УДК 514.14

О СИММЕТРИИ ПРОЕКТИВНЫХ КРИВЫХ

Селиверстов А.В.
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича
Российской академии наук, г. Москва

Поступила в редакцию 26.04.2016, после переработки 10.08.2016.

Известные методы поиска симметрии выпуклых овалов обобщены для нового класса плоских проективных кривых, включающего вещественные кубические кривые. Предлагаемый метод использует только построение касательных, но не требует вычисления кривизны. Этот подход повышает точность вычислений и позволяет использовать графические методы. Распознавание симметрично расположенных точек позволяет согласовывать фотоснимки, выполненные с разных ракурсов, поскольку мы изучаем симметрию проективных кривых. Результаты можно использовать для иллюстрации методов начертательной геометрии.

Ключевые слова: симметрия, проективная кривая, начертательная геометрия, графика, распознавание образов.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 3. С. 59-66.

Введение

Эта работа нацелена на графическое распознавание симметричного расположения точек на проективной кубической кривой. Проективно эквивалентные кривые соответствуют центральным проекциям на различные плоскости одного и того же объекта в трехмерном пространстве. Однако на первый взгляд эти проекции могут быть непохожими. Значительные искажения возникают при фотосъемке широкоугольным объективом. Согласование фотоснимков, сделанных с различных ракурсов, позволяет восстановить взаимное расположение объектов в трехмерном пространстве [1–3]. Стереопары применяются для создания анаглифных изображений [4]. Возникновение проективной геометрии связано с развитием методов построения перспективы [5]. Но гораздо более древним примером ее использования служат солнечные часы [6]. Искусственное нарушение пропорций изображения целенаправленно используется при создании карикатурного изображения [7].

Задача инвариантного относительно проективных преобразований плоскости описания овала с неявно выраженной симметрией при условии, что овал пересекается с каждой прямой не более чем в двух точках, рассмотрена в [8]. Однако кубические кривые не удовлетворяют этому условию.

1. Предварительные сведения

Вещественная проективная плоскость $\mathbb{RP}^2$ строится соединением круга и листа Мебиуса по краю; при погружении проективной плоскости в трехмерное аффинное пространство неизбежно самопересечение поверхности. Другая модель получается отождествлением антиподальных точек на двумерной сфере. При этом соединяющий антиподальные точки путь на сфере соответствует неориентируемой замкнутой кривой, которая не служит границей. Иначе проективная плоскость получается присоединением к аффинной плоскости бесконечно удаленной проективной прямой. В свою очередь, проективная прямая получается присоединением к аффинной прямой одной бесконечно удаленной точки.

Класс проективно эквивалентных кривых соответствует конусу в трехмерном пространстве. Сечения этого конуса плоскостями, не проходящими через вершину конуса, являются аффинными кривыми, проективные замыкания которых эквивалентны. Проективная кубическая кривая либо связная, либо состоит из двух компонент связности. Гладкая проективная кубическая кривая содержит три вещественные точки перегиба, лежащие на одной прямой [9], с. 31. Другие шесть комплексных точек перегиба не принадлежат вещественной плоскости, хотя несут информацию о кривой. Важная роль комплексных точек в решении задач начертательной геометрии отмечается многоими авторами [10–12].

Обзор кубических кривых дан в [13]. Вычисления упрощаются, если уравнение кривой приведено к специальному виду. Известен итерационный алгоритм для приведения кубической формы к виду без мономов от двух переменных [14].

Любые две тройки попарно различных точек на проективной прямой переходят друг в друга при некотором проективном преобразовании. Однако для четырех точек такое преобразование существует не всегда. Для четырех точек на аффинной прямой T, U, V и W с координатами t, u, v и w при проективных преобразованиях остается инвариантным двойное отношение

$$[T,U,V,W] = \frac{v-t}{v-u} : \frac{w-t}{w-u}.$$

Доказательство приведено в книге [15] на с. 64–65. Далее, говоря о двойных отношениях четырех точек на проективной прямой, мы без ограничения общности будем подразумевать, что бесконечно удаленная точка отлична от них. В противном случае достаточно применить проективное преобразование.

Пусть C – гладкая проективная кривая. Отображение $\tau : C \to C$ сопоставляет точке $U \in C$ точку трансверсального пересечения касательной прямой в точке U с кривой C; иначе, если U – точка перегиба, полагаем $\tau(U) = U$. Мы будем рассматривать кривые, для которых это отображение однозначно определено.

Отображение $\sigma : C \times C \to \mathbb{RP}^2$ паре различных точек U и V на кривой C сопоставляет точку пересечения касательных прямых к кривой C в этих точках. На диагонали определим это отображение как тождественное $\sigma(U,U) = U$.

Отображение $\rho : C \times C \to C$ паре различных точек U и V на кривой C сопоставляет третью точку пересечения кривой и прямой, проходящей через точки U и V. На диагонали положим $\rho(U,U)$ равной либо третьей точке трансверсального пересечения кривой и касательной прямой, либо U в точке перегиба.

Отображение $\theta : C \times C \times C \to C$ тройке точек $U \neq V$ и W на кривой C сопоставляет точку пересечения прямой, проходящей через две точки U и V, и прямой, касающейся кривой C в точке W. При совпадении первых двух точек $\theta(U,U,W)=\sigma(U,W)$. При совпадении всех трех точек полагаем $\theta(U,U,U)=U$.

Симметрией кривой будем называть проективное преобразование плоскости, при котором рассматриваемая кривая отображается на себя.

2. Симметрия третьего порядка

В этом разделе мы рассмотрим проективные кривые, которые трансверсально пересекаются с каждой прямой общего положения либо в одной, либо ровно в трех точках. Такая кривая с каждой касательной прямой либо трансверсально пересекается ровно в одной другой точке, либо касается в точке перегиба. Поэтому отображения ρ, τ и θ корректно определены.

Теорема 1. *Дана гладкая проективная кривая с симметрией третьего порядка, которая трансверсально пересекается с каждой прямой общего положения либо в одной, либо ровно в трех точках. Если три точки U, V и W этой кривой циклически переходят друг в друга при симметрии, то двойные отношения $[U,\tau(U),\sigma(U,V),\sigma(U,W)]$, $[V,\tau(V),\sigma(V,W),\sigma(V,U)]$ и $[W,\tau(W),\sigma(W,U),\sigma(W,V)]$ совпадают между собой. А также двойные отношения $[U,V,\rho(U,V),\theta(U,V,W)]$, $[V,W,\rho(V,W),\theta(V,W,U)]$ и $[W,U,\rho(W,U),\theta(W,U,V)]$ совпадают между собой.*

Доказательство. Достаточно заметить, что точки каждой из первых трех четверок лежат на касательной прямой и переходят друг в друга при циклической перестановке точек U, V и W. Точки каждой из последних трех четверок лежат на секущей прямой и тоже переходят друг в друга при циклической перестановке точек U, V и W. □

3. Примеры кривых, удовлетворяющих условию теоремы

Пусть конус задан кубической формой $x^3+y^3+z^3-3\lambda xyz=0$, где $\lambda^3\neq 1$. Сечение этого конуса плоскостью $x+y+z=1$ симметрично относительно любой перестановки координат x, y и z. Это сечение – аффинная кривая; ее проективное замыкание состоит либо из одной неориентируемой компоненты, либо из двух компонент, одна из которых неориентируемая, а другая ориентируемая и служит границей выпуклой области.

Кубический многочлен имеет один или три вещественных корня с учетом кратности. Если точка касания прямой не является точкой перегиба, то она соответствует двукратному корню ограничения уравнения кривой на касательную прямую. Тогда другой корень соответствует трансверсальному пересечению. Точка перегиба соответствует троекратному корню. В каждой точке перегиба U на гладкой кубической кривой значение отображения $\tau(U)=U$. Поэтому для любых трех точек перегиба совпадают значения инвариантов, указанных в теореме. Гладкая проективная кубическая кривая имеет ровно три вещественные точки перегиба. В этом частном случае необходимое условие из теоремы является и достаточным.

4. Обсуждение

Обработка изображений связана с распознаванием контуров, представляющих собой плоские кривые [16]. Однако само наличие симметрии и проверка симметричного расположения точек на кубической кривой не являются тривиальными, поскольку в общем случае симметрия не является ортогональным преобразованием. В этом легко убедиться, глядя на рисунки кривых [13].

Распознавание симметрично расположенных точек контура позволяет согласовывать фотоснимки, выполненные с разных ракурсов, поскольку мы рассматриваем симметрию проективной кривой.

Кубические кривые широко используются в компьютерной графике. Близкий пример рассмотрен в [17]. Кубики Безье – это рациональные, следовательно, особые кривые [9]. Конечно, теорема может применяться к произвольным кривым с симметрией третьего порядка, не обязательно гладким. Однако нужно проверить, что используемые отображения определены в рассматриваемых точках.

Теорема может быть обобщена на случай кривых с симметрией большего порядка. В случае алгебраических кривых пятой степени результат можно усилить, но появится перебор большого числа вариантов. А именно, если прямая касается кривой пятой степени, то обычно она трансверсально пересекает кривую еще в трех точках. Предположим, что это условие выполнено. Так получаются четыре точки, по которым можно вычислить двойное отношение. Однако из этих четырех точек только одна выделена – это точка касания. Порядок остальных не определен. Поэтому сравнивать с другими надо не одно, а набор двойных отношений для разных перестановок точек пересечения с кривой. Это справедливо и для кривых, получаемых небольшой деформацией алгебраической кривой пятой степени. Отметим, что по теореме Гурвица число симметрий гладкой проективной кривой степени $d \geqslant 4$ не превышает $84(g-1)$, где $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ – род кривой.

Заключение

Предложено достаточное условие проверки симметричного расположения точек на проективной кривой. Для проверки этого условия используется только построение касательных, но не требуется вычисления кривизны. Это позволяет использовать графические методы. С другой стороны, это позволяет уменьшить ошибки при распознавании симметрично расположенных точек на фотоснимках и других растровых рисунках.

Список литературы

[1] Котов А.П., Фурсов В.А., Гошин Е.В. Технология оперативной реконструкции трехмерных сцен по разноракурсным изображениям // Компьютерная оптика. 2015. Т. 39, № 4. С. 600–605. doi:10.18287/0134-2452-2015-39-4-600-605

[2] Гошин Е.В., Фурсов В.А. Реконструкция 3D-сцен по разноракурсным изображениям при неизвестных внешних параметрах съемки // Компьютерная оптика. 2015. Т. 39, № 5. С. 770–775. doi:10.18287/0134-2452-2015-39-5-770-775

[3] Mishkin D., Matas J., Perdoch M. MODS: Fast and robust method for two-view matching // Computer Vision and Image Understanding. 2015. Vol. 141. Pp. 81–93. doi:10.1016/j.cviu.2015.08.005

[4] Чафонова В.Г., Газеева И.В., Тихомирова Г.В. Автоматический контроль и цифровая коррекция масштаба и взаимного поворота изображений стереопары // Компьютерная оптика. 2016. Т. 40, № 1. С. 112–120. doi:10.18287/2412-6179-2016-40-1-112-120

[5] Сальков Н.А. Искусство и начертательная геометрия // Геометрия и графика. 2013. Т. 1, № 3-4. С. 3–7. doi:10.12737/2123

[6] Милосердов Е.П., Глебов М.А. Расчет параметров конструкции и разработка алгоритмов реализации аналемматических солнечных часов // Геометрия и графика. 2014. Т. 2, № 3. С. 14–16. doi:10.12737/6520

[7] Sela M., Aflalo Y., Kimmel R. Computational caricaturization of surfaces // Computer Vision and Image Understanding. 2015. Vol. 141. Pp. 1–17. doi:10.1016/j.cviu.2015.05.013

[8] Николаев П.П. Распознавание проективно преобразованных плоских фигур. VIII. О вычислении ансамбля корреспонденции овалов с симметрией вращения // Сенсорные системы. 2015. Т. 29, № 1. С. 28–55.

[9] Прасолов В.В., Соловьев Ю.П. Эллиптические функции и алгебраические уравнения. М.: Факториал, 1997. 288 с.

[10] Гирш А.Г. Мнимости в геометрии // Геометрия и графика. 2014. Т. 2, № 2. С. 3–8. doi:10.12737/5583

[11] Гирш А.Г. Фокусы алгебраических кривых // Геометрия и графика. 2015. Т. 3, № 3. С. 4–17. doi:10.12737/14415

[12] Иванов Г.С., Дмитриева И.М. О задачах начертательной геометрии с мнимыми решениями // Геометрия и графика. 2015. Т. 3, № 2. С. 3–8. doi:10.12737/12163

[13] Смогоржевский А.С., Столова Е.С. Справочник по теории кривых третьего порядка. М.: Физматлит, 1961. 264 с.

[14] Селиверстов А.В. Кубические формы без мономов от двух переменных // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25, № 1. С. 71–77.

[15] Прасолов В.В., Тихомиров В.М. Геометрия. М.: МЦНМО, 2013. 336 с.

[16] Белим С.В., Кутлунин П.Е. Выделение контуров на изображениях с помощью алгоритма кластеризации // Компьютерная оптика. 2015. Т. 39, № 1. С. 119–124. doi:10.18287/0134-2452-2015-39-1-119-124

[17] Семенов А.Б. Метод деформации формы символов на основе планарного патча Безье // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 4. С. 105–113.

Библиографическая ссылка

Селиверстов А.В. О симметрии проективных кривых // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 3. С. 59-66.

Сведения об авторах

1. **Селиверстов Александр Владиславович**
ведущий научный сотрудник Института проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук.

Россия, 127051, г. Москва, Большой Каретный переулок, д. 19, стр. 1.
E-mail: slvstv@yandex.ru

ON SYMMETRY OF PROJECTIVE CURVES

Seliverstov Alexandr Vladislavovich
Leading Researcher, Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences (Kharkevich Institute)
Russia, 127051, Moscow, 19 Bolshoy Karetny per., build. 1. E-mail: slvstv@yandex.ru

Received 26.04.2016, revised 10.08.2016.

The known methods to find symmetry for convex ovals have been extended for a new class of plane projective curves, including real cubic curves. The proposed method uses only the description of tangent lines, but does not require the calculation of the curvature. This approach increases the accuracy of the calculations and allows you to use graphical methods. The recognition of symmetrically arranged points allows to coordinate pictures taken from different angles, as we study the symmetry of projective curves. The results can be used to illustrate the methods of descriptive geometry.

Keywords: symmetry, projective curve, descriptive geometry, graphics, pattern recognition.

Bibliographic citation

Seliverstov A.V. On symmetry of projective curves. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2016, no. 3, pp. 59-66. (in Russian)

References

[1] Kotov A.P., Fursov V.A., Goshin Ye.V. Technology for fast 3d-scene reconstruction from stereo images. *Computer Optics*, 2015, vol. 39 (4), pp. 600–605. doi:10.18287/0134-2452-2015-39-4-600-605 (in Russian)

[2] Goshin Ye.V., Fursov V.A. 3D scene reconstruction from stereo images with unknown extrinsic parameters. *Computer Optics*, 2015, vol. 39 (5), pp. 770–775. doi:10.18287/0134-2452-2015-39-5-770-775 (in Russian)

[3] Mishkin D., Matas J., Perdoch M. MODS: Fast and robust method for two-view matching. *Computer Vision and Image Understanding*, 2015, vol. 141, pp. 81–93. doi:10.1016/j.cviu.2015.08.005

[4] Chafonova V.G., Gazeeva I.V., Tihomirova G.V. Automatic control and digital correction of scale and rotation mismatch in stereo pairs. *Computer Optics*, 2016, vol. 40 (1), pp. 112–120. doi:10.18287/2412-6179-2016-40-1-112-120 (in Russian)

[5] Sal'kov N.A. Art and descriptive geometry. *Geometriya i Grafika* [Geometry and Graphics], 2013, vol. 1 (3-4), pp. 3–7. doi:10.12737/2123 (in Russian)

[6] Miloserdov E.P., Glebov M.A. Calculation of construction parameters and algorithm design of analemmatic sundial. *Geometriya i Grafika* [Geometry and Graphics], 2014, vol. 2 (3), pp. 14–16. doi:10.12737/6520 (in Russian)

[7] Sela M., Aflalo Y., Kimmel R. Computational caricaturization of surfaces. *Computer Vision and Image Understanding*, 2015, vol. 141, pp. 1–17. doi:10.1016/j.cviu.2015.05.013

[8] Nikolayev P.P. Recognition of projectively transformed planar figures. VIII. On computation of the ensemble of correspondence for rotationally symmetric ovals. *Sensor Systems*, 2015, vol. 29 (1), pp. 28–55. (in Russian)

[9] Prasolov V.V., Solovyev Yu.P. *Elliptic Functions and Elliptic Integrals.* American Mathematical Society, Providence, 1997.

[10] Hirsch A.G. Ostensibilities in geometry. *Geometriya i Grafika* [Geometry and Graphics], 2014, vol. 2 (2), pp. 3–8. doi:10.12737/5583 (in Russian)

[11] Hirsch A.G. Foci of algebraic curves. *Geometriya i Grafika* [Geometry and Graphics], 2015, vol. 3 (3), pp. 4–17. doi:10.12737/14415 (in Russian)

[12] Ivanov G.S., Dmitrieva I.M. About the tasks of descriptive geometry with imaginary solutions. *Geometriya i Grafika* [Geometry and Graphics], 2015, vol. 3 (2), pp. 3–8. doi:10.12737/12163 (in Russian)

[13] Smogorzhevskii A.S., Stolova E.S. *Spravochnik po Teorii Krivykh Tret'ego Poryadka* [Handbook of the Theory of Curves of the Third Order]. Fizmatlit Publ., Moscow, 1961. 264 p. (in Russian)

[14] Seliverstov A.V. Cubic forms without monomials in two variables. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki* [Herald of Udmurtia State University. Mathematics. Mechanics. Computer Science], 2015, vol. 25 (1), pp. 71–77. (in Russian)

[15] Prasolov V.V., Tikhomirov V.M. *Geometry.* American Mathematical Society, 2001.

[16] Belim S.V., Kutlunin P.E. Boundary extraction in images using a clustering algorithm. *Computer Optics*, 2015, vol. 39 (1), pp. 119–124. doi:10.18287/0134-2452-2015-39-1-119-124 (in Russian)

[17] Semenov A.B. On method of symbols form deformation based on planar Bezier patch. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2014, no. 4, pp. 105–113. (in Russian)