

УДК 539.3

**УЧЕТ НЕСЖИМАЕМОСТИ МАТЕРИАЛА ПРИ РАСЧЕТЕ  
НАПРЯЖЕНИЙ ВБЛИЗИ ВЯЗКОУПРУГОГО ВКЛЮЧЕНИЯ  
В ВЯЗКОУПРУГОМ ТЕЛЕ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ <sup>1</sup>**

**Шавырин Д.А., Зингерман К.М.**  
Кафедра вычислительной математики

---

*Поступила в редакцию 18.05.2016, после переработки 22.05.2016.*

---

Для класса несжимаемых вязкоупругих материалов получено приближенное аналитическое решение плоской квазистатической задачи о напряженно-деформированном состоянии бесконечно протяженного тела, в котором имеется круговое включение (область с другими параметрами материала), при конечных деформациях. При решении используются метод малого параметра, комплексные потенциалы Колосова–Мухелишвили и преобразование Лапласа. Приведены некоторые результаты расчетов, дана оценка нелинейных эффектов.

**Ключевые слова:** плоская задача, вязкоупругое включение, аналитическое решение, комплексные потенциалы, компьютерная алгебра, конечные деформации, несжимаемые материалы.

*Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 2. С. 107–121.*

## **Введение**

Представляет интерес расчет напряженно-деформированного состояния (НДС) в несжимаемых композиционных материалах [1, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 17]. В данной статье предложено решение плоской задачи нелинейной теории вязкоупругости о распределении НДС в бесконечно протяженном вязкоупругом теле с круговым вязкоупругим включением при конечных деформациях с использованием приближенных аналитических методов. Решение строится на основе методики, приведенной в [12, 16] и обобщенной на случай несжимаемых материалов с использованием системы компьютерной алгебры. Определяющие соотношения записываются в виде нелинейной зависимости между тензором обобщенных напряжений и тензорной мерой Грина, обобщающей на случай вязкоупругости определяющие соотношения для потенциала Трелоара [15]. В этих соотношениях упругие постоянные заменены интегральными операторами вида свертки по времени.

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект № 14-08-01191) и Министерства образования и науки России в рамках базовой части Государственного задания в сфере научной деятельности (Задание 2014/220, проект 1153).

## 1. Постановка задачи

Исследуется напряженно-деформированное состояние бесконечно протяженного вязкоупругого тела (матрицы), в котором имеется круговое вязкоупругое включение с другими свойствами. Эта задача решается в квазистатической постановке при конечных плоских деформациях. Материалы матрицы и включения считаются несжимаемыми, их математическая модель описывается определяющими соотношениями, обобщающими на случай вязкоупругости соотношения для потенциала Трелоара [15]. Эта модель обобщена на случай вязкоупругих материалов и конечных деформаций. Предполагается, что на границе между включением и матрицей выполнены условия идеального контакта. Требуется решить задачу о квазистатическом деформировании тела при заданных нормальных и касательных напряжениях на бесконечности.

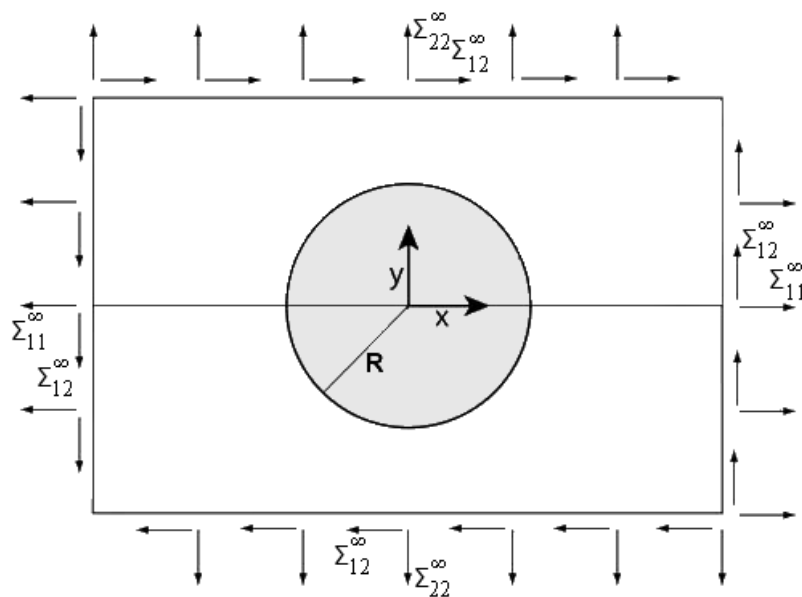


Рис. 1: Схема нагружения тела с включением

Здесь и в дальнейшем индексом  $M$  отмечаются величины, относящиеся к матрице, а индексом  $B$  — к включению. Если индексы не указаны, то выражения относятся как к матрице, так и к включению. Декартова система координат выбрана таким образом, чтобы начало координат совпало с центром включения (Рис. 1).

Математическая постановка задачи описывается в координатах недеформированного состояния для случая отсутствия массовых сил при заданном всестороннем давлении  $p$  на бесконечности. Далее использованы следующие обозначения:  $u$  — вектор перемещений,  $\Psi$  — аффинор деформаций,  $\Delta$  — относительное изменение объема,  $G$  — тензорная мера деформаций Грина (Коши–Грина),  $\sigma$  — тензор истинных напряжений (тензор Коши),  $\Sigma$  — тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа второго рода,  $\nabla$  — оператор градиента,  $I$  — единичный тензор,  $\Gamma$  — граница мат-

рицы и включения,  $\overset{0}{N}$  — нормаль к  $\Gamma$ ,  $:$  — знак двойной скалярной свертки,  $*$  — знак транспонирования.

Уравнение равновесия имеет вид

$$\overset{0}{\nabla} \cdot \left[ \overset{0}{\Sigma} \cdot \Psi \right] = 0, \quad (1)$$

здесь

$$\overset{0}{\Sigma} = (1 + \Delta) \Psi^{*-1} \cdot \sigma \cdot \Psi^{-1}. \quad (2)$$

Условие несжимаемости

$$\Delta = 0. \quad (3)$$

Условия на бесконечности

$$\sigma_M|_{\infty} = \sigma_M^{\infty}. \quad (4)$$

Условия непрерывности вектора перемещений  $u$  и вектора нормальных напряжений  $\overset{0}{N} \cdot \overset{0}{\Sigma} \cdot \Psi$  на границе матрицы и включения

$$\begin{aligned} \overset{0}{N} \cdot \overset{0}{\Sigma}_M \cdot \Psi_M|_{\Gamma} &= \overset{0}{N} \cdot \overset{0}{\Sigma}_B \cdot \Psi_B|_{\Gamma}, \\ u_M|_{\Gamma} &= u_B|_{\Gamma}. \end{aligned} \quad (5)$$

Определяющие соотношения представляются в форме [1]:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t \mu(t-\tau) \left[ I - \frac{1}{3} \frac{\partial ([G(\tau) : I] \cdot G^{-1}(\tau))}{\partial \tau} \right] d\tau - p(t)G^{-1}(t), \quad (6)$$

здесь  $\mu$  — сдвиговое ядро релаксации вида

$$\mu(t) = \mu_0 + \mu_1 e^{-\beta t}. \quad (7)$$

Модули  $\mu_0$ ,  $\mu_1$  и параметры  $\beta$ , характеризующие скорость релаксации, могут принимать различные значения в матрице и во включении. Это соотношение было апробировано при решении задач, но для другой формы ядра релаксации в [7, 13].

Геометрические соотношения имеют вид

$$G = \Psi \cdot \Psi^*, \quad \Psi = I + \overset{0}{\nabla} u, \quad \det \Psi = 1 + \Delta. \quad (8)$$

## 2. Метод решения

Для решения задачи применяется метод возмущений (малого параметра) [3, 7, 8, 13, 14]. Выбирается малый параметр  $\nu$  в виде

$$\nu = \max_{i,j} \left| \overset{0}{\Sigma}_{ij}^{\infty} \right| / \mu_0^M \quad (9)$$

и для всех величин, входящих в постановку задачи, записывается разложение в ряд по этому параметру. Например, для вектора перемещений  $u$  такое разложение может быть записано в форме

$$u = u^{(0)} + u^{(1)} + \dots, \quad u^{(j)} \sim \nu^{j+1}. \quad (10)$$

В результате решение нелинейной задачи сводится к последовательному решению линеаризованных задач. Решение линеаризованной задачи для каждого приближения определяется методом Колосова–Мухелишвили [6, 10] с использованием алгоритмов, изложенных в [7, 13, 14].

Для нулевого приближения решение находится следующим образом. Так как определяющие соотношения в задаче заданы в виде интегралов свертки по времени, можно эффективно воспользоваться методом интегральных преобразований Лапласа [3]. Для внешней нагрузки и ядер релаксации используем их функции в изображениях. Условия непрерывности вектора перемещений и вектора нормальных напряжений на границе матрицы и включения могут быть выражены через комплексные потенциалы следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_M(z) + z\overline{\varphi'_M(z)} + \overline{\psi_M(z)} \Big|_{\Gamma} &= \varphi_B(z) + z\overline{\varphi'_B(z)} + \overline{\psi_B(z)} \Big|_{\Gamma}, \\ \frac{1}{2\mu_M} \left[ \varphi_M(z) - z\overline{\varphi'_M(z)} - \overline{\psi_M(z)} \right] \Big|_{\Gamma} &= \frac{1}{2\mu_B} \left[ \varphi_B(z) - z\overline{\varphi'_B(z)} - \overline{\psi_B(z)} \right] \Big|_{\Gamma}. \end{aligned} \quad (11)$$

Комплексные потенциалы определяются в виде рядов Лорана по степеням  $z = x + iy = re^{i\vartheta}$ .

$$\begin{aligned} \varphi_M^{(0)}(z) &= \frac{\sum_{MI}^{\infty(0)}}{4} \sum_{k=-1}^{\infty} a_k^{(0)} z^{-k}, & \psi_M^{(0)}(z) &= \frac{\sum_{MII}^{\infty(0)}}{2} \sum_{k=-1}^{\infty} b_k^{(0)} z^{-k}, \\ \varphi_B^{(0)}(z) &= \frac{\sum_{MI}^{\infty(0)}}{4} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(0)} z^k, & \psi_B^{(0)}(z) &= \frac{\sum_{MII}^{\infty(0)}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(0)} z^k. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя потенциалы, представленные в виде рядов (12), в граничные условия, получаем систему линейных алгебраических уравнений для нахождения выражений для коэффициентов рядов через нагрузки и ядра релаксации. Большинство коэффициентов получаются нулевыми. Так как граничные условия вполне определяют напряженное состояние тела, а смещения определяются с точностью до жесткого перемещения, зафиксируем величины  $\varphi_M^{(0)}(0) = 0$ ,  $\psi_M^{(0)}(0) = 0$ ,  $\varphi_B^{(0)}(0) = 0$ ,  $\psi_B^{(0)}(0) = 0$  и, кроме того, мнимые части величин  $\varphi_M^{(0)'}(0) = 0$ ,  $\varphi_B^{(0)'}(0) = 0$  [10]. Принимая радиус включения равным  $R$ , и из условий на бес-

конечности  $a_{-1}^{(0)} = 1$ ,  $b_{-1}^{(0)} = 1$ , имеем выражения для ненулевых коэффициентов:

$$\begin{aligned} a_1^{(0)} &= \frac{2R^2 \overset{0}{\Sigma}_{MII}^{\infty(0)} (\mu_B - \mu_M)}{\overset{0}{\Sigma}_{MI}^{\infty(0)} (\mu_B + \mu_M)}, \\ b_3^{(0)} &= \frac{R^4 (\mu_B - \mu_M)}{(\mu_B + \mu_M)}, \\ c_1^{(0)} &= 1, \\ d_1^{(0)} &= \frac{2\mu_B}{(\mu_B + \mu_M)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Отметим, что можно ограничиться в суммах (12) конечным числом слагаемых до  $k = 3$  включительно без потери точности, поскольку коэффициенты при старших степенях  $z$  будут нулевыми.

Подставляя в формулы, связывающие потенциалы с напряжениями, перемещениями и давлением [6,8,10] выражения для потенциалов (12), получаем выражения в изображениях для напряжений, перемещений и давления. Применяя обратное преобразование Лапласа, получаем решение в оригиналах.

Для первого приближения решение находится следующим образом. Тильдой помечены те части первого приближения соответствующих величин, которые определяются нулевым приближением. Если в качестве аргумента функции используется  $s$ , то предполагается, что речь идет об изображении по Лапласу. Если аргумент не указан, то имеются ввиду оригиналы.

1. Определяется аффинор деформаций  $\Psi^{(0)}$ :

$$\Psi^{(0)} = \overset{0}{\nabla} u^{(0)}. \quad (14)$$

2. Определяется невязка по относительному изменению объема  $H^{(1)}$ :

$$H^{(1)} = \frac{1}{2} \Psi^{(0)} : \Psi^{(0)}. \quad (15)$$

3. Определяются компоненты тензорной меры Грина  $G$ :

$$\begin{aligned} G^{(0)} &= \Psi^{(0)} + \Psi^{(0)*}, \\ \tilde{G}^{(1)} &= \Psi^{(0)} \cdot \Psi^{(0)*}. \end{aligned} \quad (16)$$

4. Применяя к тензорной мере Грина преобразование Лапласа, определяется в изображениях поправка от учета эффектов второго порядка для тензора Пиолы–Кирхгофа второго рода  $\overset{0}{\Sigma}^{(1)}$ . В следующих выражениях под  $\mathcal{L}$  понимается прямое преобразование Лапласа:

$$\overset{0}{\Sigma}^{(1)}(s) = \mu(s) \mathcal{L} \left( \tilde{G}^{(1)} - \frac{1}{3} (\tilde{G}^{(1)} : I) I - G^{(0)} \cdot G^{(0)} \right) + \mathcal{L} (p^{(0)} G^{(0)}). \quad (17)$$

5. Определяется вектор фиктивных массовых сил  $f^{(1)}$ :

$$f^{(1)}(s) = -\overset{0}{\nabla} \cdot \left( \overset{0}{\Sigma}^{(1)}(s) + \mathcal{L} \left( \overset{0}{\Sigma}^{(0)} \cdot \Psi^{(0)} \right) \right). \quad (18)$$

6. Из вектора  $f^{(1)}$  находим частное решение неоднородного уравнения:

$$\begin{aligned} p_{\text{н.}}^{(1)}(s) &= \frac{4}{3}\mu(s)\mathcal{L}\left(H^{(1)}\right) - \frac{1}{2}\left(\int \frac{f^{(1)}(s)}{2}d\bar{z} + \int \frac{\overline{f^{(1)}(s)}}{2}dz\right), \\ u_{\text{н.}}^{(1)}(s) &= \frac{1}{4\mu(s)}\left(\iint \frac{f^{(1)}(s)}{2}dzd\bar{z} - \iint \frac{\overline{f^{(1)}(s)}}{2}dzd\bar{z}\right) + \frac{1}{2}\int \mathcal{L}\left(H^{(1)}\right)dz. \end{aligned} \quad (19)$$

7. Находим тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа второго рода  $\overset{0}{\Sigma}^{(1)}$ :

$$\overset{0}{\Sigma}^{(1)}(s) = \overset{0}{\tilde{\Sigma}}^{(1)}(s) + \mu(s)\left((\overset{0}{\nabla}u_{\text{н.}}^{(1)}(s) + u_{\text{н.}}^{(1)}(s)\overset{0}{\nabla}) - \frac{2}{3}(\overset{0}{\nabla} \cdot u_{\text{н.}}^{(1)}(s))I\right) - p_{\text{н.}}^{(1)}(s)I. \quad (20)$$

8. Определяется тензор напряжений на бесконечности  $\overset{0}{\Sigma}_M^{\infty(1)}$ :

$$\overset{0}{\Sigma}_M^{\infty(1)}(s) = -\left(\overset{0}{\tilde{\Sigma}}^{(1)}(s) + \mathcal{L}\left(\overset{0}{\Sigma}^{(0)} \cdot \Psi^{(0)}\right)\right)\Big|_{\infty}. \quad (21)$$

9. Используя комплексные потенциалы, находим решение однородной системы уравнений по аналогии с нулевым приближением. Эти потенциалы представляются в виде:

$$\begin{aligned} \varphi_M^{(1)}(z) &= \frac{\overset{0}{\Sigma}_{MI}^{\infty(1)}}{4} \sum_{k=-1}^{\infty} a_k^{(1)} z^{-k}, & \psi_M^{(1)}(z) &= \frac{\overset{0}{\Sigma}_{MII}^{\infty(1)}}{2} \sum_{k=-1}^{\infty} b_k^{(1)} z^{-k}, \\ \varphi_B^{(1)}(z) &= \frac{\overset{0}{\Sigma}_{MI}^{\infty(1)}}{4} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} z^k, & \psi_B^{(1)}(z) &= \frac{\overset{0}{\Sigma}_{MII}^{\infty(1)}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(1)} z^k. \end{aligned} \quad (22)$$

Подставляя потенциалы в граничные условия и решая систему линейных алгебраических уравнений, находим выражения для коэффициентов рядов через нагрузки и ядра релаксации. Расчеты показали, что в данном случае в суммах (22) можно ограничиться конечным числом слагаемых до  $k = 9$  включительно без потери точности.

Подставляя выражения для потенциалов (22) в формулы из [6, 8, 10], связывающие потенциалы с напряжениями и перемещениями, получаем выражения в изображениях для напряжений и перемещений. Применяя обратное преобразование Лапласа, находим решение в оригиналах.

Решение найдено в аналитической форме, но учитывая громоздкость выражений, ограничимся только численными результатами.

### 3. Результаты расчетов

Для решения задачи было разработано программное обеспечение в среде системы компьютерной алгебры Maple. Были вычислены первые два приближения.

Были выполнены расчеты при следующих значениях вязкоупругих констант:  $\beta_M = \beta_B$ ,  $\mu_1^M/\mu_0^M = 4$ ,  $\mu_0^B/\mu_0^M = 2$ ,  $\mu_1^B/\mu_0^M = 8$ . В данном случае включение

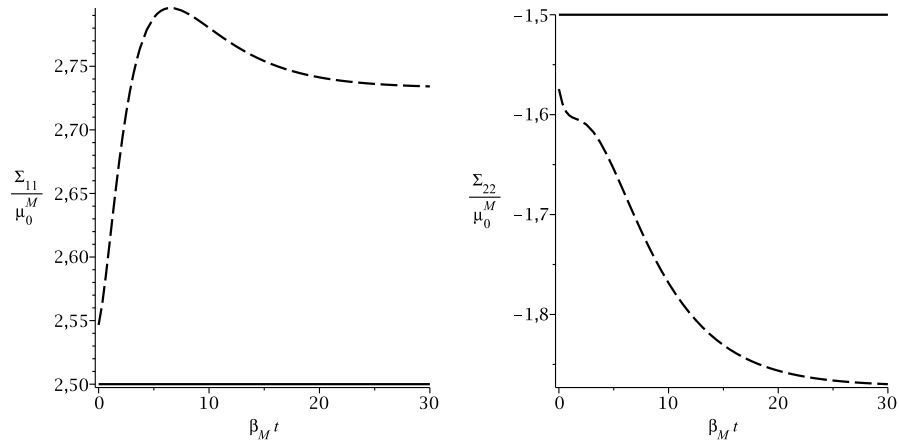


Рис. 2: Изменение напряжений  $\Sigma_{11}$  и  $\Sigma_{22}$  вблизи центра включения

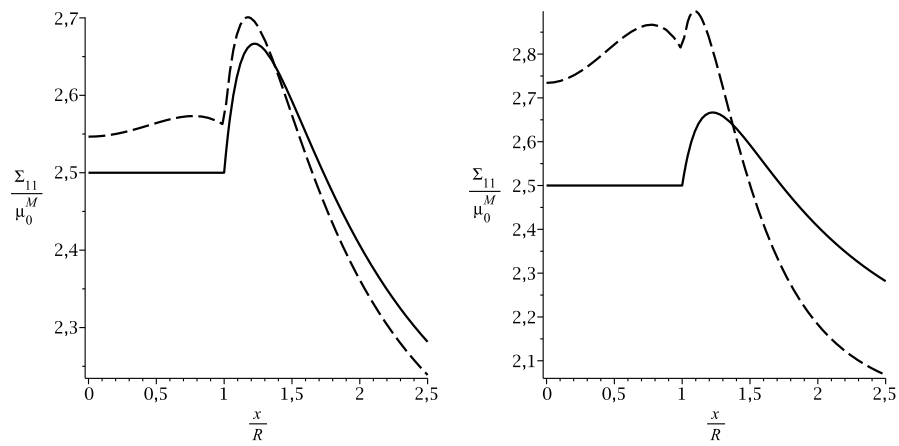


Рис. 3: Распределение напряжений  $\Sigma_{11}$  вдоль оси  $x$  в моменты времени  $t = 0$  и  $t = 30/\beta_M$

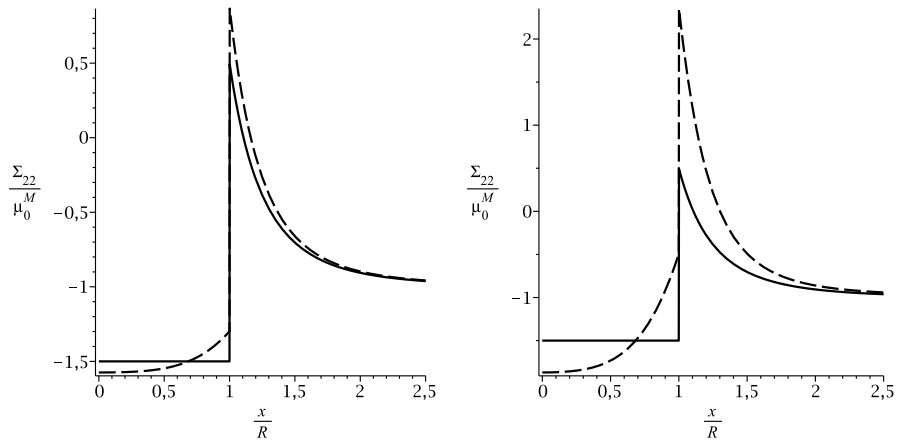


Рис. 4: Распределение напряжений  $\Sigma_{22}$  вдоль оси  $x$  в моменты времени  $t = 0$  и  $t = 30/\beta_M$

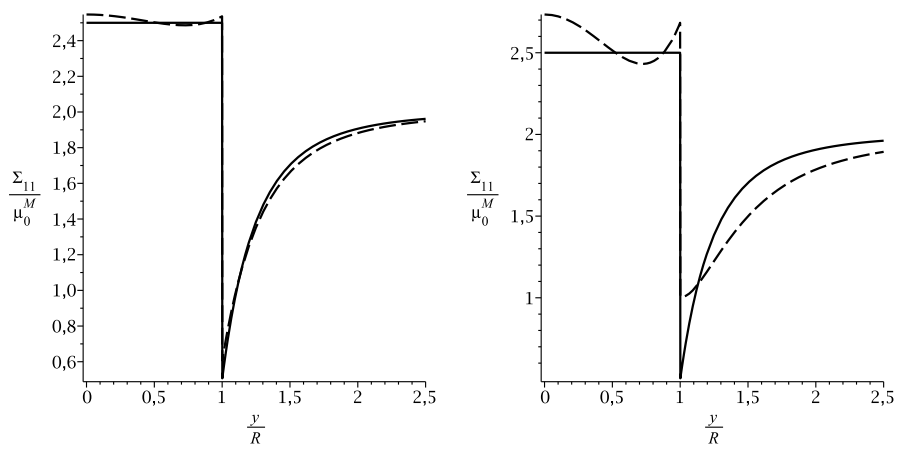


Рис. 5: Распределение напряжений  $\Sigma_{11}$  вдоль оси  $y$  в моменты времени  $t = 0$  и  $t = 30/\beta_M$



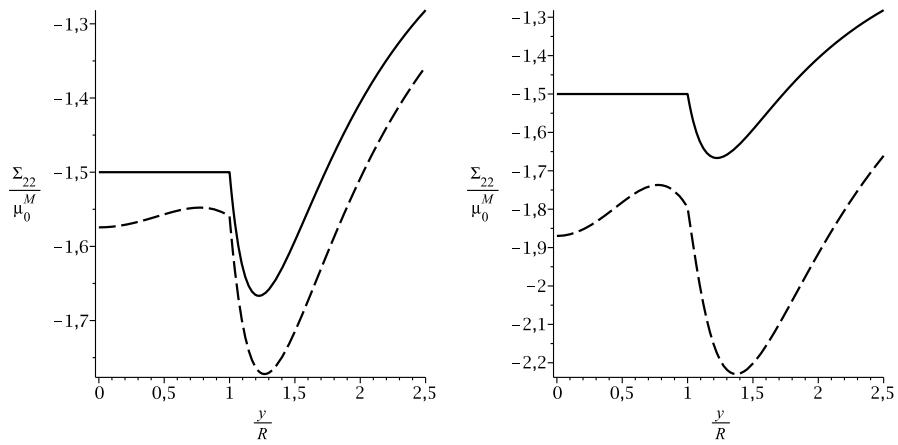


Рис. 6: Распределение напряжений  $\Sigma_{22}$  вдоль оси  $y$  в моменты времени  $t = 0$  и  $t = 30/\beta_M$

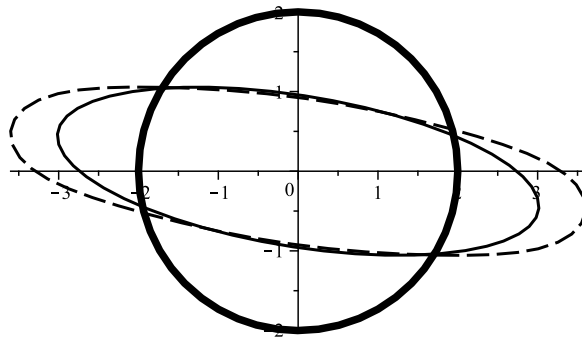


Рис. 7: Форма включения в момент времени  $t = 30/\beta_M$

более жесткое, чем матрица. На бесконечности в момент  $t = 0$  прикладываются нагрузки вида:  $\sigma_{M11}^{\infty(0)} = 2\mu_0^M$ ,  $\sigma_{M22}^{\infty(0)} = -\mu_0^M$ ,  $\sigma_{M12}^{\infty(0)} = -0.5\mu_0^M$ .

На Рис. 2 представлен график изменения напряжений со временем вблизи центра включения. На Рис. 3–6 показано распределение напряжений  $\Sigma_{11}$  и  $\Sigma_{22}$  вдоль осей  $x$  и  $y$  в моменты времени  $t = 0$  и  $t = 30/\beta_M$ . На Рис. 7 изображена форма включения в момент времени  $t = 30/\beta_M$ .

Сплошная линия на графиках соответствует линейному решению, штриховая — решению с учетом нелинейности. На Рис. 7 утолщенной сплошной линией изображена исходная форма включения — окружность.

При заданных нагрузках поправка от учета нелинейных эффектов для компонент тензора напряжений не превосходит 68%, а для вектора перемещений — 59%.

## Заключение

Решена плоская задача нелинейной теории вязкоупругости о распределении НДС в бесконечно протяженном несжимаемом вязкоупругом теле с круговым несжимаемым вязкоупругим включением при конечных деформациях. Исследовано распределение напряжений в различные моменты времени. Результаты решения этой задачи могут использоваться в расчетах на прочность резинокордных композитов [2], а также для анализа и уточнения численных решений.

## Список литературы

- [1] Адамов А.А., Матвеев В.П., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н. Методы прикладной вязкоупругости. Екатеринбург: УрО РАН, 2003. 411 с.
- [2] Гамлицкий Ю.А. Наномеханика явления усиления наполненных эластомеров // Механика композиционных материалов и конструкций. 2014. Т. 20, № 2. С. 230–247.
- [3] Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
- [4] Колтунов М.А., Майборода В.П., Зубчанинов В.Г. Прочностные расчеты изделий из полимерных материалов. М.: Машиностроение, 1983. 239 с.
- [5] Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.
- [6] Колосов Г.В. Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче теории упругости. Юрьев: Маттисен, 1908. 187 с.
- [7] Левин В.А., Зингерман К.М. Точные и приближенные аналитические решения при конечных деформациях и их наложении. М.: Физматлит, 2016. 400 с. (Нелинейная вычислительная механика прочности / Под общ. ред. В.А.Левина: В 5 т. Т. III).
- [8] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.

- [9] Мошев В.В., Свистков А.Л., Гаришин О.К., Евлампиева С.Е., Роговой А.А., Ковров В.Н., Комар Л.А., Голотина Л.А., Кожевникова Л.Л. Структурные механизмы формирования механических свойств зернистых полимерных композитов. Екатеринбург: УрО РАН, 1997. 508 с.
- [10] Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 709 с.
- [11] Свистков А.Л. Структурно-феноменологическое моделирование механического поведения резин // Высокомолекулярные соединения. 2008. Т. 50, № 5. С. 892–902.
- [12] Шавырин Д.А. Аналитическое решение плоской задачи о квазистатической деформации бесконечно протяженного вязкоупругого тела с круговым вязкоупругим включением средствами компьютерной алгебры // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2013. № 1(28). С. 45–54.
- [13] Levin V.A., Zingerman K.M. A class of methods and algorithms for the analysis of successive origination of holes in a pre-stressed viscoelastic body. Finite strains // Communications in Numerical Methods in Engineering. 2008. Vol. 24, № 12. Pp. 2240–2251.
- [14] Levin V.A., Zingerman K.M., Vershinin A.V., Yakovlev M.Ya. Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains // Composite Structures. 2015. Vol. 131. Pp. 25–36. doi:10.1016/j.compstruct.2015.04.037
- [15] Treloar L.R.G. The Physics of Rubber Elasticity. Oxford: Clarendon Press, 1975. 310 p.
- [16] Zingerman K.M., Shavyrin D.A. Approximate analytical solution for the problem of an inclusion in a viscoelastic solid under finite strains // Mechanics of Time-Dependent Materials. 2016. Vol. 20, № 2. Pp. 139–153. doi:10.1007/s11043-015-9288-2
- [17] Wollscheid D., Lion A. The benefit of fractional derivatives in modelling the dynamics of filler-reinforced rubber under large strains: a comparison with the Maxwell-element approach // Computational Mechanics. 2014. Vol. 53. Pp. 1015–1031. doi:10.1007/s00466-013-0946-4

#### Библиографическая ссылка

Шавырин Д.А., Зингерман К.М. Учет несжимаемости материала при расчете напряжений вблизи вязкоупругого включения в вязкоупругом теле при конечных деформациях // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 2. С. 107–121.

**Сведения об авторах****1. Шавырин Дмитрий Алексеевич**

аспирант кафедры вычислительной математики Тверского государственного университета.

*Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, 33, ТвГУ, факультет ПМиК.*

**2. Зингерман Константин Моисеевич**

зав. кафедрой вычислительной математики Тверского государственного университета.

*Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ, факультет ПМиК.*

*E-mail: zingerman@rambler.ru.*

# ACCOUNT FOR INCOMPRESSIBILITY IN THE STRESS ANALYSIS NEAR VISCOELASTIC INCLUSION IN A VISCOELASTIC SOLID UNDER FINITE STRAINS

**Shavyrin Dmitriy Alekseevich**

PhD student at Computational Mathematics department, Tver State University  
*Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str.*

**Zingerman Konstantin Moiseevich**

Head of Computational Mathematics department, Tver State University  
*Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str.*  
*E-mail: zingerman@rambler.ru*

---

*Received 18.05.2016, revised 22.05.2016.*

---

Approximate analytical solution for a specific plane quasistatic problem of the theory of viscoelasticity is found. This is the problem of the stress-strain state in infinitely extended body with circular incompressible viscoelastic inclusion (area with other material parameters) when the stresses at infinity are fixed at finite strains. Materials of body and inclusion are considered incompressible. Solution uses perturbation technique, complex Kolosov–Muskhelishvili potentials and Laplace transform. Some calculated results are shown and estimation of nonlinear effects is given.

**Keywords:** plane problem, viscoelastic inclusion, analytical solution, complex potentials, computer algebra, finite strain, incompressible materials.

## Bibliographic citation

Shavyrin D.A., Zingerman K.M. Account for incompressibility in the stress analysis near viscoelastic inclusion in a viscoelastic solid under finite strains. *Vestnik Tvergos. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2016, no. 2, pp. 107–121. (in Russian)

## References

- [1] Adamov A.A., Matveenkov V.P., Trufanov N.A., Shardakov I.N. *Metody Prikladnoi Vyazkouprugosti* [Methods of Applied Viscoelasticity]. Ural division of RAS, Ekaterinburg, 2003. 411 p. (in Russian)
- [2] Gamlitskii Yu.A. Nanomechanics phenomenon of amplification of filled elastomers. *Mekhanika Kompozitsionnykh Materialov i Konstruktsii* [Mechanics of Composite Materials and Structures], 2014, vol. 20(2), pp. 230–247. (in Russian)
- [3] Il'yushin A.A., Pobedrya B.E. *Osnovy Matematicheskoi Teorii Termoviazkouprugosti* [Fundamentals of Mathematical Theory of Thermoviscoelasticity]. Nauka Publ., Moscow, 1970. 280 p. (in Russian)

- [4] Koltunov M.A., Maiboroda V.P., Zubchaninov V.G. *Prochnostnye Raschety Izdelii iz Polimernykh Materialov* [Structural Analyzes of Products from Polymeric Materials]. Mashinostroeniye Publ., Moscow, 1983. 239 p. (in Russian)
- [5] Kristensen R. *Vvedenie v Teoriyu Vyazkouprugosti* [Introduction to the Theory of Viscoelasticity]. Mir Publ., Moscow, 1974. 338 p. (in Russian)
- [6] Kolosov G.V. *Ob Odnom Prilozenii Teorii Funktsii Kompleksnogo Peremennogo k Ploskoi Zadache Teorii Uprugosti* [On One Application of the Theory of Complex Variable Functions to Elasticity Problem on a Plane]. Mattisen Publ., Juriyev, 1908. 187 p. (in Russian)
- [7] Levin V.A., Zingerman K.M. *Tochnye i Priblizhennye Analiticheskie Resheniya pri Konechnykh Deformatsiyakh i ikh Nalozhenii* [Exact and Approximate Analytical Solutions for Finite Deformations and their Imposition]. Fizmatlit Publ., Moscow, 2016. 400 p. (in Russian)
- [8] Lur'e A.I. *Nelineinaya Teoriya Uprugosti* [Nonlinear Theory of Elasticity]. Nauka Publ., Moscow, 1980. 512 p. (in Russian)
- [9] Moshev V.V., Svistkov A.L., Garishin O.K., Evlampieva S.E., Rogovoi A.A., Kovrov V.N., Komar L.A., Golotina L.A., Kozhevnikova L.L. *Strukturnye Mekhanizmy Formirovaniya Mekhanicheskikh Svoistv Zernistykh Polimernykh Kompozitov* [Structural Mechanisms of the Mechanical Properties of Granular Polymer Composites]. Ural division of RAS, Ekatirenburg, 1997. 508 p. (in Russian)
- [10] Muskhelishvili N.I. *Nekotorye Osnovnye Zadachi Matematicheskoi Teorii Uprugosti* [Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity]. Nauka Publ., Moscow, 1966. 709 p. (in Russian)
- [11] Svistkov A.L. The structural-phenomenological modeling of the mechanical behavior of rubber. *Vysokomolekulyarnye Soedineniya* [Macromolecular Compounds], 2008, vol. 50(5), pp. 892–902. (in Russian)
- [12] Shavyrin D.A. The analytical solution of the plane problem of the quasi-static deformation of an infinitely extended viscoelastic body with a circular viscoelastic inclusion with the help of computer algebra. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2013, no. 1, pp. 45–53. (in Russian)
- [13] Levin V.A., Zingerman K.M. A class of methods and algorithms for the analysis of successive origination of holes in a pre-stressed viscoelastic body. Finite strains. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 2008, vol. 24(12), pp. 2240–2251.
- [14] Levin V.A., Zingerman K.M., Vershinin A.V., Yakovlev M.Ya. Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains. *Composite Structures*, 2015, vol. 131, pp. 25–36. doi:10.1016/j.compstruct.2015.04.037

- [15] Treloar L.R.G. The Physics of Rubber Elasticity. Clarendon Press, Oxford, 1975. 310 p.
- [16] Zingerman K.M., Shavyrin D.A. Approximate analytical solution for the problem of an inclusion in a viscoelastic solid under finite strains. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 2016, vol. 20(2), pp. 139-153. doi:10.1007/s11043-015-9288-2
- [17] Wollscheid D., Lion A. The benefit of fractional derivatives in modelling the dynamics of filler-reinforced rubber under large strains: a comparison with the Maxwell-element approach. *Computational Mechanics*, 2014, vol. 53, pp. 1015–1031. doi:10.1007/s00466-013-0946-4