УДК 517.94

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ФУНКЦИЙ ДЛЯ УСЛОВИЯ СОГЛАСОВАНИЯ

Захарова И.В.
Кафедра математической статистики и системного анализа

Поступила в редакцию 19.02.2016, после переработки 27.02.2016.

Исследуется стационарная задача об обтекании ограниченного тела потоком вязкой неньютоновской жидкости. Задача рассмотрена в линеаризованной постановке для случая, когда скорость жидкости стремится к нулю на бесконечности. Сформулировано необходимое и достаточное условие существования решения задачи. Описан класс функций в правой части уравнения движения, которые удовлетворяют этому условию, приведены примеры.

Ключевые слова: внешняя задача Стокса, неньютоновские жидкости, условие согласования.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 2. С. 81–94.

Введение

Задача об обтекании препятствия потоком вязкой жидкости – одна из наиболее распространенных задач гидродинамики вообще и динамики неньютоновской жидкости в частности. Математическое изучение потока вязких несжимаемых жидкостей около трехмерного препятствия было предметом исследования многих работ. В 1965 г. Р.Финн ввел так называемые PR-решения (физически осмысленные) [1].

В работе [2] рассматривается движение внешнего стационарного потока неньютоновской жидкости. Предложенная модель математически адекватно описывает движение внешнего потока для определенного класса жидкостей. Выбран класс функциональных пространств, в которых установлена разрешимость краевой задачи для системы дифференциальных уравнений, описывающей движение потока. Тем самым дано количественное описание явления обтекания ограниченного препятствия установившимся потоком неньютоновской жидкости с нулевой скоростью на бесконечности.

В работе [3] доказана единственность решения задачи об обтекании ограниченного тела установившимся потоком в весовых пространствах Соболева, получены оценки в соответствующих нормах. Движение потока жидкости описывается системой уравнений

$$-\nu \ \mathrm{div}\ \Pi + (\bar{v}\nabla)\bar{v} + \nabla p = \bar{f}, \quad \mathrm{div}\ \bar{v} = 0 \text{ в } \Omega$$

с граничными условиями

$$\bar{v}\Big|_{\Gamma} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \bar{v}(x) = 0.$$

Тензор напряжений Π есть нелинейная функция тензора скоростей деформаций и определяется соотношениями

$$\Pi = (1+\xi(|S|^2))S, \quad S(\bar{v}) = \{S_{ij}\}_{i,j=1}^{3} = \left\{\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right\}_{i,j=1}^{3}, |S| = \left(\sum_{i,j=1}^{3} S_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (*)$$

где S – тензор скоростей деформаций, $\xi(t),\ t \geqslant 0$ – гладкая непрерывная функция, определенная при $t \geqslant 0$, ограниченная, имеющая ограниченные первую и вторую производные и удовлетворяющая условиям

$$\begin{gathered}\xi(0) = 0, \quad -1+\gamma_0 \leqslant \xi(t) \leqslant \gamma_1,\\ \xi(t) \to 0 \text{ при } t \to 0, \quad \xi^{'}(t) \to 0 \text{ при } t \to 0, \\ \gamma_0 = \text{ const } > 0, \quad \gamma_1 = \text{ const } \geqslant -1+\gamma_0, \\ \max_{t\geqslant 0} |\xi^{'}(t)| = M_1, \quad \max_{t\geqslant 0} |\xi^{''}(t)| = M_2.\end{gathered} \qquad (**)$$

Существует ряд жидкостей, для которых тензор напряжений имеет вид $(*)$, в частности, полимеры, расплавленная сталь и гидроксилэтилцеллюлоза. Для таких жидкостей графики функций $\xi(t)$ представлены в [4].

В данной работе будем искать решения стационарной задачи, обладающие определенными свойствами на бесконечности. Опишем класс функций, удовлетворяющих сформулированным условиям.

1. Постановка задачи

Рассматривается краевая задача Стокса в области Ω:

$$-\nu\Delta\bar{v} + \nabla p = \bar{f}, \quad x \in \Omega, \qquad (1)$$

$$\nabla \cdot \bar{v} = g, \quad x \in \Omega, \qquad (2)$$

$$\bar{v} = \bar{h}, \quad x \in \partial\Omega, \qquad (3)$$

$$\lim_{|x|\to\infty} \bar{v}(x) = 0, \qquad (4)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3),\ x \in \mathbb{R}^3$.

Движение жидкости характеризуется вектор-функцией скорости $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ и давлением p, $\nu = const > 0$ – коэффициент вязкости жидкости,

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right).$$

Здесь $\bar{f}(x) = (f_1, f_2, f_3)$ – заданная вектор-функция из $\mathbb{R}^3$, характеризующая силу, действующую на жидкость, $\bar{h} = (h_1, h_2, h_3)$ – векторная функция из $\mathbb{R}^3$, g – скалярная функция, $\nu = const > 0$ – коэффициент кинематической вязкости.

2. Основные определения

Определение 1. *Под Ω будем понимать внешнюю область в $\mathbb{R}^3$, то есть $\Omega = \mathbb{R}^3 \backslash \bar{G}$, где G – связанное, открытое, ограниченное множество. Без потери общности предположим, что декартова система координат выбрана так, что начало координат принадлежит области G. Предположим, что граница $\partial\Omega$ – гладкая, двумерная, ограниченная область.*

Определение 2. *Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^3$. Пусть l – целое, неотрицательное число. Пространство $H^l(\Omega)$ – множество измеримых на Ω функций, имеющих все обобщенные производные вплоть до порядка l включительно, интегрируемые с квадратом, норма в котором определяется:*

$$\|z; H^l(\Omega)\| = \left(\sum_{|\alpha|=0}^{l} \int_{\Omega} |D^\alpha z|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_i \geqslant 0$ – целые числа,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}}.$$

Пространство $H^l(\Omega)$ – гильбертово пространство, скалярное произведение в котором задается соотношением

$$(z, y)_l = \sum_{|\alpha|=0}^{l} \int_{\Omega} D^\alpha z D^\alpha y \, dx.$$

Определение 3. *Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^3$. Пусть $\beta \in \mathbb{R}^1, l$ – целое, неотрицательное число.*

$V^l_\beta(\Omega)$ – весовое пространство измеримых на Ω функций, имеющих все обобщенные производные вплоть до порядка l включительно, интегрируемых с квадратом, для которых конечны интегралы

$$\int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=0}^{l} (1+r)^{2(\beta - l + |\alpha|)} |D^\alpha z|^2 \, dx$$

и норма в котором определяется следующим образом:

$$\|z, V^l_\beta(\Omega)\| = \left(\sum_{|\alpha|=0}^{l} \left\| (1+r)^{\beta - l + |\alpha|} D^\alpha z; L^2(\Omega) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

то есть

$$\|z, V^l_\beta(\Omega)\| = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=0}^{l} (1+r)^{2(\beta - l + |\alpha|)} |D^\alpha z|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $r = |x|, \quad |x| = \left(\sum_{i=1}^{3} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$

Определение 4. *Пусть* Ω *– открытое множество в* $\mathbb{R}^3$. *Пусть* $\beta \in \mathbb{R}^1, l$ *– целое, неотрицательное число.*

$D^l_\beta V(\Omega)$ *– пространство пар* $(\bar v, p)$, *где* $\bar v = (v_1, v_2, v_3),\ v_i \in V^{l+1}_\beta(\Omega),\ p \in V^l_\beta(\Omega)$.

$$\big\|(\bar v, p); D^l_\beta V(\Omega)\big\| = \big\|v_1; V^{l+1}_\beta(\Omega)\big\| + \big\|v_2; V^{l+1}_\beta(\Omega)\big\| + \big\|v_3; V^{l+1}_\beta(\Omega)\big\| + \|p; V^l_\beta(\Omega)\|,$$

то есть

$$\big\|(\bar v, p); D^l_\beta V(\Omega)\big\| = \Bigg(\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^{l+1} (1+r)^{2(\beta-l-1+|\alpha|)} |D^\alpha v_1|^2\,dx\Bigg)^{\frac12} +$$

$$+\Bigg(\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^{l+1} (1+r)^{2(\beta-l-1+|\alpha|)} |D^\alpha v_2|^2\,dx\Bigg)^{\frac12} +$$

$$+\Bigg(\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^{l+1} (1+)^{2(\beta-l-1+|\alpha|)} |D^\alpha v_3|^2\,dx\Bigg)^{\frac12} + \Bigg(\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^{l} (1+r)^{2(\beta-l+|\alpha|)} |D^\alpha p|^2\,dx\Bigg)^{\frac12}.$$

Определение 5. *Пусть* Ω *– открытое множество в* $\mathbb{R}^3$ *с гладкой компактной границей. Пусть* l *– целое неотрицательное число.*

Введем пространство $H^{l+\frac12}(\partial\Omega)$ *для описания следов функций из пространства* $H^{l+1}(\Omega)$. *Норма в* $H^{l+\frac12}(\partial\Omega)$ *определяется так:*

$$\Big\|z; H^{l+\frac12}(\partial\Omega)\Big\| = \Bigg(\sum_{|\alpha|=0}^{l} \int\limits_{\partial\Omega} \big|D^\alpha z\big|^2\,dx + \int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_{\partial\Omega} \sum_{|\alpha|=l} \frac{\big|D^\alpha z(y) - D^\alpha z(x)\big|^2}{|y-x|^4}\,dx\,dy\Bigg)^{\frac12}.$$

Известно, что если $z \in H^{l+1}(\Omega)$, то ее след $z\big|_{\partial\Omega} \in H^{l+\frac12}(\partial\Omega)$ и имеет место неравенство

$$\Big\|z\big|_{\partial\Omega}; H^{l+\frac12}(\partial\Omega)\Big\| \leqslant c\Big\|z; H^{l+1}(\Omega)\Big\|,$$

где c не зависит от z.

Определение 6. *Пусть* Ω *– открытое множество в* $\mathbb{R}^3$.

Пусть $\beta \in \mathbb{R}^1, l$ *– целое неотрицательное число.*

Обозначим через $R^l_\beta V(\Omega, \partial\Omega) \equiv V^{l-1}_\beta(\Omega)^3 \times V^l_\beta(\Omega) \times H^{l+\frac12}(\partial\Omega)$, *где*

$$\Big\|(\bar f, g, \bar h); R^l_\beta V(\Omega, \partial\Omega)\Big\| = \big\|f_1; V^{l-1}_\beta(\Omega)\big\| + \big\|f_2; V^{l-1}_\beta(\Omega)\big\| + \big\|f_3; V^{l-1}_\beta(\Omega)\big\| +$$

$$+\big\|g; V^l_\beta(\Omega)\big\| + \big\|h_1; H^{l+\frac12}(\partial\Omega)\big\| + \big\|h_2; H^{l+\frac12}(\partial\Omega)\big\| + \big\|h_3; H^{l+\frac12}(\partial\Omega)\big\|,$$

где $\bar f = (f_1, f_2, f_3), \quad \bar h = (h_1, h_2, h_3)$, *то есть*

$$\Big\|(\bar f, g, \bar h); R^l_\beta V(\Omega, \partial\Omega)\Big\| = \Bigg(\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^{l-1} (1+r)^{2(\beta-l+1+|\alpha|)} |D^\alpha f_1|^2\,dx\Bigg)^{\frac12} +$$

$$\Big(\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=0}^{l-1}(1+r)^{2(\beta-l+1+|\alpha|)}|D^\alpha f_2|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}+\Big(\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=0}^{l-1}(1+r)^{2(\beta-l+1+|\alpha|)}|D^\alpha f_3|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\Big(\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|=0}^{l}(1+r)^{2(\beta-l+|\alpha|)}|D^\alpha g|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\Big(\sum_{|\alpha|=0}^{l}\int\limits_{\partial\Omega}\big|D^\alpha h_1\big|^2\,dx+\int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_{\partial\Omega}\sum_{|\alpha|=l}\frac{\big|D^\alpha h_1(y)-D^\alpha h_1(x)\big|^2}{|y-x|^4}\,dx\,dy\Big)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\Big(\sum_{|\alpha|=0}^{l}\int\limits_{\partial\Omega}\big|D^\alpha h_2\big|^2\,dx+\int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_{\partial\Omega}\sum_{|\alpha|=l}\frac{\big|D^\alpha h_2(y)-D^\alpha h_2(x)\big|^2}{|y-x|^4}\,dx\,dy\Big)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+\Big(\sum_{|\alpha|=0}^{l}\int\limits_{\partial\Omega}\big|D^\alpha h_3\big|^2\,dx+\int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_{\partial\Omega}\sum_{|\alpha|=l}\frac{\big|D^\alpha h_3(y)-D^\alpha h_3(x)\big|^2}{|y-x|^4}\,dx\,dy\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Определение 7. *Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^3$. Пусть l – целое, неотрицательное число, $\gamma \in (l+\frac{1}{2}, l+\frac{3}{2})$. Воспользуемся обозначением, данным в [6], и примем за $\mathcal{R}^l_\gamma V(\Omega,\partial\Omega)$ пространство, состоящее из троек функций $(\bar f, g, \bar h)$ таких, что*

$$\bar f=(f_1,f_2,f_3),\quad \bar h=(h_1,h_2,h_3)$$

и допускающих представление:

$$\bar f(x)=\frac{1}{r^3}\bar F(\omega)+\bar{\tilde f}(x),\quad g(x)=\frac{1}{r^2}G(\omega)+\tilde g(x),\quad \bar h(x)=\bar{\tilde h}(x),$$

где

$$(\bar F, G)\in H^{l-1}(\Gamma)^3\times H^l(\Gamma), \omega\in\Gamma, \Gamma=\{x:|x|=1\},\quad (\bar{\tilde f},\tilde g,\bar{\tilde h})\in R^l_\gamma V(\Omega,\partial\Omega).$$

Норма в пространстве $\mathcal{R}^l_\gamma V(\Omega,\partial\Omega)$ определяется следующим образом:

$$\Big\|(\bar f, g,\bar h);\mathcal{R}^l_\gamma V(\Omega,\partial\Omega)\Big\|=\Big(\Big\|(\bar F, G);H^{l-1}(\Gamma)^3\times H^l(\Gamma)\Big\|^2+\Big\|(\bar{\tilde f},\tilde g,\bar{\tilde h});R^l_\gamma V(\Omega,\partial\Omega)\Big\|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Определение 8. *Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^3$. Пусть l – целое, неотрицательное число, $\gamma \in (l+\frac{1}{2}, l+\frac{3}{2})$. Используя обозначения [6], опишем $\mathcal{D}^l_\gamma V(\Omega)$ – множество функций вида $(\bar v, p)$ таких, что*

$$\bar v(x)=\frac{1}{r}\bar V(\omega)+\bar{\tilde v}(x),\quad p(x)=\frac{1}{r^2}P(\omega)+\tilde p(x),$$

где

$$(\bar V, P)\in H^{l+1}(\Gamma)^3\times H^l(\Gamma),\quad \omega\in\Gamma,\quad \Gamma=\{x:|x|=1\},\quad (\bar{\tilde v},\tilde p)\in D^l_\gamma V(\Omega).$$

Норма в пространстве $\mathcal{D}^l_\gamma V(\Omega)$ определена формулой:

$$\left\|(\bar v, p); \mathcal{D}^l_\gamma V(\Omega)\right\| = \left(\left\|(\bar V, P) \in H^{l+1}(\Gamma)^3 \times H^l(\Gamma)\right\|^2 + \left\|(\tilde{\bar v}, \tilde p); D^l_\gamma V(\Omega)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пространство $\mathcal{D}^l_\gamma V(\Omega)$ есть пространство функций, которому принадлежат PR-решения, то есть функции, имеющие заданный порядок убывания на бесконечности. Пространство $\mathcal{R}^l_\gamma V(\Omega, \partial\Omega)$ есть пространство данных задачи Стокса, решения которых принадлежат пространству $\mathcal{D}^l_\gamma V(\Omega)$.

3. Разрешимость задачи Стокса

Пусть $(\bar v, p)$ есть PR-решение задачи (1)-(4) из $D^l_\gamma V(\Omega)$. Это, в частности, означает, что скорость $\bar v$ убывает на бесконечности не медленнее, чем $\frac{c}{r}$, а давление убывает на бесконечности не медленнее, чем $\frac{c_1}{r^2}$. Так как в уравнении (1) системы Стокса содержится дифференцирование скорости второго порядка и давления первого порядка, то очевидно, что $\bar f$ убывает на бесконечности не медленнее, чем $\frac{c_2}{r^3}$. Аналогично функция g должна убывать на бесконечности не медленнее, чем $\frac{c_3}{r^2}$. Этими соображениями и продиктован выбор пространства $R^l_\gamma V(\Omega, \partial\Omega)$ для тройки $(\bar f, g, \bar h)$ – правых частей исходной задачи (1)-(3).

В работе [5] задача Стокса рассмотрена в сферических координатах:

$$x_1 = r\, sin\theta\, cos\varphi,$$

$$x_2 = r\, sin\theta\, sin\varphi,$$

$$x_3 = r\, cos\theta.$$

Для этого перепишем систему Стокса в сферических координатах (r, ω), то есть

$$r = |x|, \omega = (\varphi, \theta), 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ 0 \leqslant \theta < \pi.$$

Будем искать решение в виде

$$\bar v(x) = r^\lambda \bar V(\omega),\ p(x) = r^{\lambda-1} P(\omega), \lambda \in \mathbb{C}, \tag{5}$$

которое разрешает систему Стокса в $\mathbb{R}^3$

$$-\nu\Delta\bar v + \nabla p = 0, \nabla\cdot\bar v = 0,\ x \in R^3\backslash 0. \tag{6}$$

Для пары $(\bar V, P)$ получаем систему дифференциальных уравнений на единичной сфере $\Gamma = \{x : |x| = 1\}$, зависящих от комплексного параметра λ.

Вектор скорости принимает вид

$$\bar v = (r^\lambda V_r(\theta, \varphi), r^\lambda V_\theta(\theta, \varphi), r^\lambda V_r(\theta, \varphi)).$$

Далее для удобства записи обозначим $(V_r(\theta, \varphi), V_\theta(\theta, \varphi), V_r(\theta, \varphi))$ через $(V_r, V_\theta, V_\varphi)$.

В сферических координатах система (6) принимает вид [5]

$$-\nu\left((\lambda+1)\lambda - 2\right)V_r - \nu\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial V_r}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_r}{\partial\varphi^2}\right)+$$

$$+\frac{2\nu}{\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta V_\theta)+\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}\right)+(\lambda-1)P=0, \tag{7}$$

$$-\nu\Big((\lambda+1)\lambda V_\theta\Big)-\nu\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial V_\theta}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial\varphi^2}\right)+$$
$$+\frac{\nu V_\theta}{\sin^2\theta}-2\nu\frac{\partial V_r}{\partial\theta}+\frac{\partial P}{\partial\theta}=0, \tag{8}$$

$$-\nu\Big((\lambda+1)\lambda V_\varphi\Big)-\nu\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial V_\varphi}{\partial\theta})+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial\varphi^2}\right)-$$
$$-\frac{2\nu}{\sin\theta}\frac{\partial V_r}{\partial\varphi}+\frac{\nu V_\varphi}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial\varphi}=0, \tag{9}$$

$$-(\lambda+2)V_r-\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta V_\theta)+\frac{\partial V_\varphi}{\partial\varphi}\right)=0. \tag{10}$$

Обозначим полученную систему (7)-(10) через $S(\lambda; D_\omega)(\bar V, P)=0,\ \omega\in\Gamma$.

Семейство отображений $\lambda\to S(\lambda;\cdot)$ называется пучком операторов, связанным с системой Стокса (6). Значения комплексной переменной λ, для которой задача (7)-(10) имеет нетривиальные решения, называются собственными значениями задачи и соответствующие нетривиальные решения называются собственными векторами. Очевидно, что функции вида (5) – решения системы Стокса тогда и только тогда, когда λ – собственное значение задачи (7)-(10).

В работе [6] была доказана

Теорема 1. *Собственные числа пучка $\lambda\to S(\lambda,\cdot)$ состоят из чисел $\lambda\in\mathbb{Z}$. Если $\lambda\in\mathbb{Z}$, то существуют нетривиальные решения $S(\lambda;D_\omega)(\bar V,P)=0$, которые являются гладкими на сфере Γ. В случае $\lambda\geqslant 0$ собственные степенные решения $(r^\lambda\bar V(\omega), r^{\lambda-1}P(\omega))$ состоят каждый из однородных полиномов, а в случае $\lambda<0$ эти решения могут быть получены дифференцированием столбцов*

$$E^{(j)}(x)=\frac{1}{8\pi\nu|x|^3}\Big(\delta_{j1}|x|^2+x_1x_j, \delta_{j2}|x|^2+x_2x_j\delta_{j3}|x|^2+x_3x_j, 2\nu x_j\Big)^T,\quad j=1,2,3,$$

$$E^{(4)}(x)=\left(\nabla_x\frac{1}{2\pi\nu|x|},\quad 0\right)^T \tag{11}$$

фундаментальной матрицы E системы Стокса.

В частности, значению $\lambda=-1$ соответствуют три степенных решения $(\bar v^{(j)}, p^{(j)})=E^{(j)}, j=1,2,3$:

$$(\bar v^{(1)}, p^{(1)})=\frac{1}{8\pi\nu|x|^3}\Big(|x|^2+x_1^2, x_1x_2, x_1x_3, 2\nu x_1\Big)^T,$$

$$(\bar v^{(2)}, p^{(2)})=\frac{1}{8\pi\nu|x|^3}\Big(x_1x_2, |x|^2+x_2^2, x_2x_3, 2\nu x_2\Big)^T,$$

$$(\bar v^{(3)}, p^{(3)})=\frac{1}{8\pi\nu|x|^3}\Big((x_1x_3, x_2x_3, |x|^2+x_3^2, 2\nu x_3\Big)^T.$$

Степенное решение, соответствующее значению $\lambda = 0$, имеет вид $(\bar{v}, p) = (\bar{c}, 0)$, $\bar{c} \in \mathbb{R}^3$.

В работе [5] была доказана

Теорема 2. *Пусть $S(\lambda; \cdot)$ – пучок операторов задачи (6).*

Задача

$$S(-1; D_\omega)(\bar{V}, P) = (\bar{F}, G), \ \omega \in \Gamma, \tag{12}$$

где $(\bar{F}, G) \in H^{l-1}(\Gamma)^3 \times H^l(\Gamma)$, имеет решение $(\bar{V}, P) \in H^{l+1}(\Gamma)^3 \times H^l(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда выполняется условие согласования

$$\int\limits_\Gamma \bar{F} \cdot \bar{c}\, d\Gamma_\omega = 0 \quad \forall \bar{c} \in \mathbb{R}^3. \tag{13}$$

Решение $(\bar{V}, P)$ не является единственным. Однородная задача (12) имеет три линейно независимых решения:

$$\xi^{(1)}(\omega) = \frac{1}{8\pi\nu}\Big(1 + \sin^2\theta\cos^2\varphi, \sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi, \sin\theta\cos\theta\cos\varphi, 2\nu\sin\theta\cos\varphi\Big),$$

$$\xi^{(2)}(\omega) = \frac{1}{8\pi\nu}\Big(sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi, 1 + \sin^2\theta\sin^2\varphi, \sin\theta\cos\theta\sin\varphi, 2\nu\sin\theta\sin\varphi\Big), \tag{14}$$

$$\xi^{(3)}(\omega) = \frac{1}{8\pi\nu}\Big(\sin\theta\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi\cos\varphi, 1 + \cos^2\theta, 2\nu\cos\theta\Big).$$

Заметим, что $\xi^{(i)}(\omega)$ – след столбца $E^{(j)}$, $\quad j = 1, 2, 3$ на сфере Γ.

Представляется интересным определить класс функций, которые могли бы удовлетворять условию (13).

4. Выполнение условия согласования для сферических функций

Обозначим через R_0 подпространство пространства $R^l_\gamma(\Omega, \partial\Omega)$, состоящее из элементов $(\bar{f}, g, \bar{h}) \in R^l_\gamma(\Omega, \partial\Omega)$, которые удовлетворяют условию согласования, то есть

$$R_0 = \Big\{(\bar{f}, g, \bar{h}) \in R^l_\gamma(\Omega, \partial\Omega) : \int\limits_\Gamma \bar{F}(\omega) \cdot \bar{c}\, d\Gamma_\omega = 0 \quad \forall \bar{c} \in \mathbb{R}^3\Big\}.$$

Заметим, что условие согласования выполняется не для всех функций $\bar{F}(\omega)$. Определим вид функций, которые будут удовлетворять условию (13). Это будут сферические функции $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, где

$$0 \leqslant \theta < \pi, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, -l \leqslant m \leqslant l,$$

l – целое, неотрицательное число. Для сферических функций условие ортогональности выглядит так:

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} Y_{lm}(\theta, \varphi) Y^*_{l'm'}(\theta, \varphi) \sin\theta\, d\theta = \delta_{ll'}\delta_{mm'},$$

где $Y^{*}_{l'm'}(\theta,\varphi) = (-1)^{m'} Y_{l',-m'}(\theta,\varphi)$,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Сама сферическая функция имеет вид:

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{2} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \sin^m \theta \frac{d^m P_l(\cos\theta)}{d(\cos\theta)^m},$$

где $P_l(\cos\theta)$ – полином Лежандра.

Если воспользоваться формулой Родрига для $P_l(\cos\theta)$, то можно получить явное выражение для сферической функции

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \frac{(-1)^{l-m}}{2^l \cdot l!} \sqrt{\frac{2l+1}{2} \cdot \frac{(l+m)!}{(l-m)!}} \sin^{-m} \theta \frac{d^{l-m}(\sin^{2l}\theta)}{d(\cos\theta)^{l-m}}.$$

Рассмотрим следующий пример. Пусть $l' = m' = 0$. Тогда $Y^{*}_{00}(\theta,\varphi) = (-1)^0 Y_{00}(\theta,\varphi) = Y_{00}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$. Функции $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ ортогональны $Y_{00}(\theta,\varphi)$, то есть выполняется условие:

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} Y_{lm}(\theta,\varphi) Y^{*}_{00}(\theta,\varphi) \sin\theta \, d\theta = \delta_{l0}\delta_{m0}.$$

Если $l' \neq 0$, то $\delta_{l0}\delta_{m0} = 0$.

Таким образом, любая функция $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ при $l \neq 0$ ортогональна константе на единичной сфере. При $l = 0$ таких функций, ортогональных константе, нет. Сферические функции можно записать в виде:

$$\sum_{l=1}^{n} \left[\frac{1}{2}\alpha_{l0} P_l(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{l} P_l^m(\cos\theta)(\alpha_{lm}\cos m\varphi + \beta_{lm}\sin m\varphi) \right], \tag{15}$$

где $P_l^m(\cos\theta) = \sin^m \theta \frac{d^m P_l(\cos\theta)}{d(\cos\theta)^m}$ – присоединенная функция Лежандра,

$$P_l(\cos\theta) = \frac{1}{2^l \cdot l!} \frac{d^l}{d(\cos\theta)} (-\sin^{2l}\theta)$$

– полином Лежандра, n – натуральное число.

Покажем, что функции такого рода действительно удовлетворяют условию согласования (13).

Пример 1. Воспользуемся готовыми разложениями для функций $P_l(\cos\theta)$ и $P_l^l(\cos\theta)$. Пусть $n = 1$, тогда (15) примет вид:

$$\frac{1}{2}\alpha_{10} P_1(\cos\theta) + P_1^1(\cos\theta)\big(\alpha_{11}\cos\varphi + \beta_{11}\sin\varphi\big) =$$

$$= \frac{1}{2}\alpha_{10}\cos\theta + \sin\theta\big(\alpha_{11}\cos\varphi + \beta_{11}\sin\varphi\big).$$

Тогда

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \Big(\frac{1}{2}\alpha_{10}\cos\theta + \sin\theta\big(\alpha_{11}\cos\varphi + \beta_{11}\sin\varphi\big)\Big)\, d\theta =$$

$$= 2\pi\frac{1}{2}\alpha_{10}\int\limits_0^{\pi} \sin\theta\cos\theta\, d\theta + \int\limits_0^{2\pi}\big(\alpha_{11}\cos\varphi + \beta_{11}\sin\varphi\big)\, d\varphi \int\limits_0^{\pi}\sin^2\theta\, d\theta =$$

$$= \pi\frac{1}{2}\alpha_{10}\sin^2\theta\Big|_0^{\pi} + \frac{\pi}{2}\big(\alpha_{11}\sin\varphi - \beta_{11}\cos\varphi\big)\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Пример 2. Пусть $n = 2$. Тогда (15) примет вид:

$$\frac{1}{2}\alpha_{10}P_1(\cos\theta) + P_1^1(\cos\theta)\big(\alpha_{11}\cos\varphi + \beta_{11}\sin\varphi\big) +$$

$$+\frac{1}{2}\alpha_{20}P_2(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{2} P_2^m(\cos\theta)\big(\alpha_{2m}\cos m\varphi + \beta_{2m}\sin m\varphi\big).$$

Обозначим

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \Big[\frac{1}{2}\alpha_{10}P_1(\cos\theta) + P_1^1(\cos\theta)\big(\alpha_{11}\cos\varphi + \beta_{11}\sin\varphi\big) +$$

$$\frac{1}{2}\alpha_{20}P_2(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{2} P_2^m(\cos\theta)\big(\alpha_{2m}\cos m\varphi + \beta_{2m}\sin m\varphi\big)\Big]\, d\theta = I_1 + I_2 + I_3,$$

где

$$I_1 = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \Big[\frac{1}{2}\alpha_{10}P_1(\cos\theta) + P_1^1(\cos\theta)\big(\alpha_{11}\cos\varphi + \beta_{11}\sin\varphi\big)\Big]\, d\theta,$$

$$I_2 = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \frac{1}{2}\alpha_{20}P_2(\cos\theta)\, d\theta,$$

$$I_3 = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \sum_{m=1}^{2} P_2^m(\cos\theta)\big(\alpha_{2m}\cos m\varphi + \beta_{2m}\sin m\varphi\big)\, d\theta.$$

В примере 1 уже было показано, что $I_1 = 0$. Рассмотрим I_2.

$$I_2 = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \frac{1}{2}\alpha_{20}P_2(\cos\theta)\, d\theta =$$

$$= 2\pi\frac{1}{4}\alpha_{20}\int\limits_0^{\pi}\sin\theta(3\cos^2\theta - 1)\, d\theta = \frac{\alpha_{20}\pi}{2}\Big[-\cos^3\theta\Big|_0^{\pi} + \cos\theta\Big|_0^{\pi}\Big] = \frac{\alpha_{20}\pi}{2}\cdot 0 = 0.$$

Теперь рассмотрим

$$I_3 = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \sum_{m=1}^{2} P_2^m(\cos\theta)\big(\alpha_{2m}\cos m\varphi + \beta_{2m}\sin m\varphi\big)\,d\theta =$$

$$= \sum_{m=1}^{2} \int\limits_0^{2\pi} \big(\alpha_{2m}\cos m\varphi + \beta_{2m}\sin m\varphi\big)\,d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta P_2^m(\cos\theta)\,d\theta.$$

Заметим, что

$$\int\limits_0^{2\pi} \big(\alpha_{km}\cos m\varphi + \beta_{km}\sin m\varphi\big)\,d\varphi = \alpha_{km}\frac{1}{m}\sin m\varphi\Big|_0^{2\pi} - \beta_{km}\frac{1}{m}\cos m\varphi\Big|_0^{2\pi} = 0$$

для любых целых k и m.

Таким образом,

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \sum_{m=1}^{2} P_l^m(\cos\theta)\big(\alpha_{lm}\cos m\varphi + \beta_{lm}\sin m\varphi\big)\,d\theta =$$

$$= \sum_{m=1}^{2} \int\limits_0^{2\pi} \big(\alpha_{lm}\cos m\varphi + \beta_{lm}\sin m\varphi\big)\,d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta P_l^m(\cos\theta)\,d\theta =$$

$$= \sum_{m=1}^{l} 0 \cdot \int\limits_0^{\pi} \sin\theta P_l^m(\cos\theta)\,d\theta = 0.$$

Следовательно, $I_3 = 0$ и $I = 0$, то есть выполняется условие (13) для заданной функции, что и требовалось доказать.

Приведенные выше примеры показывают, что сферические функции действительно удовлетворяют условию согласования.

Заключение

В статье сформулированы условия разрешимости стационарной трехмерной задачи об обтекании ограниченного тела потоком вязкой жидкости. Задача рассмотрена в линеаризованной постановке для случая, когда скорость жидкости стремится к нулю на бесконечности. Найдены решения стационарной задачи, обладающие определенными свойствами на бесконечности. Описан класс функций для правой части уравнения движения, которые удовлетворяют условию согласования, приведены примеры. Полученные результаты могут быть использованы при решении нелинейной задачи Стокса с помощью итерационных методов.

Список литературы

[1] Finn R. On the exterior srationary problem for the Navier-Stokes equations, and associated perturbation problem // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1965. Vol. 19. Pp. 363–406.

[2] Mogilevski I., Zakharova I. The stationary flows for a certain type of nonnewtonian fluids // Far East Journal of Applied Mathematics. 2004. Vol. 15, № 2. Pp. 259–277.

[3] Захарова И.В. О единственности решения задачи об обтекании ограниченного тела установившимся потоком неньютоновской жидкости // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2007. № 7. С. 61–88.

[4] Захарова И.В. Математические модели неограниченного стационарного потока неньютоновской жидкости: дисс. ...канд. физ.-мат. наук. Тверь, 2003. 118 с.

[5] Захарова И.В. О разрешимости внешней задачи Стокса // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 1. С. 75–92.

[6] Nazarov S., Pileskas K. On steady Stokes and Navier-Stokes problems with zero velocity at infinity in a three-dimentional exterior domain // Journal of Mathematics of Kyoto University. 2000. Vol. 40. Pp. 475–492.

[7] Borchers W., Pileskas K. Existence, uniqueness and asymptotics of steady jets // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1992. Vol. 120. Pp. 1–49.

Библиографическая ссылка

Захарова И.В. Об одном классе функций для условия согласования // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 2. С. 81–94.

Сведения об авторах

1. **Захарова Ирина Владимировна**
доцент кафедры математической статистики и системного анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

ON ONE CLASS OF FUNCTIONS FOR COMPATIBILITY CONDITION

Zakharova Irina Vladimirovna
Associate professor at Mathematical Statistics and System Analysis department,
Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU.

Received 19.02.2016, revised 27.02.2016.

We study the stationary problem of a flow around a finite solid body of a stream of viscous non-Newtonian fluid. The problem is considered in the linearized formulation for the case where the fluid velocity goes to zero at infinity. Necessary and sufficient condition for the existence of solution of the problem is formulated. Class of functions in the right part of the equation of motion, which satisfy this condition, is described. Examples are provided.

Keywords: exterior Stokes problem, non-Newtonian fluids, compatibility condition.

Bibliographic citation

Zakharova I.V. On one class of functions for compatibility condition. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2016, no. 2, pp. 81–94. (in Russian)

References

[1] Finn R. On the exterior srationary problem for the Navier-Stokes equations, and associated perturbation problem. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1965, vol. 19, pp. 363–406.

[2] Mogilevski I., Zakharova I. The stationary flows for a certain type of nonnewtonian fluids. *Far East Journal of Applied Mathematics*, 2004, vol. 15(2), pp. 259–277.

[3] Zakharova I.V. Uniqueness of the solution of the problem of flow past a finite body by steady flow of non-Newtonian fluid. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2007, no. 7, pp. 61–78. (in Russian)

[4] Zakharova I.V. Mathematical models of unlimited steady flow of non-Newtonian fluids. PhD thesis. Tver, 2003. 118 p. (in Russian)

[5] Zakharova I.V. On the solvability of the external Stokes problem. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2016, no. 1, pp. 75–92. (in Russian)

[6] Nazarov S., Pileskas K. On steady Stokes and Navier-Stokes problems with zero velocity at infinity in a three-dimentional exterior domain. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 2000, vol. 40, pp. 475–492.

[7] Borchers W., Pileskas K. Existence, uniqueness and asymptotics of steady jets. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1992, vol. 120, pp. 1–49.