УДК 533.6, 517.95

УПРОЩЕННАЯ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕДЛЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ СЖИМАЕМОГО ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА

Григорьева В.В.*, **Шеретов Ю.В.****
* Тверской государственный технический университет, г. Тверь
** Кафедра математического анализа

Поступила в редакцию 04.08.2016, после переработки 15.09.2016.

Предложена упрощенная квазигидродинамическая система для медленных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа. Для нее выведено уравнение баланса энтропии и доказана теорема о возрастании полной энтропии. Барометрическая формула Лапласа получена как следствие указанной системы.

Ключевые слова: квазигидродинамические уравнения, медленные течения газа, уравнение баланса энтропии, барометрическая формула.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 3. С. 5-17.

Введение

Для описания течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа широко использовалась полная система Навье–Стокса [1]. Эта система может быть получена из уравнения Больцмана методами теории возмущений по малому числу Кнудсена Kn. Если $Kn \in [0.1, 1]$, то применение формальных асимптотических процедур неправомерно. В этом случае решения уравнений Навье–Стокса могут заметно отклоняться от экспериментальных данных. Появилась необходимость развития новых подходов.

Феноменологические выводы альтернативных математических моделей изложены в [2–4]. Одна из них получила название квазигидродинамической (КГД) системы уравнений. Теоретический анализ полной КГД системы был продолжен в [5–8]. Выявлены ее глубокие связи с классической системой Навье–Стокса.

На основе квазигидродинамических уравнений строились вычислительные алгоритмы решения системы Эйлера, как с применением стандартных дискретизаций [9], так и с расширенными свойствами консервативности [10]. КГД система использовалась также в качестве математической модели расчета двумерных и трехмерных газодинамических течений при малых числах Маха [11, 12].

В настоящей работе предложена упрощенная квазигидродинамическая система для медленных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа. Для нее выведено уравнение баланса энтропии и доказана теорема о возрастании полной энтропии. Вопросы построения математических моделей газовой динамики с модифицированным уравнением неразрывности обсуждались в [13–16].

1. Полная квазигидродинамическая система

Квазигидродинамическая система, описывающая неустановившиеся течения сжимаемого вязкого теплопроводного газа, может быть записана в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\ \big(\rho(\vec{u} - \vec{w})\big) = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \mathrm{div}\ \big(\rho(\vec{u} - \vec{w}) \otimes \vec{u}\big) + \nabla p = \rho \vec{F} + \mathrm{div}\ \Pi, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big[\rho\Big(\frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon\Big)\Big] + \mathrm{div}\ \Big[\rho(\vec{u} - \vec{w})\Big(\frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon\Big) + p(\vec{u} - \vec{w})\Big] + \mathrm{div}\ \vec{q} = \\ = \rho\big(\vec{F} \cdot (\vec{u} - \vec{w})\big) + \mathrm{div}\ (\Pi \cdot \vec{u}). \tag{1.3}$$

Заданная вектор–функция $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x})$ – массовая плотность внешних сил. Величины Π и $\vec{q}$, интерпретируемые как тензор вязких напряжений и вектор теплового потока соответственно, а также вектор $\vec{w}$, вычисляются по формулам

$$\Pi = \Pi_{NS} + \rho \vec{u} \otimes \vec{w}, \tag{1.4}$$

$$\vec{q} = -æ \nabla T, \tag{1.5}$$

$$\vec{w} = \frac{\tau}{\rho}\big(\rho(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \nabla p - \rho \vec{F}\big). \tag{1.6}$$

Символом Π_{NS} обозначен навье–стоксовский тензор вязких напряжений:

$$\Pi_{NS} = \eta\Big((\nabla \otimes \vec{u}) + (\nabla \otimes \vec{u})^T - \frac{2}{3}\ I\ \mathrm{div}\ \vec{u}\Big). \tag{1.7}$$

Здесь I – единичный тензор-инвариант второго ранга. Вектор плотности потока массы в рассматриваемой модели определяется с помощью выражения

$$\vec{j}_m = \rho(\vec{u} - \vec{w}). \tag{1.8}$$

Будем считать, что сплошная среда представляет собой одноатомный совершенный (идеальный и политропный) газ. В этом случае к системе необходимо добавить уравнения состояния

$$p = \rho \mathrm{R} T, \qquad \varepsilon = c_v T. \tag{1.9}$$

Здесь R – газовая постоянная, c_v – удельная теплоемкость при постоянном объеме. Удельная внутренняя энергия ε является линейной функцией температуры T. Зависимость $\eta = \eta(T)$ коэффициента динамической вязкости от температуры выберем в виде

$$\eta = \eta_0\Big(\frac{T}{T_0}\Big)^{\omega}, \tag{1.10}$$

где η_0 – известное значение η при температуре T_0, ω – заданное число из промежутка $[0.5,\ 1]$. Коэффициент теплопроводности æ определяется с помощью выражения

$$æ = \frac{c_p \eta}{Pr}. \tag{1.11}$$

Символом c_p обозначена удельная теплоемкость при постоянном давлении p, Pr – число Прандтля. Релаксационный параметр τ, имеющий размерность времени, может быть вычислен следующим образом:

$$\tau = \frac{\eta}{p\ Sc}. \tag{1.12}$$

Здесь Sc – число Шмидта.

Квазигидродинамическая система (1.1) – (1.3), дополненная выражениями (1.4) – (1.12), замкнута относительно неизвестных функций – скорости $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$, плотности $\rho = \rho(\vec{x}, t) > 0$ и температуры $T = T(\vec{x}, t) > 0$. Для одноатомного газа твердых шаров при нормальных условиях $\omega = 0.5$, $\gamma = c_p/c_v = 5/3$, $Pr = 2/3$, $Sc = 3/4$. Если таким газом является гелий, то $\mathrm{R} = 2.0785 \cdot 10^3$ Дж/(кг $\cdot$ К).

2. Уравнение баланса энтропии. Закон возрастания энтропии

Пусть V – ограниченная область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3_{\vec{x}}$ с кусочно-гладкой границей ∂V, $\overline{V} = V \cup \partial V$ – ее замыкание, $\vec{n} = \vec{n}(\vec{x})$ – вектор внешней единичной нормали к ∂V в точке $\vec{x} \in \partial V$, $Q = V \times [0,\ T_f]$ – ограниченный цилиндр в $\mathbb{R}^3_{\vec{x}} \times \mathbb{R}_t$, $\overline{Q} = \overline{V} \times [0,\ T_f]$ – его замыкание, T_f – фиксированное положительное число. Параметр $t \in [0,\ T_f]$ интерпретируется как время. Добавим к системе (1.1) – (1.3) начальные условия

$$\vec{u}\Big|_{t=0} = \vec{u}_0(\vec{x}), \quad \rho\Big|_{t=0} = \rho_0(\vec{x}), \quad T\Big|_{t=0} = T_0(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \overline{V}, \tag{2.1}$$

а также граничные условия

$$\vec{u}\Big|_{\partial V} = 0, \quad (\vec{w} \cdot \vec{n})\Big|_{\partial V} = 0, \quad (\vec{q} \cdot \vec{n})\Big|_{\partial V} = 0, \quad t \in [0,\ T_f]. \tag{2.2}$$

Здесь $\vec{u}_0(\vec{x}) \in \mathbf{C}^2(V) \cap \mathbf{C}^1(\overline{V})$, $\rho_0(\vec{x}) \in C^2(V) \cap C^1(\overline{V})$ и $T_0(\vec{x}) \in C^2(V) \cap C^1(\overline{V})$ – заданные функции. Поле $\vec{u}_0(\vec{x})$ обращается в нуль на ∂V, $\rho_0(\vec{x}) > 0$ и $T_0(\vec{x}) > 0$ для всех $\vec{x} \in \overline{V}$. Равенства (2.2) означают, что газ прилипает к неподвижной границе полости ∂V. Кроме того, отсутствуют потоки массы и тепла через ∂V.

Символом $C^{2\alpha,\alpha}_{\vec{x},\ t}(Q)$, где α – натуральное число, обозначим класс непрерывных в Q функций $f = f(\vec{x}, t)$, имеющих непрерывные в Q частные производные

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\beta} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3} \partial t^{\beta}}$$

для любых целых и неотрицательных чисел α_1, α_2, α_3 и β, подчиняющихся неравенству $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\beta \leqslant 2\alpha$. Класс $\mathbf{C}^{2\alpha,\alpha}_{\vec{x},\ t}(Q)$ состоит из вектор–функций $\vec{f} = \vec{f}(\vec{x}, t) = (f_1(\vec{x}, t), f_2(\vec{x}, t), f_3(\vec{x}, t))$, каждая компонента f_i которых принадлежит $C^{2\alpha,\alpha}_{\vec{x},\ t}(Q)$.

Символом $C^{\alpha,0}_{\vec{x},t}(Q)$, где α – натуральное число, обозначим множество всех непрерывных в Q функций $f = f(\vec{x},t)$, у которых существуют непрерывные в Q производные

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}}$$

при любых целых неотрицательных α_1, α_2, α_3, таких, что $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \leqslant \alpha$.

Определение 1. *Классическим решением начально–краевой задачи* (1.1) – (1.3), (2.1) – (2.2) *назовем функцию* $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}) \in \boldsymbol{C}^{2,1}_{\vec{x},t}(Q)\cap \boldsymbol{C}^1(\overline{Q})$, *а также положительные в* $\overline{Q}$ *функции* $\rho = \rho(\vec{x}) \in C^{2,1}_{\vec{x},t}(Q) \cap C^1(\overline{Q})$ *и* $T = T(\vec{x}) \in C^{2,1}_{\vec{x},t}(Q) \cap C^1(\overline{Q})$, *удовлетворяющие при всех* $(\vec{x},t) \in Q$ *уравнениям* (1.1) – (1.3), *а также условиям* (2.1) – (2.2).

Опишем свойства классического решения, предполагая, что оно существует. Определим удельную энтропию совершенного газа по формуле

$$s = c_v \ln\Big(\frac{\mathrm{R}T}{\rho^{\gamma-1}}\Big) + s_0, \tag{2.3}$$

где s_0 – заданная постоянная. Для энтропии (2.3) выполняется тождество Гиббса

$$T ds = d\varepsilon + pd\Big(\frac{1}{\rho}\Big). \tag{2.4}$$

Теорема 1. *На любом классическом решении начально-краевой задачи* (1.1) – (1.3), (2.1) – (2.2) *при всех* $(\vec{x},t) \in Q$ *выполняется уравнение баланса энтропии*

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + div\,\big(\rho(\vec{u}-\vec{w})s\big) = -div\,\Big(\frac{\vec{q}}{T}\Big) + X.$$

Здесь

$$X = \frac{1}{æ}\Big(\frac{\vec{q}}{T}\Big)^2 + \frac{\Phi}{T}$$

– неотрицательное производство энтропии, в котором

$$\Phi = \frac{(\Pi_{NS} : \Pi_{NS})}{2\eta} + \frac{\rho\vec{w}^2}{\tau}$$

– диссипативная функция. Символом $(\Pi_{NS} : \Pi_{NS})$ *обозначено двойное скалярное произведение одинаковых тензоров.*

На решении поставленной начально–краевой задачи определим полную термодинамическую энтропию газа в объеме:

$$S(t) = \int\limits_V \rho s\, dV, \quad t \in [0,\ T_f]. \tag{2.5}$$

Теорема 2. *Пусть* $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x},t)$, $\rho = \rho(\vec{x},t)$, $T = T(\vec{x},t)$ *– классическое решение поставленной начально-краевой задачи. Тогда полная энтропия* $S(t)$ *является функцией класса* $C^1([0,T_f])$ *и при каждом* $t \in [0,T_f]$ *выполняется неравенство*

$$\frac{dS(t)}{dt} \geqslant 0.$$

Полная энтропия $S(t)$ *возрастает на промежутке* $[0,\ T_f]$.

Доказательства теорем приведены в [5]. Таким образом, полная квазигидродинамическая система является термодинамически согласованной. Кроме того, она обладает дополнительным законом сохранения момента импульса [4].

3. Упрощенная квазигидродинамическая система для медленных течений газа и ее термодинамические свойства

Рассмотрим следующий упрощенный вариант квазигидродинамической системы для описания медленных течений газа:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\ \big(\rho(\vec{u} - \vec{w})\big) = 0, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \mathrm{div}\ \big(\rho(\vec{u} - \vec{w}) \otimes \vec{u}\big) + \nabla p = \rho \vec{F} + \mathrm{div}\ \Pi, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big[\rho\Big(\frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon\Big)\Big] + \mathrm{div}\ \Big[\rho(\vec{u} - \vec{w})\Big(\frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon\Big) + p(\vec{u} - \vec{w})\Big] + \mathrm{div}\ \vec{q} =$$

$$= \rho\big(\vec{F} \cdot (\vec{u} - \vec{w})\big) + \mathrm{div}\ (\Pi \cdot \vec{u}). \tag{3.3}$$

Здесь

$$\Pi = \Pi_{NS}, \tag{3.4}$$

$$\vec{q} = -æ\nabla T, \tag{3.5}$$

$$\vec{w} = \frac{\tau}{\rho}\big(\nabla p - \rho \vec{F}\big). \tag{3.6}$$

Дополним систему уравнениями состояния (1.9), а также соотношениями (1.10) – (1.12). Формулы (1.5) и (3.5) идентичны. Отбросив в правой части (1.4) малое слагаемое $\rho \vec{u} \otimes \vec{w}$, получим (3.4). Пренебрегая в (1.6) членом $\tau(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$, который также мал, приходим к (3.6).

Покажем, что система (3.1) – (3.3) также является термодинамически согласованной и для нее может быть выведено соответствующее уравнение баланса энтропии. Присоединим к (3.1) – (3.3) начальные условия (2.1) и граничные условия (2.2).

Теорема 3. *На любом классическом решении начально-краевой задачи* (3.1) – (3.3), (2.1) – (2.2) *при всех* $(\vec{x}, t) \in Q$ *выполняется уравнение баланса энтропии*

$$\frac{\partial (\rho s)}{\partial t} + div\ \big(\rho(\vec{u} - \vec{w})s\big) = -div\ \Big(\frac{\vec{q}}{T}\Big) + X. \tag{3.7}$$

Здесь

$$X = \frac{1}{æ}\Big(\frac{\vec{q}}{T}\Big)^2 + \frac{\varPhi}{T} \tag{3.8}$$

– неотрицательное производство энтропии, в котором

$$\varPhi = \frac{(\Pi_{NS} : \Pi_{NS})}{2\eta} + \frac{\rho \vec{w}^2}{\tau} \tag{3.9}$$

– диссипативная функция. Символом $(\Pi_{NS} : \Pi_{NS})$ *обозначено двойное скалярное произведение одинаковых тензоров.*

Доказательство. Пусть выполнены соотношения (3.4) – (3.6). Запишем (3.1) – (3.3) в недивергентной форме

$$D\rho + \rho \mathrm{div}\ (\vec{u} - \vec{w}) = 0, \tag{3.10}$$

$$\rho D\vec{u} + \nabla p = \rho \vec{F} + \mathrm{div}\ \Pi, \tag{3.11}$$

$$\rho D\Big(\frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon\Big) + \mathrm{div}\ \big(p(\vec{u} - \vec{w})\big) = \rho\big(\vec{F} \cdot (\vec{u} - \vec{w})\big) + \mathrm{div}\ (\Pi \cdot \vec{u}) - \mathrm{div}\ \vec{q}. \tag{3.12}$$

Здесь

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u} - \vec{w}) \cdot \nabla$$

– дифференциальный оператор. Приведем (3.10) к эквивалентному виду

$$\rho D\Big(\frac{1}{\rho}\Big) = \mathrm{div}\ (\vec{u} - \vec{w}). \tag{3.13}$$

Умножим (3.11) скалярно на вектор $\vec{u}$. Это дает

$$\rho\big(\vec{u} \cdot D\vec{u}\big) + (\vec{u} \cdot \nabla p) = \rho(\vec{u} \cdot \vec{F}) + \big(\vec{u} \cdot \mathrm{div}\ \Pi\big). \tag{3.14}$$

Преобразуем все члены, входящие в (3.14). Будем иметь

$$\rho\big(\vec{u} \cdot D\vec{u}\big) = \rho D\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}\Big), \tag{3.15}$$

$$(\vec{u} \cdot \nabla p) = \big((\vec{u} - \vec{w}) \cdot \nabla p\big) + (\vec{w} \cdot \nabla p) =$$

$$+\mathrm{div}\ \big(p(\vec{u} - \vec{w})\big) - p\ \mathrm{div}\ (\vec{u} - \vec{w}) + (\vec{w} \cdot \nabla p), \tag{3.16}$$

$$\rho(\vec{u} \cdot \vec{F}) = \rho\big(\vec{F} \cdot (\vec{u} - \vec{w})\big) + \rho(\vec{w} \cdot \vec{F}), \tag{3.17}$$

$$\big(\vec{u} \cdot\ \mathrm{div}\ \Pi\big) = \sum_{i=1}^{3}\ u_i\ \sum_{j=1}^{3}\ \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} = \sum_{i,j=1}^{3}\ u_i\ \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{3}\ \frac{\partial}{\partial x_j}(\Pi_{ij} u_i) - \sum_{i,j=1}^{3}\ \Pi_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\ \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\sum_{i=1}^{3}\ \Pi_{ij} u_i\Big) - \frac{1}{2}\ \sum_{i,j=1}^{3}\ \Pi_{ij}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big) =$$

$$=\ \mathrm{div}\ (\Pi \cdot \vec{u}) - \frac{1}{2}\ \sum_{i,j=1}^{3}\ \Pi_{ij}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\ \mathrm{div}\ \vec{u}\Big) =$$

$$=\ \mathrm{div}\ \big(\Pi \cdot \vec{u}\big) - \frac{(\Pi : \Pi)}{2\eta}. \tag{3.18}$$

Здесь $\vec{u}^2 = (\vec{u} \cdot \vec{u}) = |\vec{u}|^2$. Символом δ_{ij} обозначен символ Кронекера. Учтено, что матрица Π_{ij} является симметрической и имеет нулевой след. Подстановка (3.15) – (3.18) в (3.14) дает

$$\rho D\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}\Big) + \mathrm{div}\ \big(p(\vec{u}-\vec{w})\big) - p\ \mathrm{div}\ (\vec{u}-\vec{w}) =$$

$$= \rho\big(\vec{F}\cdot(\vec{u}-\vec{w})\big) + \ \mathrm{div}\ \big(\Pi\cdot\vec{u}\big) - \frac{(\Pi:\Pi)}{2\eta} - \big(\vec{w}\cdot(\nabla p - \rho\vec{F})\big). \tag{3.19}$$

С помощью (3.6) соотношение (3.19) можно записать в виде

$$\rho D\Big(\frac{\vec{u}^2}{2}\Big) + \mathrm{div}\ \big(p(\vec{u}-\vec{w})\big) - p\ \mathrm{div}\ (\vec{u}-\vec{w}) =$$

$$= \rho\big(\vec{F}\cdot(\vec{u}-\vec{w})\big) + \ \mathrm{div}\ \big(\Pi\cdot\vec{u}\big) - \frac{(\Pi:\Pi)}{2\eta} - \frac{\rho\vec{w}^2}{\tau}. \tag{3.20}$$

Из (3.12) вычтем (3.20). Принимая во внимание (3.4) и (3.9), получим

$$\rho D\varepsilon + p\ \mathrm{div}\ (\vec{u}-\vec{w}) = \varPhi - \mathrm{div}\ \vec{q}. \tag{3.21}$$

Подстановка (3.13) в (3.21) приводит к соотношению

$$\rho\Big[D\varepsilon + pD\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big] = \varPhi - \mathrm{div}\ \vec{q}. \tag{3.22}$$

Следствием (2.4) является формула

$$TDs = D\varepsilon + pD\Big(\frac{1}{\rho}\Big). \tag{3.23}$$

Из (3.22) и (3.23) выводим равенство

$$\rho TDs = \varPhi - \mathrm{div}\ \vec{q},$$

которое представим в эквивалентной форме

$$\rho\Big(\frac{\partial s}{\partial t} + (\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla s\Big) = \frac{\varPhi}{T} - \frac{\vec{q}\cdot\nabla T}{T^2} - \mathrm{div}\ \Big(\frac{\vec{q}}{T}\Big). \tag{3.24}$$

Умножив (3.1) на s, будем иметь

$$s\ \frac{\partial\rho}{\partial t} + s\ \mathrm{div}\ \big(\rho(\vec{u}-\vec{w})\big) = 0. \tag{3.25}$$

Складывая (3.24) и (3.25), находим

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \mathrm{div}\ \big(\rho(\vec{u}-\vec{w})s\big) = \frac{\varPhi}{T} - \frac{\vec{q}\cdot\nabla T}{T^2} - \mathrm{div}\ \Big(\frac{\vec{q}}{T}\Big). \tag{3.26}$$

Принимая во внимание (3.4), (3.5) и (3.8), формулу (3.26) можно переписать в виде (3.7). □

На решении поставленной начально–краевой задачи определим полную энтропию газа по формуле (2.5).

Теорема 4. *Пусть* $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$, $\rho = \rho(\vec{x}, t)$, $T = T(\vec{x}, t)$ *– классическое решение начально-краевой задачи* (3.1) – (3.3), (2.1) – (2.2). *Тогда полная энтропия* $S(t)$ *является функцией класса* $C^1([0, T_f])$ *и при каждом* $t \in [0, T_f]$ *выполняется неравенство*

$$\frac{dS(t)}{dt} \geqslant 0. \tag{3.27}$$

Полная энтропия $S(t)$ *возрастает на промежутке* $[0,\ T_f]$.

Доказательство. Пусть $(\vec{u}, \rho, T)$ – решение начально–краевой задачи (3.1) – (3.3), (2.1) – (2.2). Подставив его в (3.7), проинтегрируем полученное равенство по области V. Принимая во внимание правило Лейбница и формулу Гаусса–Остроградского (см., например, [5], с. 22), будем иметь

$$\frac{dS(t)}{dt} + \iint\limits_{\partial V} \rho\big((\vec{u} - \vec{w}) \cdot \vec{n}\big)\ dS = -\iint\limits_{\partial V} \frac{(\vec{q} \cdot \vec{n})}{T}\ dS + \int\limits_{V} X\ dV. \tag{3.28}$$

Кроме того, $S(t) \in C^1([0, T_f])$. В силу первых двух условий (2.2) поверхностный интеграл второго рода в левой части (3.28) обращается в нуль. Поэтому

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\iint\limits_{\partial V} \frac{(\vec{q} \cdot \vec{n})}{T}\ dS + \int\limits_{V} X\ dV. \tag{3.29}$$

Последнее слагаемое в правой части (3.29) неотрицательно. Приходим к неравенству Клаузиуса–Дюгема

$$\frac{dS(t)}{dt} \geqslant -\iint\limits_{\partial V} \frac{(\vec{q} \cdot \vec{n})}{T}\ dS. \tag{3.30}$$

Учтем последнее из условий (2.2), выражающее отсутствие теплового потока через границу ∂V. Тогда

$$\iint\limits_{\partial V} \frac{(\vec{q} \cdot \vec{n})}{T}\ dS = 0.$$

Из (3.30) получаем неравенство (3.27). □

4. Уравнения статики. Барометрическая формула Лапласа

Пусть совершенный газ находится в поле тяжести Земли в состоянии равновесия. Тогда его макроскопическая скорость $\vec{u}$ равна нулю, а термодинамические параметры не зависят от времени. В этом случае $\vec{F} = \vec{g}$, где $\vec{g}$ – ускорение свободного падения, и система (3.1) – (3.3) принимает вид

$$\mathrm{div}\ \tau(\nabla p - \rho\vec{g}) = 0, \tag{4.1}$$

$$\nabla p = \rho \vec{g}, \tag{4.2}$$

$$\mathrm{div}\,\bigl(\text{æ}\nabla T\bigr) + \mathrm{div}\,\tau\Bigl[\Bigl(\varepsilon + \frac{p}{\rho}\Bigr)(\nabla p - \rho\vec{g})\Bigr] = \tau\vec{g}\cdot(\nabla p - \rho\vec{g}). \tag{4.3}$$

Классические уравнения статики

$$\nabla p = \rho \vec{g}, \tag{4.4}$$

$$\mathrm{div}\,\bigl(\text{æ}\nabla T\bigr) = 0 \tag{4.5}$$

непосредственно следуют из (4.1) – (4.3).

Выберем правую декартову систему координат, ось oz которой направлена вертикально вверх, а плоскость xoy касается поверхности Земли. Пусть функция $T = T(z)$ удовлетворяет уравнению (4.5). Если $p = p(z)$, то (4.4) можно записать следующим образом:

$$\frac{dp(z)}{dz} = -\rho g. \tag{4.6}$$

Здесь $g = |\vec{g}|$ – константа Галилея. С помощью уравнения Менделеева–Клапейрона $p = \rho \mathrm{R} T$ преобразуем (4.6) к виду

$$\frac{1}{p}\frac{dp(z)}{dz} = -\frac{g}{\mathrm{R}T(z)}. \tag{4.7}$$

Интегрирование (4.7) по переменной z приводит к хорошо известной барометрической формуле

$$p(z) = p(0)\exp\Bigl(-\frac{g}{\mathrm{R}}\int\limits_0^z \frac{dz_*}{T(z_*)}\Bigr), \tag{4.8}$$

полученной Лапласом и определяющей уменьшение гидростатического давления с ростом высоты. Закон (4.8) справедлив как в изотермическом, так и в неизотермическом случае.

Заключение

Упрощенная квазигидродинамическая система может использоваться в качестве математической модели медленных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа. Кроме того, на ее основе можно строить разностные схемы решения классической системы Навье–Стокса с расширенными свойствами консервативности. Для выяснения границ применимости предложенной модели необходимы дополнительные исследования.

Список литературы

[1] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.

[2] Шеретов Ю.В. Квазигидродинамические уравнения как модель течений сжимаемой вязкой теплопроводной среды // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Тверской гос. ун–т, 1997. С. 127–155.

[3] Шеретов Ю.В. Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений. Тверь: Тверской гос. ун–т, 2000. 235 с.

[4] Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 400 с.

[5] Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской гос. ун–т, 2016. 222 с.

[6] Григорьева В.В., Шеретов Ю.В. О точных решениях полных квазигидродинамических уравнений для стационарных течений // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 1. С. 93–101.

[7] Злотник А.А. О параболичности квазигидродинамической системы и устойчивости малых возмущений для нее // Математические заметки. 2008. Т. 83, № 5. С. 667–682.

[8] Злотник А.А., Гаврилин В.А. О критериях параболичности квазигидродинамической системы уравнений в случае реального газа // Вестник Московского энергетического института. 2009. № 6. С. 116–126.

[9] Елизарова Т.Г., Булатов О.В. Численное моделирование течений газа на основе квазигидродинамических уравнений // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия. 2009. № 6. С. 29–33.

[10] Злотник А.А., Гаврилин В.А. О дискретизации одномерной квазигидродинамической системы уравнений для реального газа // Вестник МЭИ. 2016. № 1. С. 5–14.

[11] Балашов В.А., Савенков Е.Б. Численное исследование квазигидродинамической системы уравнений для расчета течений при малых числах Маха // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55, № 10. С. 1773–1782.

[12] Балашов В.А., Савенков Е.Б. Применение квазигидродинамической системы уравнений для прямого моделирования течений в образцах керна // Доклады Академии наук. 2016. Т. 467, № 5. С. 534–536.

[13] Климонтович Ю.Л. О необходимости и возможности единого описания кинетических и гидродинамических процессов // Теоретическая и математическая физика. 1992. Т. 92, № 2. С. 312–330.

[14] Brenner H. Fluid mechanics revisited // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2006. Vol. 370. P. 190–224.

[15] Brenner H. Fluid mechanics in fluids at rest // Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. 2012. Vol. 86, № 1. Pp. 016307.

[16] Sambasivam R. Extended Navier–Stokes Equations: Derivations and Applications to Fluid Flow Problems. PhD Thesis. Erlangen, 2013. 217 p.

Библиографическая ссылка

Григорьева В.В., Шеретов Ю.В. Упрощенная квазигидродинамическая модель медленных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 3. С. 5-17.

Сведения об авторах

1. **Григорьева Вера Владимировна**
доцент кафедры высшей математики Тверского государственного технического университета.

Россия, 170026, г. Тверь, наб. А. Никитина, 22, ТвГТУ. E-mail: pontida@list.ru

2. **Шеретов Юрий Владимирович**
заведующий кафедрой математического анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, 33, ТвГУ.
E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

SIMPLIFIED QUASI–HYDRODYNAMIC MODEL FOR SLOW FLOWS OF COMPRESSIBLE VISCOUS HEAT CONDUCTING GAS

Grigoryeva Vera Vladimirovna
Associate professor at Higher Mathematics department,
Tver State Technical University
Russia, 170026, Tver, 22 A. Nikitin emb., TvSTU. E-mail: pontida@list.ru

Sheretov Yurii Vladimirovich
Head of Mathematical Analysis department, Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabov st., TvSU. E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

Received 04.08.2016, revised 15.09.2016.

Simplified quasi–hydrodynamic system for slow flows of compressible viscous heat conducting gas is proposed. For it the entropy balance equation is derived and theorem on the increasing of full entropy is proved. Laplace barometric formula is obtained as a consequence of pointed system.

Keywords: quasi–hydrodynamic equations, slow gas flows, entropy balance equation, barometric formula.

Bibliographic citation

Grigoryeva V.V., Sheretov Yu.V. Simplified quasi–hydrodynamic model for slow flows of compressible viscous heat conducting gas. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2016, no. 3, pp. 5-17. (in Russian)

References

[1] Loytsyansky L.G. *Mekhanika Zhidkosti i Gaza* [Fluid and Gas Mechanics]. “Nauka” Publ., Moscow, 1987. 840 p. (in Russian)

[2] Sheretov Yu.V. Quasi–hydrodynamic equations as a model of viscous heat conducting medium flows. In: *Primemenie Funktsionalnogo Analiza v Teorii Priblizhenii* [Application of Functional Analysis in the Theory of Approximations]. Tver State University, Tver, 1997. Pp. 127–155. (in Russian)

[3] Sheretov Yu.V. *Matematicheskoe Modelirovanie Techenii Zhidkosti i Gaza na Osnove Kvazigidrodinamicheskikh i Kvazigazodinamicheskikh Uravnenii* [Mathematical Modeling of Fluid and Gas Flows on the Base of Quasi–hydrodynamic and Quasi–gas–dynamic Equations]. Tver State University, Tver, 2000. 235 p. (in Russian)

[4] Sheretov Yu.V. *Dinamika Sploshnykh Sred pri Prostranstvenno–Vremennom Osrednenii* [Continuum Dynamics under Spatiotemporal Averaging]. "Regular and Chaotic Dynamics" Publ., Moscow, Izhevsk, 2009. 400 p. (in Russian)

[5] Sheretov Yu.V. *Regulyarizovannye Uravneniya Gidrodinamiki* [Regularized Hydrodynamic Equations]. Tver State University, Tver, 2016. 222 p. (in Russian)

[6] Grigoryeva V.V., Sheretov Yu.V. On the exact solutions of full quasi–hydrodynamic equations for stationary flows. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2016, no. 1, pp. 93–101. (in Russian)

[7] Zlotnik A.A. Parabolicity of a quasi–hydrodynamic system of equations and the stability of its small perturbations. *Mathematical Notes*, 2008, vol. 83 (5–6), pp. 610–623.

[8] Zlotnik A.A., Gavrilin V.A. On the parabolicity criteria of quasi-hydrodynamic system in the case of real gas. *Vestnik Moskovskogo Energeticheskogo Instituta* [Herald of Moscow Power Engineering Institute], 2009, no. 6, pp. 116–126. (in Russian)

[9] Elizarova T.G., Bulatov O.V. Numerical simulation of gas flows on the basis of quasi–hydrodynamic equations. *Moscow University Physics Bulletin*, 2009, vol. 64 (6), pp. 589–593.

[10] Zlotnik A.A., Gavrilin V.A. On the discretization of one-dimensional quasi–hydrodynamic system of equations for real gas. *Vestnik Moskovskogo Energeticheskogo Instituta* [Herald of Moscow Power Engineering Institute], 2016, no. 1, pp. 5–14. (in Russian)

[11] Balashov V.A., Savenkov E.B. Numerical study of a quasi–hydrodynamic system of equations for flow computation at small mach numbers. *Computational Mathematics and Mathematical Physics.*, 2015, vol. 55 (10), pp. 1773–1782.

[12] Balashov V.A., Savenkov E.B. Direct pore–scale flow simulation using quasi-hydrodynamic equations. *Doklady Physics*, 2016, vol. 61 (4), pp. 192–194.

[13] Klimontovich Yu.L. On the need for and the possibility of a unified description of kinetic and hydrodynamic processes. *Theoretical and Mathematical Physics*, 1992, vol. 92 (2), pp. 909–921.

[14] Brenner H. Fluid mechanics revisited. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2006, vol. 370, pp. 190–224.

[15] Brenner H. Fluid mechanics in fluids at rest. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 2012, vol. 86 (1), pp. 016307.

[16] Sambasivam R. *Extended Navier–Stokes Equations: Derivations and Applications to Fluid Flow Problems*. PhD Thesis, Erlangen, 2013. 217 p.