УДК 517.94

О СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ ДЛЯ СИСТЕМЫ СТОКСА

Захарова И.В.
Кафедра математической статистики и системного анализа

Поступила в редакцию 19.02.2016, после переработки 01.08.2016.

Статья посвящена исследованию стационарной трехмерной задачи об обтекании ограниченного тела потоком вязкой несжимаемой жидкости. Выбрана шкала функциональных пространств, которым принадлежат физически реализуемые решения задачи. Задача рассмотрена в линеаризованной постановке для случая, когда скорость потока стремится к нулю на бесконечности. Определен класс функций правой части уравнения движения жидкости, удовлетворяющих условию существования решения задачи, приведены примеры.

Ключевые слова: внешняя задача Стокса, неньютоновские жидкости, сферические функции, условие согласования, полиномы Лежандра.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 3. С. 35-46.

Введение

В гидродинамике можно выделить два класса задач – задачи для ограниченных областей (внутренние задачи) и задачи обтекания (внешние задачи). Анализ внутренних задач для класса неньютоновских жидкостей наиболее подробно изложен в [1]. Основное внимание В.Г. Литвинов уделял вопросу постановки и решения стационарных и нестационарных задач, связанных со сложными течениями нелинейно-вязких жидкостей. При этом теоремы существования и единственности лежат в основе построения приближенных решений соответствующих задач. Эти теоремы совместно с результатами по аппроксимации позволяют правильно выбирать конечномерные подпространства, в которых отыскиваются приближенные решения, и эффективно получать последние.

Математическая теория внешних задач даст возможность получить качественное и количественное описание явлений, наблюдающихся в разного рода технологических процессах. Указанная теория является базой для построения численных методов решения задач обтекания, которые в свою очередь служат инструментом решения ряда инженерных и технологических проблем.

Математическое изучение потока вязких несжимаемых жидкостей около трехмерного препятствия было предметом исследования многих работ. Р.Финном были введены так называемые PR-решения (физически осмысленные) [2].

В работах [3, 4] исследуется движение внешнего стационарного потока неньютоновской жидкости. Выбрана шкала функциональных пространств, в которых установлена разрешимость краевой задачи для системы дифференциальных уравнений, описывающей движение потока, получены оценки в соответствующих нормах. Решение получено методом последовательных приближений на основе теорем о разрешимости внешней стационарной задачи для классической системы Навье–Стокса. Одним из условий существования решения является выполнение условия согласования.

В данной работе будем искать решения краевой задачи Стокса, обладающие определенными свойствами на бесконечности. Приведем примеры функций в правой части уравнения движения, удовлетворяющих сформулированным условиям.

1. Постановка задачи

Рассмотрим краевую задачу Стокса в области Ω:

$$-\nu\Delta\bar{v} + \nabla p = \bar{f}, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \bar{v} = g, \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$\bar{v} = \bar{h}, \quad x \in \partial\Omega, \tag{3}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} \bar{v}(x) = 0, \tag{4}$$

где Δ – оператор Лапласа,∇ – оператор Гамильтона, Ω – внешняя область из $\mathbb{R}^3$, то есть $\Omega = \mathbb{R}^3 \backslash \bar{G}$, где G – связанное, открытое, ограниченное множество. Предположим, что граница $\partial\Omega$ – гладкая, двумерная, ограниченная область.

Движение жидкости характеризуется вектор-функцией скорости $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ и давлением p, коэффициент вязкости жидкости ν считается заданной положительной константой.

Заданная вектор-функция $\bar{f}(x) = (f_1, f_2, f_3)$ из $\mathbb{R}^3$ характеризует силу, действующую на жидкость, $\bar{h} = (h_1, h_2, h_3)$ – векторная функция из $\mathbb{R}^3$, g – скалярная функция.

2. Основные определения

Определение 1. *Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^3$. Пусть $\beta \in \mathbb{R}^1, l$ – целое, неотрицательное число.*

$V^l_\beta(\Omega)$ – весовое пространство измеримых на Ω функций, имеющих все обобщенные производные вплоть до порядка l включительно, интегрируемых с квадратом, для которых конечны интегралы

$$\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^{l} (1+r)^{2(\beta-l+|\alpha|)} |D^\alpha z|^2 \, dx$$

и норма в котором определяется следующим образом:

$$\|z, V^l_\beta(\Omega)\| = \left(\sum_{|\alpha|=0}^{l} \left\| (1+r)^{\beta-l+|\alpha|} D^\alpha z; L^2(\Omega) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

то есть
$$\|z,V^l_\beta(\Omega)\| = \left(\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^{l}(1+r)^{2(\beta-l+|\alpha|)}|D^\alpha z|^2\,dx\right)^{\frac12},$$

где $r=|x|,\quad |x|=\left(\sum\limits_{i=1}^{3}x_i^2\right)^{\frac12}$.

Определение 2. *Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^3$. Пусть $\beta\in\mathbb{R}^1, l$ – целое, неотрицательное число.*

$D^l_\beta V(\Omega)$ *– пространство пар $(\bar v,p)$, где $\bar v=(v_1,v_2,v_3),\ v_i\in V^{l+1}_\beta(\Omega),\ p\in V^l_\beta(\Omega)$.*

$$\left\|(\bar v,p);D^l_\beta V(\Omega)\right\| = \left\|v_1;V^{l+1}_\beta(\Omega)\right\|+\left\|v_2;V^{l+1}_\beta(\Omega)\right\|+\left\|v_3;V^{l+1}_\beta(\Omega)\right\|+\|p;V^l_\beta(\Omega)\|,$$

то есть
$$\left\|(\bar v,p);D^l_\beta V(\Omega)\right\| = \left(\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^{l+1}(1+r)^{2(\beta-l-1+|\alpha|)}|D^\alpha v_1|^2\,dx\right)^{\frac12}+$$
$$+\left(\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^{l+1}(1+r)^{2(\beta-l-1+|\alpha|)}|D^\alpha v_2|^2\,dx\right)^{\frac12}+$$
$$+\left(\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^{l+1}(1+)^{2(\beta-l-1+|\alpha|)}|D^\alpha v_3|^2\,dx\right)^{\frac12}+\left(\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^{l}(1+r)^{2(\beta-l+|\alpha|)}|D^\alpha p|^2\,dx\right)^{\frac12}.$$

Определение 3. *Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^3$.*

Пусть $\beta\in\mathbb{R}^1, l$ – целое неотрицательное число.

Обозначим через $R^l_\beta V(\Omega,\partial\Omega)\equiv V^{l-1}_\beta(\Omega)^3\times V^l_\beta(\Omega)\times H^{l+\frac12}(\partial\Omega)$, где

$$\left\|(\bar f,g,\bar h);R^l_\beta V(\Omega,\partial\Omega)\right\| = \left\|f_1;V^{l-1}_\beta(\Omega)\right\|+\left\|f_2;V^{l-1}_\beta(\Omega)\right\|+\left\|f_3;V^{l-1}_\beta(\Omega)\right\|+$$
$$+\left\|g;V^l_\beta(\Omega)\right\|+\left\|h_1;H^{l+\frac12}(\partial\Omega)\right\|+\left\|h_2;H^{l+\frac12}(\partial\Omega)\right\|+\left\|h_3;H^{l+\frac12}(\partial\Omega)\right\|,$$

где $\bar f=(f_1,f_2,f_3),\quad \bar h=(h_1,h_2,h_3)$, *то есть*
$$\left\|(\bar f,g,\bar h);R^l_\beta V(\Omega,\partial\Omega)\right\| = \left(\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^{l-1}(1+r)^{2(\beta-l+1+|\alpha|)}|D^\alpha f_1|^2\,dx\right)^{\frac12}+$$
$$\left(\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^{l-1}(1+r)^{2(\beta-l+1+|\alpha|)}|D^\alpha f_2|^2\,dx\right)^{\frac12}+\left(\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^{l-1}(1+r)^{2(\beta-l+1+|\alpha|)}|D^\alpha f_3|^2\,dx\right)^{\frac12}+$$
$$\left(\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha|=0}^{l}(1+r)^{2(\beta-l+|\alpha|)}|D^\alpha g|^2\,dx\right)^{\frac12}+$$

$$+\Big(\sum_{|\alpha|=0}^{l}\int\limits_{\partial\Omega}\big|D^\alpha h_1\big|^2\,dx+\int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_{\partial\Omega}\sum_{|\alpha|=l}\frac{\big|D^\alpha h_1(y)-D^\alpha h_1(x)\big|^2}{|y-x|^4}\,dx\,dy\Big)^{\frac12}+$$

$$+\Big(\sum_{|\alpha|=0}^{l}\int\limits_{\partial\Omega}\big|D^\alpha h_2\big|^2\,dx+\int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_{\partial\Omega}\sum_{|\alpha|=l}\frac{\big|D^\alpha h_2(y)-D^\alpha h_2(x)\big|^2}{|y-x|^4}\,dx\,dy\Big)^{\frac12}+$$

$$+\Big(\sum_{|\alpha|=0}^{l}\int\limits_{\partial\Omega}\big|D^\alpha h_3\big|^2\,dx+\int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_{\partial\Omega}\sum_{|\alpha|=l}\frac{\big|D^\alpha h_3(y)-D^\alpha h_3(x)\big|^2}{|y-x|^4}\,dx\,dy\Big)^{\frac12}.$$

Определение пространства $H^{l+\frac12}(\partial\Omega)$ можно найти, например, в [5].

Определение 4. *Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^3$. Пусть l – целое, неотрицательное число, $\gamma\in(l+\frac12,l+\frac32)$. Воспользуемся обозначением, данным в [7] и примем за $\mathcal{R}^l_\gamma V(\Omega,\partial\Omega)$ – пространство, состоящее из троек функций $(\bar f,g,\bar h)$ таких, что*

$$\bar f=(f_1,f_2,f_3),\quad \bar h=(h_1,h_2,h_3)$$

и допускающих представление:

$$\bar f(x)=\frac{1}{r^3}\bar F(\omega)+\bar{\tilde f}(x),\quad g(x)=\frac{1}{r^2}G(\omega)+\tilde g(x),\quad \bar h(x)=\bar{\tilde h}(x),$$

где

$$(\bar F,G)\in H^{l-1}(\Gamma)^3\times H^l(\Gamma),\omega\in\Gamma,\Gamma=\{x:|x|=1\},\quad(\bar{\tilde f},\tilde g,\bar{\tilde h})\in R^l_\gamma V(\Omega,\partial\Omega).$$

Норма в пространстве $\mathcal{R}^l_\gamma V(\Omega,\partial\Omega)$ определяется следующим образом:

$$\Big\|(\bar f,g,\bar h);\mathcal{R}^l_\gamma V(\Omega,\partial\Omega)\Big\|=\bigg(\Big\|(\bar F,G);H^{l-1}(\Gamma)^3\times H^l(\Gamma)\Big\|^2+\Big\|(\bar{\tilde f},\tilde g,\bar{\tilde h});R^l_\gamma V(\Omega,\partial\Omega)\Big\|^2\bigg)^{\frac12}.$$

Определение пространства $H^l(\Gamma)$ можно найти, например, в [6].

Определение 5. *Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^3$. Пусть l – целое, неотрицательное число, $\gamma\in(l+\frac12,l+\frac32)$. Используя обозначения [7], опишем $\mathcal{D}^l_\gamma V(\Omega)$ – множество функций вида $(\bar v,p)$ таких, что*

$$\bar v(x)=\frac1r\bar V(\omega)+\bar{\tilde v}(x),\quad p(x)=\frac{1}{r^2}P(\omega)+\tilde p(x),$$

где

$$(\bar V,P)\in H^{l+1}(\Gamma)^3\times H^l(\Gamma),\quad \omega\in\Gamma,\quad \Gamma=\{x:|x|=1\},\quad(\bar{\tilde v},\tilde p)\in D^l_\gamma V(\Omega).$$

Норма в пространстве $\mathcal{D}^l_\gamma V(\Omega)$ определена формулой:

$$\Big\|(\bar v,p);\mathcal{D}^l_\gamma V(\Omega)\Big\|=\bigg(\Big\|(\bar V,P)\in H^{l+1}(\Gamma)^3\times H^l(\Gamma)\Big\|^2+\Big\|(\bar{\tilde v},\tilde p);D^l_\gamma V(\Omega)\Big\|^2\bigg)^{\frac12}.$$

Пространство $\mathcal{D}_\gamma^l V(\Omega)$ есть пространство функций, которому принадлежат PR – решения, то есть функции, имеющие заданный порядок убывания на бесконечности. Пространство $\mathcal{R}_\gamma^l V(\Omega, \partial\Omega)$ есть пространство данных задачи Стокса, решения которых принадлежат пространству $\mathcal{D}_\gamma^l V(\Omega)$.

3. Разрешимость задачи Стокса

Пусть $(\bar{v}, p)$ есть PR – решение задачи (1)-(4) из $D_\gamma^l V(\Omega)$. Тогда $R_\gamma^l V(\Omega, \partial\Omega)$ – пространство для тройки $(\bar{f}, g, \bar{h})$ – правых частей исходной задачи (1)-(3).

В [5] задача Стокса рассмотрена в сферических координатах (r, ω), где

$$r = |x|, \omega = (\phi, \theta), 0 \le \phi < 2\pi,\ 0 \le \theta < \pi$$

и

$$x_1 = r\, sin\theta\, cos\phi, \quad x_2 = r\, sin\theta\, sin\phi, \quad x_3 = r\, cos\theta.$$

Решения ищутся в виде

$$\bar{v}(x) = r^\lambda \bar{V}(\omega),\ p(x) = r^{\lambda-1} P(\omega), \lambda \in \mathbb{C}, \tag{5}$$

которые разрешают систему Стокса в $\mathbb{R}^3$

$$-\nu\Delta\bar{v} + \nabla p = 0, \nabla \cdot \bar{v} = 0,\ x \in R^3 \backslash 0. \tag{6}$$

Для пары $(\bar{V}, P)$ получаем систему дифференциальных уравнений на единичной сфере $\Gamma = \{x : |x| = 1\}$, зависящих от комплексного параметра λ. Обозначим данную систему через $S(\lambda; D_\omega)(\bar{V}, P) = 0,\ \omega \in \Gamma$.

Семейство отображений $\lambda \to S(\lambda; \cdot)$ называется пучком операторов, связанным с системой Стокса (6). Очевидно, что функции вида (5) – решения системы Стокса тогда и только тогда, когда λ – собственное значение полученной в сферических координатах задачи [6].

Согласно теореме 2 из [5] задача

$$S(-1; D_\omega)(\bar{V}, P) = (\bar{F}, G),\ \omega \in \Gamma, \tag{7}$$

где $(\bar{F}, G) \in H^{l-1}(\Gamma)^3 \times H^l(\Gamma)$, имеет решение $(\bar{V}, P) \in H^{l+1}(\Gamma)^3 \times H^l(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда выполняется условие согласования

$$\int\limits_\Gamma \bar{F} \cdot \bar{c}\, d\Gamma_\omega = 0 \quad \forall \bar{c} \in \mathbb{R}^3, \tag{8}$$

причем решение $(\bar{V}, P)$ не является единственным.

Таким образом, одним из условий существования решения как линейной, так и нелинейной задачи является выполнение условия согласования.

4. Примеры функций, удовлетворяющих условию согласования

Обозначим через R_0 подпространство пространства $R_\gamma^l(\Omega, \partial\Omega)$, состоящее из элементов $(\bar{f}, g, \bar{h}) \in R_\gamma^l(\Omega, \partial\Omega)$, которые удовлетворяют условию согласования, то есть

$$R_0 = \left\{ (\bar{f}, g, \bar{h}) \in R_\gamma^l(\Omega, \partial\Omega) : \int\limits_\Gamma \bar{F}(\omega) \cdot \bar{c}\, d\Gamma_\omega = 0 \quad \forall \bar{c} \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Заметим, что условие согласования выполняется не для всех функций $\bar{F}(\omega)$. Определим вид функций, которые будут удовлетворять условию (8). Рассмотрим сферические функции $Y_{lm}(\theta,\phi)$

$$Y_{lm}(\theta,\phi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\phi}\sqrt{\frac{2l+1}{2}\cdot\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\sin^m\theta\frac{d^mP_l(\cos\theta)}{d(\cos\theta)^m},$$

где $P_l(\cos\theta)$ – полином Лежандра, $0\le\theta<\pi$, $0\le\phi<2\pi$, $-l\le m\le l$, l – целое, неотрицательное число.

Любая функция $Y_{lm}(\theta,\phi)$ при $l\neq 0$ ортогональна константе на единичной сфере. При $l=0$ таких функций, ортогональных константе, нет. Сферические функции можно представить в виде:

$$\sum_{l=1}^{n}\left[\frac{1}{2}\alpha_{l0}P_l(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{l}P_l^m(\cos\theta)(\alpha_{lm}\cos m\phi+\beta_{lm}\sin m\phi)\right],\qquad(9)$$

где $P_l^m(\cos\theta)=\sin^m\theta\frac{d^mP_l(\cos\theta)}{d(\cos\theta)^m}$ – присоединенная функция Лежандра,

$$P_l(\cos\theta)=\frac{1}{2^l\cdot l!}\frac{d^l}{d(\cos\theta)}(-\sin^{2l}\theta)$$

– полином Лежандра, n – натуральное число.

Покажем, что функции такого рода действительно удовлетворяют условию согласования.

Пример 1. Пусть $n=3$. Тогда (9) примет вид:

$$\frac{1}{2}\alpha_{10}P_1(\cos\theta)+P_1^1(\cos\theta)\big(\alpha_{11}\cos\phi+\beta_{11}\sin\phi\big)+$$

$$+\frac{1}{2}\alpha_{20}P_2(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{2}P_2^m(\cos\theta)\big(\alpha_{2m}\cos m\phi+\beta_{2m}\sin m\phi\big)+$$

$$+\frac{1}{2}\alpha_{30}P_3(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{3}P_3^m(\cos\theta)\big(\alpha_{3m}\cos m\phi+\beta_{3m}\sin m\phi\big).$$

Обозначим

$$Y=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}\sin\theta\bigg(\frac{1}{2}\alpha_{10}P_1(\cos\theta)+P_1^1(\cos\theta)\big(\alpha_{11}\cos\phi+\beta_{11}\sin\phi\big)+$$

$$+\frac{1}{2}\alpha_{20}P_2(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{2}P_2^m(\cos\theta)\big(\alpha_{2m}\cos m\phi+\beta_{2m}\sin m\phi\big)+$$

$$+\frac{1}{2}\alpha_{30}P_3(\cos\theta)+\sum_{m=1}^{3}P_3^m(\cos\theta)\big(\alpha_{3m}\cos m\phi+\beta_{3m}\sin m\phi\big)\bigg)\,d\theta=Y_1+Y_2+Y_3,$$

где

$$Y_1 = \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \Big(\frac{1}{2}\alpha_{10} P_1(\cos\theta) + P_1^1(\cos\theta)\big(\alpha_{11}\cos\phi + \beta_{11}\sin\phi\big) +$$

$$+ \frac{1}{2}\alpha_{20} P_2(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{2} P_2^m(\cos\theta)\big(\alpha_{2m}\cos m\phi + \beta_{2m}\sin m\phi\big)\Big)\, d\theta,$$

$$Y_2 = \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \frac{1}{2}\alpha_{30} P_3(\cos\theta)\, d\theta,$$

$$Y_3 = \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \sum_{m=1}^{3} P_3^m(\cos\theta)\big(\alpha_{3m}\cos m\phi + \beta_{3m}\sin m\phi\big)\, d\theta.$$

Воспользуемся разложением для многочленов $P_l(\cos\theta)$ и $P_l^l(\cos\theta)$.

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta, \quad P_2(\cos\theta) = \frac{3\cos^2\theta - 1}{2}, \quad P_3(\cos\theta) = \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta).$$

$$P_1^1(\cos\theta) = \sin\theta, \quad P_2^1(\cos\theta) = \frac{3}{2}\sin 2\theta, \quad P_2^2(\cos\theta) = 3\sin^2\theta,$$

$$P_3^1(\cos\theta) = -\frac{3}{2}(1 - 5\cos^2\theta)\sin\theta, \quad P_3^2(\cos\theta) = 15\sin^2\theta\cos\theta, \quad P_3^3(\cos\theta) = 15\sin^3\theta.$$

Вычислим

$$Y_1 = \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \frac{1}{2}\alpha_{10}\cos\theta\, d\theta + \int\limits_0^{2\pi} \big(\alpha_{11}\cos\phi + \beta_{11}\sin\phi\big)\, d\phi \int\limits_0^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta +$$

$$+ \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \frac{1}{2}\alpha_{20} \frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\, d\theta +$$

$$+ \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \sum_{m=1}^{2} P_2^m(\cos\theta)\big(\alpha_{2m}\cos m\phi + \beta_{2m}\sin m\phi\big)\, d\theta.$$

Заметим, что

$$\int\limits_0^{2\pi} \big(\alpha_{km}\cos m\phi + \beta_{km}\sin m\phi\big)\, d\phi = \alpha_{km}\frac{1}{m}\sin m\phi\Big|_0^{2\pi} - \beta_{km}\frac{1}{m}\cos m\phi\Big|_0^{2\pi} = 0$$

для любых целых k и m.

Тогда

$$Y_1 = \alpha_{10}\pi \frac{\sin^2\theta}{2}\Big|_0^{\pi} + \alpha_{20}\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi} \sin\theta(3\cos^2\theta - 1)\, d\theta = \alpha_{20}\frac{\pi}{2}(-\cos^3\theta + \cos\theta)\Big|_0^{\pi} = 0$$

и $Y_3 = 0$.

Рассмотрим Y_2.

$$Y_2 = \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \frac{1}{2}\alpha_{30} P_3(\cos\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\alpha_{30} 2\pi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{\alpha_{30}\pi}{2}\left(\int\limits_0^{\pi} 5\cos^3\theta \sin\theta\, d\theta - \int\limits_0^{\pi} 3\cos\theta\sin\theta\, d\theta\right) = \frac{\alpha_{30}\pi}{2}\left(\frac{-5}{4}\cos^4\theta\Big|_0^{\pi} + \frac{3}{2}\cos^2\theta\Big|_0^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{\alpha_{30}\pi}{2}(0-0) = 0.$$

Таким образом, $Y = 0$.

Приведенный выше пример показывает, что сферические функции действительно удовлетворяют условию согласования.

Приведем пример функции $\bar{F} = (F_1, F_2, F_3)$ правой части уравнения движения, удовлетворяющей условию согласования. Возьмем в (9) конкретные значения для коэффициентов α_{lm}, β_{lm} и для l, m и воспользуемся разложением для многочленов $P_l(\cos\theta)$ и $P_l^l(\cos\theta)$.

Пример 2. Функция $\bar{F}$ может иметь следующий вид:

$$F_1 = \frac{1}{2}\cos\theta + \sin\theta(2\cos\phi + \sin\phi),$$

$$F_2 = \frac{1}{8}(3\cos^2\theta - 1),$$

$$F_3 = \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta) + \frac{3}{8}(\sin\theta + 5\sin 3\theta)(\cos\phi - \sin\phi).$$

Тогда левая часть (8) имеет вид:

$$\int\limits_{\Gamma} c_1\left(\frac{1}{2}\cos\theta + \sin\theta(2\cos\phi + \sin\phi)\right) d\Gamma + \int\limits_{\Gamma} c_2 \frac{1}{8}(3\cos^2\theta - 1)\, d\Gamma +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma} c_3\left(\frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta) + \frac{3}{8}(\sin\theta + 5\sin 3\theta)(\cos\phi - \sin\phi)\right) d\Gamma.$$

Проверим, выполняется ли условие (8) для предложенной функции:

$$\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta c_1\left(\frac{1}{2}\cos\theta + \sin\theta(2\cos\phi + \sin\phi)\right) d\theta + \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, c_2\, \frac{1}{8}(3\cos^2\theta - 1)\, d\theta +$$

$$\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta c_3\left(\frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta) + \frac{3}{8}(\sin\theta + 5\sin 3\theta)(\cos\phi - \sin\phi)\right) d\theta = Y_1 + Y_2 + Y_3.$$

Действительно,

$$Y_1 = \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta c_1 \Big(\frac{1}{2}\cos\theta + \sin\theta(2\cos\phi + \sin\phi)\Big)\, d\theta = 2\pi c_1 \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\cos\theta\, d\theta +$$

$$+c_1 \int\limits_0^{2\pi} (2\cos\phi + \sin\phi)\, d\phi \int\limits_0^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta = \pi c_1 \frac{\sin^2\theta}{2}\Big|_0^{\pi} + c_1 \cdot 0 = 0,$$

$$Y_2 = \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, c_2\, \frac{1}{8}(3\cos^2\theta - 1)\, d\theta = 2\pi \frac{1}{8} c_2 \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\,(3\cos^2\theta - 1)\, d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{4} c_2 \Big(-3\frac{\cos^3\theta}{3} + \cos\theta \Big)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{4} c_2 (1 + 1 - 1 - 1) = 0,$$

$$Y_3 = \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, c_3 \Big(\frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta) + \frac{3}{8}(\sin\theta + 5\sin 3\theta)(\cos\phi - \sin\phi) \Big)\, d\theta =$$

$$= \pi c_3 \int\limits_0^{\pi} \sin\theta(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)\, d\theta + \frac{3}{8} c_3 \int\limits_0^{2\pi} (\cos\phi - \sin\phi)\, d\phi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta(\sin\theta + 5\sin 3\theta)\, d\theta =$$

$$= -\pi c_3 \Big(\frac{5}{4}\cos^4\theta - \frac{3}{2}\cos^2\theta \Big)\Big|_0^{\pi} + c_3 \cdot 0 = 0.$$

Таким образом, $Y_1 + Y_2 + Y_3 = 0$, т.е. выполняется условие (8) для заданной функции, что и требовалось доказать.

Заключение

В статье сформулированы условия разрешимости линейной стационарной трехмерной задачи об обтекании ограниченного тела потоком вязкой жидкости, скорость которой на бесконечности стремится к нулю. Описан класс функций для правой части уравнения движения, которые удовлетворяют условию согласования, приведены примеры таких функций. Полученные результаты могут быть использованы при решении нелинейной задачи Стокса с помощью численных методов.

Список литературы

[1] Литвинов В.Г. Движение нелинейно-вязкой жидкости. М.: Наука, 1982. 376 с.

[2] Finn R. On the exterior srationary problem for the Navier-Stokes equations, and associated perturbation problem // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1965. Vol. 19. Pp. 363–406.

[3] Захарова И.В. Исследование стационарной задачи об обтекании ограниченного тела потоком вязкой неньютоновской жидкости // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2002. Т. 9, № 1. С. 193–194.

[4] Захарова И.В. О единственности решения задачи об обтекании ограниченного тела установившимся потоком неньютоновской жидкости // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2007. № 7. С. 61–88.

[5] Захарова И.В. О разрешимости внешней задачи Стокса // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 1. С. 75–92.

[6] Захарова И.В. Об одном классе функций для условия согласования // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 2. С. 81–94.

[7] Nazarov S., Pileskas K. On steady Stokes and Navier-Stokes problems with zero velocity at infinity in a three-dimentional exterior domain // Journal of Mathematics of Kyoto University. 2000. Vol. 40. Pp. 475–492.

[8] Borchers W., Pileskas K. Existence, uniqueness and asymptotics of steady jets // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1992. Vol. 120. Pp. 1–49.

[9] Герасимов И.А., Мушаилов Б.Р. Небесная механика (Общий курс). Москва, 2007. 550 с.

Библиографическая ссылка

Захарова И.В. О сферических функциях для системы Стокса // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 3. С. 35-46.

Сведения об авторах

1. **Захарова Ирина Владимировна**
доцент кафедры математической статистики и системного анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

ON SPHERICAL FUNCTIONS FOR STOKES SYSTEM

Zakharova Irina Vladimirovna
Associate professor at Mathematical Statistics and Systems Analysis department,
Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU.

Received 19.02.2016, revised 01.08.2016.

The article investigates the stationary three-dimensional problem of flow around a finite body of a viscous incompressible fluid. Scale of functional spaces, which belong to the physically realizable solution, is selected. The problem is considered in the linearized formulation for the case where the flow velocity tends to zero at infinity. Class of functions in the right part of the equations of motion, which satisfy this condition, is described. Examples are provided.

Keywords: exterior Stokes problem, non-Newtonian fluid, spherical functions, compatibility condition, Legendre polynomials.

Bibliographic citation

Zakharova I.V. On spherical functions for Stokes system. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2016, no. 3, pp. 35-46. (in Russian)

References

[1] Litvinov V.G. *Dvizhenie Nelineino-Vyazkoi Zhidkosti* [The Movement of a Nonlinear Viscous Fluid]. "Nauka" Publ., Moscow, 1982. 376 p. (in Russian)

[2] Finn R. On the exterior srationary problem for the Navier-Stokes equations, and associated perturbation problem. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1965, vol. 19, pp. 363–406.

[3] Zakharova I.V. Investigation of stationary problem of flow past a finite body of a viscous non-Newtonian fluid. *Obozrenie prikladnoi i promyshlennoi matematiki* [Review of Applied and Industrial Mathematics], 2002, vol. 9 (1), pp. 193–194. (in Russian)

[4] Zakharova I.V. Uniqueness of the solution of the problem of flow past a finite body by steady flow of non-Newtonian fluid. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2007, no. 7, pp. 61–78. (in Russian)

[5] Zakharova I.V. On the solvability of the external Stokes problem. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2016, no. 1, pp. 75–92. (in Russian)

[6] Zakharova I.V. On a class of functions for compatibility condition. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2016, no. 2, pp. 81–94. (in Russian)

[7] Nazarov S., Pileskas K. On steady Stokes and Navier-Stokes problems with zero velocity at infinity in a three-dimentional exterior domain. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, 2000, vol. 40, pp. 475–492.

[8] Borchers W., Pileskas K. Existence, uniqueness and asymptotics of steady jets. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1992, vol. 120, pp. 1–49.

[9] Gerasimov I.A., Mushailov B.R. Nebesnaya mekhanika (Obshchii kurs) [Celestial Mechanics (General course)]. Moscow, 2007. 576 p. (in Russian)