed probability, and is an independent random variable with complementary probability. Service times are supposed to be independent random variables with a specified distribution. The steady-state behaviour is studied; expression for the probability generating function of the queue length is derived, as well as the mean queue length for a special case.

Keywords: queueing theory, steady-state behaviour, batch arrivals.

Bibliographic citation

Leontyev N.D. Analysis of the steady-state behavior of a queueing system with autoregressive arrivals. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2016, no. 2, pp. 39–48. (in Russian)

References

[1] Leont'ev N.D., Ushakov V.G. Analysis of the service system with incoming stream of autoregression type. *Informatika i ee Primeneniya* [Computer Science and its Applications], 2014, vol. 8(3), pp. 39–44. (in Russian)

[2] Doetsch G. *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation.* Springer Verlag, Berlin, 1974. 326 p.