

КРУГОВЫЕ ОРБИТЫ ВОКРУГ ГРАВИТИРУЮЩИХ КОНФИГУРАЦИЙ ФАНТОМНЫХ СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ

Никонов В.В., Поташов И.М., Цирулев А.Н., Чемарина Ю.В.

Кафедра математических методов современного естествознания

Поступила в редакцию 10.11.2016, после переработки 05.12.2016.

В работе рассмотрены общие свойства круговых орбит в окрестности сферически-симметричных статических конфигураций гравитирующих фантомных скалярных полей. В этом случае метрическая функция площади $C(r)$ (в квазиглобальных координатах) полностью определяет тип конфигурации (голая сингулярность, черная дыра, кротовая нора). В любом случае устойчивые круговые орбиты могут существовать только в области $r \geq 3m$, $r \geq r_0$, где r_0 – точка минимума функции $C(r)$, а m – масса конфигурации. Симметричные относительно горловины кротовые норы и топологические геоны могут иметь круговые орбиты только на горловине или соответствующей топологической особенности, причем значения удельного момента импульса, определяющие устойчивые орбиты, ограничены сверху. В работе дана классификация гравитирующих конфигураций по типам последней устойчивой круговой орбиты.

Ключевые слова: последняя устойчивая круговая орбита, фантомное скалярное поле, черная дыра, кротовая нора, топологический геон.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 4. С. 61–78.

Введение

Успехи экспериментальной астрономии в последние два десятилетия привели к открытию целого ряда экзотических компактных гравитирующих объектов с массами от десяти солнечных масс до миллионов солнечных масс у объектов, расположенных в центрах галактик. В этот же период выяснилось, что эти объекты окружены гравитирующей темной материей, так что геометрия пространства-времени вокруг них не может корректно описываться вакуумными решениями общей теории относительности. В современной астрономии наблюдение за движением звезд или планет, близких к центру гравитирующей системы, по-прежнему дает наиболее достоверную информацию для моделирования и распознавания природы этой системы, причем особую роль играют наблюдения за регулярными, повторяющимися движениями. В связи с этим, теоретическое исследование параметров круговых орбит пробных частиц в окрестности гравитирующих конфигураций различной природы приобрело первостепенное значение. В частности, особенно важную и простую в интерпретации информацию дают параметры последней устойчивой

круговой орбиты, которая ассоциируется с внутренним краем аккреционного диска в окрестности черной дыры, голой сингулярности или кротовой норы [1–4]. Эта информация содержится, прежде всего, в самом факте существования или несуществования последней устойчивой круговой орбиты, а также в значениях ее радиуса и угловой скорости обращения пробной частицы по этой орбите.

В работе в рамках общей теории относительности изучаются круговые орбиты в окрестности статических сферически-симметричных (само)гравитирующих конфигураций фантомных скалярных полей с нелинейными потенциалами, которые, как считается, могли возникать в инфляционный период эволюции Вселенной. Актуальность задачи обусловлена, во-первых, тем, что скалярные поля могут эффективно моделировать темную материю [5–7], происхождение и состав которой в настоящее время неизвестны. Такие модели могут быть чисто феноменологическими или точными, если скалярные поля существуют в природе. Во-вторых, именно фантомные скалярные поля могут образовывать – вследствие нарушения слабого энергетического условия – гравитирующие конфигурации с нетривиальной топологией, такие как кротовые норы [8], топологические геоны [9–11] и регулярные черные дыры [12]; например, действующая программа «Радиоастрон» [13–15] включает в себя как непосредственный поиск кротовых нор, так и распознавание [16] гравитационной природы (черная дыра или кротовая нора) сверхмассивного объекта в центре нашей галактики.

Круговые орбиты в окрестности вакуумных черных дыр и голых сингулярностей хорошо изучены [17, 18]. Напротив, для гравитирующих конфигураций скалярных полей этот вопрос изучен очень слабо. Основная причина заключается в том, что вид нелинейного потенциала самодействия скалярного поля изначально не известен и должен быть определен в рамках конкретной модели по опосредованным наблюдательным данным. С одной стороны, это дает значительную степень свободы в математическом моделировании гравитирующих объектов, например, темной материи. С другой стороны, возникает необходимость в редукции задачи к некоторой удобной классификации конфигураций, в которой можно сделать содержательные выводы о круговых орбитах сразу для широкого класса скалярных полей с различными потенциалами. Такую возможность дает, в частности, так называемый метод обратной задачи для гравитирующих скалярных полей [19–24], в рамках которого были изучены круговые орбиты в окрестности гравитирующих конфигураций классических скалярных полей [25]. В данной работе мы рассматриваем только фантомные скалярные поля и используем соответствующую модификацию метода обратной задачи.

Работа организована следующим образом. В разделе 1 введены основные обозначения и даны общие формулы, определяющие параметры круговых орбит для метрики сферически-симметричного пространства-времени в квазиглобальных координатах. В разделе 2 кратко рассмотрен метод обратной задачи и квадратурные формулы для асимптотически плоских фантомных скалярных конфигураций без заряда. Основные результаты работы содержатся в разделе 3, где изучаются собственно круговые орбиты, в особенности, условия существования и параметры последних устойчивых орбит.

В работе используется сигнатура метрики $(+ - - -)$, геометрическая система единиц ($G = c = 1$), а также правило суммирования по парам повторяющихся индексов в области их изменения; латинские и греческие индексы принимают зна-

чения от 0 до 3 и от 1 до 3 соответственно.

1. Круговые орбиты в окрестности сферически-симметричного гравитирующего объекта

Геодезические в пространстве-времени полностью определяются метрикой и не зависят непосредственно от источника гравитации – скалярного поля. Для сферически-симметричной метрики общего вида интегралы движения и формулы, определяющие параметры круговых орбит, могут быть выражены непосредственно через метрические функции (см. подробный вывод, например, в [25]). В данном разделе мы запишем соответствующие выражения в конкретной калибровке, наиболее удобной для сферически-симметричных гравитирующих фантомных конфигураций. В этом случае метрика статического пространства-времени наиболее естественно записывается в так называемых квазиглобальных координатах [26], в которых она имеет вид

$$ds^2 = A^2 dt^2 - \frac{dr^2}{A^2} - C^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (1)$$

где метрические функции A и C зависят только от радиальной координаты r . Мы будем использовать естественные, то есть ассоциированные с метрикой (1), ортонормированные базисы векторных полей, 1-форм и 2-форм, которые определяются формулами

$$e_0 = (1/A) \partial_t, \quad e_1 = A \partial_r, \quad e_2 = (1/C) \partial_\theta, \quad e_3 = (1/C \sin \theta) \partial_\varphi, \quad (2)$$

$$e^0 = A dt, \quad e^1 = (1/A) dr, \quad e^2 = C d\theta, \quad e^3 = C \sin \theta d\varphi, \quad (3)$$

$$\alpha^1 = e^0 \wedge e^1, \quad \alpha^2 = e^0 \wedge e^2, \quad \alpha^3 = e^0 \wedge e^3, \quad * \alpha^1 = e^3 \wedge e^2, \quad * \alpha^2 = e^1 \wedge e^3, \quad * \alpha^3 = e^2 \wedge e^1, \quad (4)$$

где $*$ – оператор Ходжа; в частности, матрица компонент метрики в этом базисе имеет вид $(g_{ij}) = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\}$. Для удобства оценок физических параметров в окрестности орбиты, например, приливных сил в пробной частице, выпишем в базисах (3) и (4) компоненты 1-формы связности и кривизну для метрики (1) в явном виде:

$$\omega_0^1 = \omega_1^0 = A' e^0, \quad \omega_1^2 = \frac{AC'}{C} e^2, \quad \omega_1^3 = \frac{AC'}{C} e^3, \quad \omega_2^3 = \frac{\cot \theta}{C} e^3, \quad \omega_\beta^\alpha = -\omega_\alpha^\beta,$$

$$R = -\frac{1}{2} (A^2)'' \alpha^1 \otimes \alpha^1 - (A^2)' \frac{C'}{2C} (\alpha^2 \otimes \alpha^2 + \alpha^3 \otimes \alpha^3) + \frac{A^2 (C')^2 - 1}{C^2} * \alpha^1 \otimes * \alpha^1 + \left(A^2 \frac{C''}{C} + (A^2)' \frac{C'}{2C} \right) (* \alpha^2 \otimes * \alpha^2 + * \alpha^3 \otimes * \alpha^3).$$

Уравнение геодезических $\nabla_U U = 0$ в базисе (2) дает четыре уравнения

$$\frac{dU^i}{ds} + \omega_j^i(U) U^j = 0 \quad (5)$$

для компонент 4-скорости $U = U^0 e_0 + U^1 e_1 + U^2 e_2 + U^3 e_3$, где

$$U^0 = A \frac{dt}{ds}, \quad U^1 = (1/A) \frac{dr}{ds}, \quad U^2 = C \frac{d\theta}{ds}, \quad U^3 = C \sin \theta \frac{d\varphi}{ds}.$$

Для сферически-симметричной метрики мы можем без потери общности выбрать начальные условия $U^2 = 0$, $\theta = \pi/2$. Тогда эти условия сохраняются в процессе движения пробной частицы, то есть движение происходит в экваториальной плоскости.

Уравнения (5) для статической метрики (1) имеют три интеграла движения (в нестационарном случае – два):

$$(U^0)^2 - (U^1)^2 - (U^3)^2 = k, \quad k = -1, 0, 1, \quad (6)$$

где $k = -1$, $k = 0$ и $k = 1$ для пространственноподобных, изотропных и времени-подобных геодезических соответственно;

$$C^2 \frac{d\varphi}{ds} \equiv U^3 C = J, \quad (7)$$

где постоянная J – удельный момент импульса пробной частицы;

$$A^2 \frac{dt}{ds} \equiv U^0 A = E, \quad (8)$$

где постоянная E – удельная энергия пробной частицы. С помощью сохраняющихся величин k , J и E интеграл движения (6) можно переписать в виде

$$\left(\frac{dr}{ds} \right)^2 = E^2 - V_{eff}, \quad V_{eff} = A^2 \left(k + \frac{J^2}{C^2} \right). \quad (9)$$

Как и в ньютоновской механике, форма эффективного потенциала V_{eff} полностью определяет характер движения.

Мы ограничимся рассмотрением причинных геодезических с $k = 0, 1$. На круговых орбитах $U^1 = 0$, поэтому уравнения, определяющие параметры орбит для массивных частиц ($k = 1$), примут вид [25]

$$E^2 = \frac{A^3 C'}{AC' - A'C}, \quad J^2 = \frac{C^3 A'}{AC' - A'C}, \quad U^0 = \frac{E}{A}, \quad U^3 = \frac{J}{C}. \quad (10)$$

Круговые орбиты могут существовать только в области значений радиальной координаты, где выполняется необходимое условие

$$AC' - A'C \geq 0, \quad (11)$$

причем при $C' > 0$ это равенство определяет так называемую фотонную орбиту, по которой могут двигаться только безмассовые частицы ($k = 0$). Угловая скорость $\omega = d\varphi/dt$ пробной частицы на круговой орбите, измеряемая по часам удаленного наблюдателя, может быть выражена только через метрические функции A и C , что принципиально важно для интерпретации наблюдений. Используя формулы (10) и условие (11), получим

$$\omega = (U^3/C)/(U^0/A) = \frac{J}{E} \frac{A^2}{C^2} = \sqrt{(A^2)'/(C^2)'}. \quad (12)$$

Достаточное условие существования круговой орбиты дает эффективный потенциал $V_{eff}(r, J)$: при фиксированном J точки минимума и максимума V_{eff} определяют, соответственно, радиальные координаты устойчивой и неустойчивой круговой орбиты. Для последних устойчивых орбит мы принимаем классификацию, предложенную в [25]. Если при уменьшении J точки минимума и максимума сближаются, сливаясь в точку перегиба при некоторых положительных значениях r и J . Такая точка перегиба $r_{ISCO} > 0$ определяет *последнюю устойчивую орбиту первого типа* (ISCO – innermost stable circular orbit). Если метрическая функция A^2 (а значит и эффективный потенциал при $J = 0$) имеет минимум в некоторой точке $r = r_{ISCO} > 0$, то мы имеем *последнюю устойчивую орбиту второго типа* – вырожденную круговую орбиту, на которой угловая скорость пробной частицы равна нулю; у таких конфигураций при $r < r_{ISCO}$ не существует устойчивых круговых орбит.

2. Сферически-симметричные конфигурации с фантомным скалярным полем

Гравитирующие конфигурации незаряженного скалярного поля описываются действием

$$\Sigma = \frac{1}{8\pi} \int \left(-\frac{1}{2} S + \varepsilon \langle d\phi, d\phi \rangle - 2V(\phi) \right) \sqrt{|g|} d^4x, \quad (13)$$

где $\varepsilon = \pm 1$ – знак кинетического члена скалярного поля ($\varepsilon = -1$ для фантомного поля), S – скалярная кривизна, $V(\phi)$ – потенциал самодействия, а угловые скобки обозначают скалярное произведение относительно метрики. Далее мы *рассматриваем только фантомные поля* и полагаем $\varepsilon = -1$.

В методе обратной задачи для статических конфигураций гравитирующего скалярного поля метрическая функция C (класса C^2) в метрике (1) предполагается всюду положительной на \mathbb{R} и удовлетворяющей условиям

$$C'' \geq 0 \quad \text{и} \quad C = r + o(1), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (14)$$

Тогда метрическая функция A^2 , скалярное поле и его потенциал самодействия могут быть получены из квадратурных формул [24]

$$A^2 = 2C^2 \int_r^\infty \frac{r-3m}{C^4} dr, \quad \phi' = \sqrt{C''/C}, \quad (15)$$

$$\tilde{V}(r) = \frac{1}{2C^2} \left(1 - 3C'^2 A^2 - CC'' A^2 + 2C' \frac{r-3m}{C} \right), \quad (16)$$

где $\tilde{V}(r) \equiv V(\phi(r))$ – координатная функция потенциала. Вычислив ϕ и \tilde{V} , можно затем найти потенциал $V(\phi)$ как функцию поля. Первое условие в (15) является необходимым и достаточным для существования решения. Второе условие – координатное – фиксирует постоянную интегрирования m так, чтобы она имела смысл гравитационной (шварцшильдовой) массы.

Характер гравитирующей конфигурации с фантомным скалярным полем полностью определяется формой функции $C(r)$ и значением массы m . Подробная

классификация возможных конфигураций дана в [12, 28], но для изучения круговых орбит практически полезным оказывается другой подход и более грубый вариант этой классификации. Связывая задачу с будущими наблюдениями, мы полагаем массу конфигурации положительной ($m > 0$) и принимаем асимптотику (14) плоского пространства-времени для реального наблюдателя в области $r \geq 0$. Как показано в следующем разделе, для такого наблюдателя интерес представляет только область $r \geq 3m$ и основной тип конфигурации (черная дыра, голая сингулярность, кротовая нора или топологический геон), который, однако, определяется асимптотикой функции $C(r)$ в области $r < 0$.

Непосредственно из рассмотрения асимптотики интеграла (15) можно получить следующие утверждения:

1. если $C(r) = O((-r)^\alpha)$ для некоторого $0 \leq \alpha < 1$ при $r \rightarrow -\infty$, то при $m \geq 0$ конфигурация является черной дырой (имеет горизонт событий, на котором $A^2 = 0$, $(A^2)' > 0$);
2. если $C(r) > c \cdot (-r)^\alpha$ для некоторых $\alpha > 1$, $c > 0$ при $r \rightarrow -\infty$, то при $m \geq 0$ конфигурация является голой сингулярностью: $A^2 > 0$ для всех $r \in \mathbb{R}$ и $A^2 \rightarrow +\infty$, $r \rightarrow -\infty$;
3. если $C(r) \sim -ar$ ($a > 0$), $r \rightarrow -\infty$, то конфигурация, в зависимости от массы, может иметь любой основной тип.

Первые два утверждения почти очевидны, а для доказательства третьего необходимы более тонкие оценки. Поскольку

$$C^2 = a^2 r^2 + o(r^2), \quad \frac{r - 3m}{C^4} = \frac{1}{a^4 r^3} + o(r^{-3}), \quad r \rightarrow -\infty,$$

то в этом случае интеграл в (15) сходится. Обозначив

$$\lambda(m) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r - 3m}{C^4} dr, \quad m_0 = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r}{C^4} dr \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dr}{C^4}, \quad (17)$$

мы можем записать нужную оценку в виде

$$\int_r^{\infty} \frac{r - 3m}{C^4} dr = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r - 3m}{C^4} dr - \int_{-\infty}^r \frac{r - 3m}{C^4} dr = \lambda(m) + \frac{1}{2a^4 r^2} + o(r^{-2}).$$

Тогда $A^2 = 2a^2 r^2 \lambda(m) + o(r^2)$, $r \rightarrow -\infty$ и условие $m < m_0$ (при этом $\lambda(m) > 0$) определяет голые сингулярности, а $m > m_0$ (при этом $\lambda(m) < 0$) – черные дыры. При $m = m_0$ ($\lambda(m_0) = 0$) знак и поведение функции A^2 при $r \rightarrow -\infty$ определяется формой функции $C(r)$ на всей вещественной оси. В частности, асимптотика

$$C = -ar + b + \frac{c}{r} + \frac{d}{r^2} + \frac{e}{r^3} + \dots, \quad r \rightarrow -\infty, \quad a \geq 0, \quad c \leq 0$$

(если $c = 0$, то $d \geq 0$; если $c = d = 0$, то $e \leq 0$, и т. д.)

определяет, в зависимости от знака интеграла в (15), проходимые кротовые норы или регулярные черные дыры [28]; в последнем случае имеется горизонт событий,

а скалярное поле и функция A^2 ограничены, причем $A^2 \rightarrow A^2(-\infty) < 0$, $r \rightarrow -\infty$. Конфигурация может также быть черной дырой или голой сингулярностью в широком смысле слова, то есть всюду положительной и асимптотически сингулярной (например, $A^2 \rightarrow 0$ при $r \rightarrow -\infty$).

В классе конфигураций, образованных чистым гравитирующим фантомным скалярным полем, физический интерес представляют, по-видимому, только кротовые норы и топологические геоны. Однако с астрофизической точки зрения имеет смысл рассматривать также и компактные гравитирующие объекты со «скалярными волосами» (compact scalar hairy objects). В этом случае решение (15) сохраняет силу вплоть до поверхности объекта, а затем продолжается внутрь с учетом изменившегося тензора энергии-импульса в правой части уравнения Эйнштейна. При этом мы можем получить регулярное решение даже в том случае, когда такое продолжение для чисто скалярной конфигурации дает черную дыру или голую сингулярность.

3. Круговые орбиты

Задача классификации круговых орбит в окрестности конфигураций с фантомным скалярным полем существенно сложнее, чем соответствующая задача для классического скалярного поля. Во-первых, в последнем случае $(A^2)' > 0$ во всей области существования круговых орбит [25], в то время как для фантомных полей A^2 может иметь экстремумы. Во вторых, для фантомных полей тип конфигурации не определяется конечным числом членов разложения в степенной ряд функции $C(r)$, а зависит от глобального поведения этой функции во всей области определения: фактически, для каждой заданной функции $C(r)$ необходимо отдельно анализировать соответствующее пространство-время. В свою очередь, это означает, что последняя устойчивая круговая орбита не определяется значениями нескольких параметров, как в случае классического скалярного поля.

Непосредственно из квадратуры (15) следует, что

$$(A^2)' = \frac{2}{C} \left(C' A^2 - \frac{r-3m}{C} \right), \quad (18)$$

$$V'_{eff} = (A^2)' - \frac{2}{C} \frac{r-3m}{C} \frac{J^2}{C^2} = \frac{2}{C} \left\{ C' A^2 - \frac{r-3m}{C} \left(1 + \frac{J^2}{C^2} \right) \right\}, \quad (19)$$

а условие (11) существования круговых орбит примет вид

$$AC' - A'C = \frac{1}{A} \left(A^2 C' - \frac{1}{2} (A^2)' C \right) = \frac{r-3m}{AC} \geq 0.$$

Таким образом, в рассматриваемой задаче интерес представляет область $r \geq 3m$. Из (18) и (19) также следует, что при $m > 0$ эффективный потенциал V_{eff} имеет минимум в области $r \geq 3m$ при любом значении $J \geq 0$, если в данной области функция A^2 имеет минимум (ISCO второго типа). Для широкого класса функций $C(r)$ можно сформулировать следующий практически важный критерий: *если $C'(r_0) = 0$, $r_0 > 0$, то A^2 имеет минимум для всех масс из некоторого интервала $0 \leq m \leq m_c$, где $m_c > r_0/3$. Это утверждение сразу следует из (18), если принять во внимание условия (14) и асимптотику $(A^2)' \sim 2m/r^2 > 0$, $r \rightarrow +\infty$.*

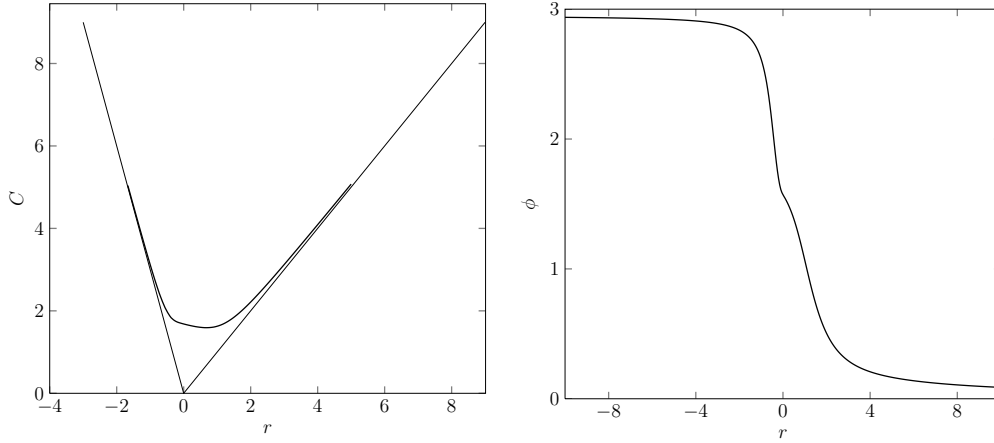


Рис. 1: Кротовая нора (20). Поле ϕ получено интегрированием в (15): $\phi \rightarrow 0$, $r \rightarrow +\infty$ и $\phi \rightarrow 2.950$, $r \rightarrow -\infty$.

В качестве примера рассмотрим конфигурации с $C(r)$ вида (см. Рис. 1):

$$C(r) = \begin{cases} (81r^4 + 2r^2 - 4r + 8)^{1/4}, & r < 0; \\ (r^4 + 2r^2 - 4r + 8)^{1/4}, & r \geq 0. \end{cases} \quad (20)$$

Из (17) находим $m_0 = 0.2721$. Конфигурации с массой $m < m_0$ являются голыми сингулярностями, с $m > m_0$ – черными дырами. Конфигурация с $m = m_0$ – это проходимая кротовая нора: $A^2 \rightarrow 1/9$ при $r \rightarrow -\infty$ и $A^2 \rightarrow 1$ при $r \rightarrow \infty$. В данном примере классификация по типу ISCO выглядит так: конфигурации с массой $0 \leq m \leq m_c$, $m_c \approx 0.2400$ имеют последние круговые орбиты второго типа (Рис. 2). Конфигурации с массой $m > m_c$ имеют ISCO первого типа.

Любой конфигурации можно поставить в соответствие функцию квадратов удельных моментов вращения $J^2(r)$, зависящую от радиуса круговой орбиты r . Вне зависимости от функции $C(r)$ и массы m функция $J^2(r)$ имеет асимптотику $J^2(r) = mr + 3m^2 + o(1)$ при $r \rightarrow +\infty$. Однако при $r \rightarrow 3m + 0$ эта функция может иметь различную асимптотику. В частности, если $3m < r_0$, где r_0 – точка минимума функции $C(r)$, то $J^2(r) \rightarrow -\infty$, а также $J^2(r) < 0$ на интервале $3m < r < r_0$: на этом интервале радиусов круговые орбиты не существуют. При $3m > r_0$ функция $J^2(r) \rightarrow +\infty$, $r \rightarrow 3m + 0$, однако данный факт не означает, что функция $J^2(r)$ неотрицательна для всех значений $r > 3m$. Если в некоторой окрестности $X \subset (3m, +\infty)$ функция $J^2(r)$ отрицательна, то круговые орбиты с радиусами из X вообще не существуют. В рассмотренном выше примере функция $J^2(r)$ является неотрицательной всюду в области $r > 3m$ только для масс $m \geq m_c$. Если $3m = r_0$, то функция $J^2(r)$ стремится к конечному значению при $r \rightarrow r_0 + 0$.

Для рассмотренного выше примера характеристики конфигураций в зависимости от массы приведены в Таблице 1.

В этом примере $m_0 > m_c$, однако стоит отметить, что данное соотношение вы-

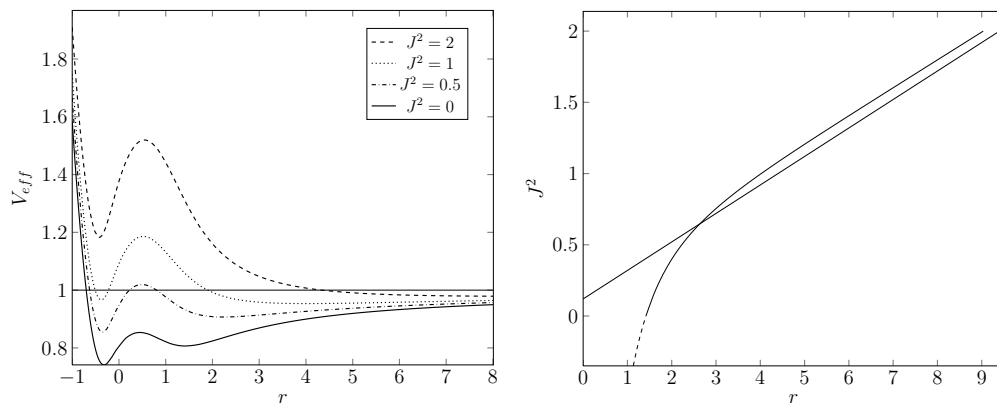


Рис. 2: Голая сингулярность (15), (20) с промежуточной массой $m = 0.2$. ISCO второго рода: $J_{ISCO} = 0$, $r_{ISCO} = 1.418$. Круговые орбиты существуют для всех $J \geq 0$ и $r \geq 1.418$. В области $3m = 0.6 < r < 1.418$ круговые орбиты отсутствуют; в частности, конфигурация не имеет фотонной орбиты.

Таблица 1

Масса	Тип конфигурации	Тип ISCO
$0 \leq m \leq m_c$	Голые сингулярности	II
$m_c < m < m_0$	Голые сингулярности	I
$m = m_0$	Проходимая кротовая нора	I
$m > m_0$	Черные дыры	I

полняется не всегда. В частности, для функции $C = (r^4 + 2r^2 - 4r + 8)^{1/4}$ имеем

$$\frac{15 - 7\sqrt{3}}{3(\sqrt{3} + 9)} = m_0 < m_c = 0.2400.$$

Для такой функции $C(r)$ характеристики конфигураций приведены в следующей таблице:

Таблица 2

Масса	Тип конфигурации	Тип ISCO
$0 \leq m < m_0$	Голые сингулярности	II
$m = m_0$	Проходимая кротовая нора	II
$m_0 < m \leq m_c$	Черные дыры	II
$m > m_c$	Черные дыры	I

Среди гравитирующих конфигураций с фантомным скалярным полем имеется специальный класс, включающий симметричные относительно горловины кротовые норы и топологические геоны. Симметричная относительно горловины крото-

вая нора – это конфигурация с четной функцией $C(r)$ и нулевой массой $m = 0$. В этом случае функция $A^2(r)$ четная и всюду положительная. Скалярное поле $\phi(r)$ может быть либо четной, либо нечетной функцией. Топологический геон, образованный гравитирующим фантомным скалярным полем, представляет собой фактормногообразие M/\mathbb{Z}_2 с топологией $\mathbb{R} \times \mathbb{RP}^3 \setminus \{p\}$, где M – симметричная относительно горловины кротовая нора, а группа \mathbb{Z}_2 порождена изометрией $r \mapsto -r$ [10]. В этих случаях метрические функции A^2 , C и эффективный потенциал имеют экстремум одновременно (в обоих случаях только в точке $r = 0$). Поэтому круговые орбиты у таких конфигураций могут существовать только на горловине кротовой норы или на топологической особенности соответствующего геона, причем математически оба случая трактуются одинаково. Очевидно, что устойчивые круговые орбиты существуют, если и только если A^2 имеет минимум в точке $r = 0$. Из вида эффективного потенциала (9) также следует, что момент импульса массивной частицы на устойчивой круговой орбите принимает значения в интервале $0 \leq J < J^*$, где J^* определяется как решение уравнения $V''_{eff}(0, J^*) = 0$. Для значений J из этого интервала

$$V'_{eff}(0, J) = 0, \quad V''_{eff}(0, J) > 0,$$

а для $J > J^*$ орбита неустойчива и

$$V'_{eff}(0, J) = 0, \quad V''_{eff}(0, J > J^*) < 0.$$

Специальный характер рассматриваемых конфигураций проявляется и в том, что в условии (11) в равенство в точке $r = 0$ выполняется тождественно и круговые орбиты, вообще говоря, не являются фотонными. Для угловой скорости массивной частицы интегралы движения (6) – (8) дают формулу

$$\omega(J) = \frac{J}{\sqrt{V_{eff}(0, J)}} \frac{A^2}{C^2} \Big|_{r=0} = \frac{J}{\sqrt{C^2 + J^2}} \frac{A}{C} \Big|_{r=0}. \quad (21)$$

Отмеченные общие свойства круговых орбит на горловине симметричных кротовых нор (и соответствующих топологических геонов) показаны на Рис. 3 для однопараметрического (с параметром $a \geq 0$) семейства функций

$$C = (r^4 + ar^2 + 1)^{1/4}.$$

В промежутке значений параметра $0 \leq a < 2$ круговые орбиты неустойчивы. При $a = 2$ мы получим так называемое решение Эллиса [29], которое вообще не допускает круговых орбит конечного радиуса. При $a > 2$ функция A^2 имеет минимум в точке $r = 0$ и существуют устойчивые круговые орбиты.

Заключение

Гравитирующие конфигурации с фантомным скалярным полем являются более сложными для анализа объектами в сравнении с вакуумными решениями и конфигурациями с классическим скалярным полем и не могут быть охарактеризованы при помощи конечного числа параметров. Однако использование метода

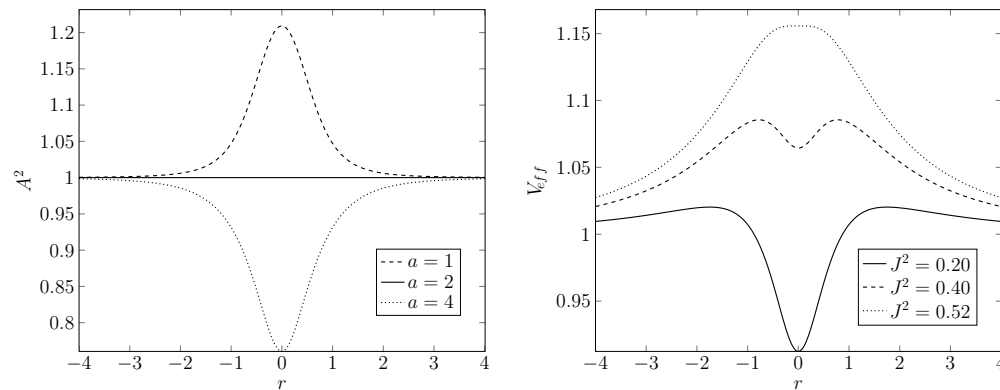


Рис. 3: Слева: Графики функций A^2 для топологических геонв. Справа: Графики эффективных потенциалов ($a = 4$). Устойчивые круговые орбиты существуют только для $J^2 < 0.52$

обратной задачи и квазиглобальных координат дает возможность провести грубую классификацию круговых орбит вблизи этих объектов и изучить их общие свойства.

В работе рассмотрены свойства и числовые характеристики круговых орбит гравитирующих конфигураций с фантомным скалярным полем и неотрицательной массой. В этом случае асимптотика метрической функции площади $C(r)$ (в квазиглобальных координатах) полностью определяет тип конфигурации (голая сингулярность, черная дыра, кротовая нора), причем проходима кротовая нора, асимптотически плоская по обе стороны от своей горловины, существует только для единственного значения массы конфигурации при заданной функции $C(r)$ с линейной асимптотикой при $r \rightarrow -\infty$. Независимо от типа гравитирующей конфигурации, устойчивые круговые орбиты могут существовать только в области $r \geq 3m$, $r \geq r_0$, где r_0 – точка минимума функции $C(r)$. Наиболее существенным результатом является классификация гравитирующих конфигураций с фантомным скалярным полем по типам последней устойчивой круговой орбиты (ISCO): существуют два типа таких орбит, поименованных в работе как ISCO первого и второго типа. ISCO первого типа вполне аналогичны ISCO шварцшильдовой черной дыры радиуса $6m$, с тем уточнением, что у гравитирующих конфигураций с фантомным скалярным полем радиусы ISCO принимают значения в промежутке $3m < r \leq 6m$. У конфигураций, имеющих ISCO второго типа, частицы на этой орбите имеют нулевой удельный момент импульса и нулевую угловую скорость, то есть покоятся относительно удаленного наблюдателя.

Как особый тип гравитирующих конфигураций с фантомным скалярным полем, в работе детально рассмотрены симметричные кротовые норы и соответствующие топологические геоны. У тих объектов круговые орбиты существуют только на горловине или соответствующей топологической особенности; исключительным случаем является кротовая нора Эллиса, которая не имеет круговых орбит. При этом круговые орбиты устойчивы только для функций $C(r)$ специального вида, причем значения удельного момента импульса, определяющие устойчивые орбиты, ограничены сверху.

Полученные результаты в ближайшей перспективе могут быть использованы при моделировании астрофизических объектов, в частности, при построении моделей сверхмассивных черных дыр в центрах галактик, окруженных темной материей.

Список литературы

- [1] Vincent F.H., Paumard T., Perrin G., Mugnier L., Eisenhauer F., Gillessen S. Performance of astrometric detection of a hotspot orbiting on the innermost stable circular orbit of the galactic centre black hole // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2011. Vol. 412, № 4. Pp. 2653–2664. doi:10.1111/j.1365-2966.2010.18084.x
- [2] McClintock J.E., Narayan R., Davis S.W., Gou L., Kulkarni A., Orosz J.A., Penna R.F., Remillard R.A., Steiner J.F. Measuring the spins of accreting black holes // *Classical and Quantum Gravity*. 2011. Vol. 28, № 11. Pp. 114009. Available at: arXiv:hep-ph/0006158v1
- [3] Torres D.F. Accretion disc onto a static non-baryonic compact object // *Nuclear Physics B*. 2002. Vol. 626, № 1-2. Pp. 377–394. Available at: arXiv:hep-ph/0201154
- [4] Abramowicz M.A., Jaroszynski M., Kato S., Lasota J.P., Rozanska A., Sadowski A. Leaving the ISCO: the inner edge of a black-hole accretion disk at various luminosities // *Astronomy & Astrophysics*. 2010. Vol. 521, № A15. doi:10.1051/0004-6361/201014467
- [5] Schunck F.E. A matter model for dark halos of galaxies and quasars. Fermilab preprint, FINAL FPRINT-95-10, 1994.
- [6] Mielke E.W., Fuchs B., Schunck F.E. Dark matter halos as Bose-Einstein condensates // *Proceedings of the 10th Marcel Grossmann Meeting*. 2006. Pp. 39–58. doi:10.1142/9789812704030_0005
- [7] Matos T., Guzmán F.S. On the space time of a galaxy // *Classical and Quantum Gravity*. 2001. Vol. 18. Pp. 5055–5064. doi:10.1088/0264-9381/18/23/303
- [8] Visser M. *Lorentzian wormholes: from Einstein to Hawking*. New York: AIP Press, 1995.
- [9] Sorkin R.D. Introduction to topological geons // *Proceedings of the Topological Properties and Global Structure of Space-Time* / Ed. by P.G. Bergmann and V. de Sabbata. Erice, Italy, May 12-22, 1985. Pp. 249–270.
- [10] Цирулев А.Н., Чемарина Ю.В. Сферически-симметричные топологические геоны // *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*. 2007. № 6. С. 61–70.
- [11] Sakellariadou M. Production of Topological Defects at the End of Inflation // *Lecture Notes in Physics*. 2008. Vol. 738. Pp. 359–392. Available at: arXiv:hep-th/0702003

- [12] Bronnikov K.A., Fabris J.C. Regular phantom black holes // *Physical Review Letters*. 2006. Vol. 96. Pp. 251101. Available at: arXiv:gr-qc/0511109
- [13] Сайт проекта «РадиоАстрон» [Электронный ресурс] // URL: <http://www.asc.rssi.ru/radioastron>
- [14] Kardashev N.S., Novikov I.D., Shatskiy A.A. Astrophysics of Wormholes // *International Journal of Modern Physics D*. 2007. Vol. 16, № 5. Pp. 909–926. Available at: arXiv:astro-ph/0610441
- [15] Новиков И.Д., Кардашев Н.С., Шацкий А.А. Многокомпонентная Вселенная и астрофизика кротовых нор // *Успехи физических наук*. 2007. Т. 177. С. 1017–1023.
- [16] Черепашук А.М. Поиски черных дыр // *Успехи физических наук*. 2003. Т. 173. С. 345–384.
- [17] Чандрасекар С. Математическая теория черных дыр. М.: Наука, 1989.
- [18] Vieira R.S.S., Schee J., Kluźniak W., Stuchlík Z., Abramowicz M. Circular geodesics of naked singularities in the Kehagias-Sfetsos metric of Hořava’s gravity // *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*. 2014. Vol. 90. Pp. 024035. Available at: arXiv:gr-qc/1311.5820
- [19] Dennhardt H., Lechtenfeld O. Scalar Deformations of Schwarzschild Holes and their stability // *International Journal of Modern Physics A*. 1998. Vol. 13, № 5. Pp. 741–764. Available at: arXiv:gr-qc/9612062
- [20] Bronnikov K.A., Shikin G.N. Spherically symmetric scalar vacuum: no-go theorems, black holes and solitons // *Gravitation&Cosmology*. 2002. Vol. 8. Pp. 107–116.
- [21] Nikonov V.V., Tchemarina Ju.V., Tsirulev A.N. A two-parameter family of exact asymptotically flat solutions to the Einstein-scalar field equations // *Classical and Quantum Gravity*. 2008. Vol. 25. Pp. 138001.
- [22] Tchemarina Ju.V., Tsirulev A.N. Spherically symmetric gravitating scalar field. The inverse problem and exact solutions // *Gravitation and Cosmology*. 2009. Vol. 15. Pp. 94–95.
- [23] Azrez-Aïnou M. Selection criteria for two-parameter solutions to scalar-tensor gravity // *General Relativity and Gravitation*. 2010. Vol. 42. Pp. 1427–1456. Available at: gr-qc/0912.1722.
- [24] Solovyev D.A., Tsirulev A.N. General properties and exact models of static selfgravitating scalar field configurations // *Classical and Quantum Gravity*. 2012. Vol. 29. Pp. 055013.
- [25] Nikonov V.V., Potashov I.M., Tsirulev A.N. Circular orbits around static self-gravitating scalar field configurations [Electronic resource] // *Mathematical Modelling and Geometry*. 2016. Vol. 4, № 2. Pp. 10–32. URL: <http://mmg.tversu.ru/images/publications/2016-vol4-n2/Nikonov-Article.pdf>

- [26] Bronnikov K.A., Rubin S.G. Black holes, cosmology and extra dimensions. Singapore: World Scientific, 2012. doi:10.1142/8302
- [27] Ono T., Suzuki T., Fushimi N., Asada H., Yamada K. Application of Sturm's theorem to marginal stable circular orbits of a test body in spherically symmetric and static spacetimes // EPL. 2015. Vol. 111, № 3. Pp. 30008. Available at: arXiv:gr-qc/1508.00101
- [28] Соловьев Д.А., Цирулев А.Н., Чемарина Ю.В. Математические модели гравитирующих конфигураций с фантомным скалярным полем // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2011. № 23. С. 7–18.
- [29] Ellis H.G. Ether flow through a drainhole: a particle model in general relativity // Journal of Mathematical Physics. 1973. Vol. 14. Pp. 104–118. (Errata: Journal of Mathematical Physics. 1974. Vol. 15. Pp. 520.)

Библиографическая ссылка

Никонов В.В., Поташов И.М., Цирулев А.Н., Чемарина Ю.В. Круговые орбиты вокруг гравитирующих конфигураций фантомных скалярных полей // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2016. № 4. С. 61–78.

Сведения об авторах

1. **Никонов Василий Владимирович**

доцент кафедры математических методов современного естествознания Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

2. **Поташов Иван Михайлович**

аспирант кафедры математических методов современного естествознания Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

3. **Чемарина Юлия Владимировна**

декан математического факультета Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

4. **Цирулев Александр Николаевич**

зав. кафедрой математических методов современного естествознания Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

E-mail: Tsirulev.AN@tversu.ru.

CIRCULAR ORBITS AROUND GRAVITATING CONFIGURATIONS OF PHANTOM SCALAR FIELDS

Nikonov Vasilii Vladimirovich

Associate Professor at Mathematical Methods of Modern Natural Sciences
department, Tver State University.
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU.

Potashov Ivan Mikhailovich

PhD student at Mathematical Methods of Modern Natural Sciences department,
Tver State University.
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU.

Tchemarina Yuliya Vladimirovna

Dean of Mathematics faculty, Tver State University.
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU.

Tsirulev Aleksandr Nikolaevich

Head of Mathematical Methods of Modern Natural Sciences department,
Tver State University.
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU. E-mail: Tsirulev.AN@tversu.ru

Received 10.11.2016, revised 05.12.2016.

In this work we consider general properties of circular orbits in the neighborhood of spherically symmetric static configurations of gravitating phantom scalar fields. In this case the metric area function $C(r)$ (in the quasiglobal coordinates) completely determines the type of a configuration (black hole, naked singularity, wormhole). In any of these cases stable circular orbits can exist only in the region $r \geq 3m$, $r \geq r_0$, where r_0 is a unique minimum point of the function $C(r)$, and m is the mass of the configuration. Wormholes that are symmetric relative to the throat, and topological geons can have circular orbits only on their throats or on the corresponding topological surfaces; at that, possible values of specific angular momentums on the corresponding stable orbits are bounded from above. We also present a classification of the gravitating configurations according to type of their innermost stable circular orbits.

Keywords: innermost stable circular orbit, phantom scalar field, black hole, wormhole, topological geon.

Bibliographic citation

Nikonov V.V., Potashov I.M., Tsirulev A.N., Tchemarina Ju.V. Circular orbits around gravitating configurations of phantom scalar fields. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2016, no. 4, pp. 61–78. (in Russian)

References

- [1] Vincent F.H., Paumard T., Perrin G., Mugnier L., Eisenhauer F., Gillessen S. Performance of astrometric detection of a hotspot orbiting on the innermost stable circular orbit of the galactic centre black hole. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2011, vol. 412(4), pp. 2653–2664. doi:10.1111/j.1365-2966.2010.18084.x
- [2] McClintock J.E., Narayan R., Davis S.W., Gou L., Kulkarni A., Orosz J.A., Penna R.F., Remillard R.A., Steiner J.F. Measuring the spins of accreting black holes. *Classical and Quantum Gravity*, 2011, vol. 28(11), pp. 114009. Available at: arXiv:hep-ph/0006158v1
- [3] Torres D.F. Accretion disc onto a static non-baryonic compact object. *Nuclear Physics B*, 2002, vol. 626(1-2), pp. 377–394. Available at: arXiv:hep-ph/0201154
- [4] Abramowicz M.A., Jaroszynski M., Kato S., Lasota J.P., Rozanska A., Sadowski A. Leaving the ISCO: the inner edge of a black-hole accretion disk at various luminosities. *Astronomy & Astrophysics*, 2010, vol. 521(A15). doi:10.1051/0004-6361/201014467
- [5] Schunck F.E. *A matter model for dark halos of galaxies and quasars*. Fermilab preprint, FINAL FPRINT-95-10, 1994.
- [6] Mielke E.W., Fuchs B., Schunck F.E. Dark matter halos as Bose-Einstein condensates. In: *Proceedings of the 10th Marcel Grossmann Meeting*, 2006, pp. 39–58. doi:10.1142/9789812704030_0005
- [7] Matos T., Guzmán F.S. On the space time of a galaxy. *Classical and Quantum Gravity*, 2001, vol. 18, pp. 5055–5064. doi:10.1088/0264-9381/18/23/303
- [8] Visser M. *Lorentzian Wormholes: from Einstein to Hawking*. New York, AIP Press, 1995.
- [9] Sorkin R.D. Introduction to topological geons. In: *Proceedings of the Topological Properties and Global Structure of Space-Time*, ed. by P.G. Bergmann and V. de Sabbata. Erice, Italy, May 12-22, 1985. Pp. 249–270.
- [10] Tsirulev A.N., Chemarina Yu.V. The spherically symmetrical topological geons // *Vestnik TsvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2007, no. 6, pp. 61–70. (in Russian)
- [11] Sakellariadou M. Production of Topological Defects at the End of Inflation. *Lecture Notes in Physics*, 2008, vol. 738, pp. 359–392. Available at: arXiv:hep-th/0702003
- [12] Bronnikov K.A., Fabris J.C. Regular phantom black holes. *Physical Review Letters*, 2006, vol. 96, pp. 251101. Available at: arXiv:gr-qc/0511109
- [13] «RadioAstron» project web-site [Electronic resource] // URL: <http://www.asc.rssi.ru/radioastron>

- [14] Kardashev N.S., Novikov I.D., Shatskiy A.A. Astrophysics of Wormholes. *International Journal of Modern Physics D*, 2007, vol. 16(5), pp. 909–926. Available at: arXiv:astro-ph/0610441
- [15] Novikov I.D., Kardashev N.S., Shatskiy A.A. The multicomponent Universe and the astrophysics of wormholes. *Physics-Uspokhi*, 2007, vol. 50(9), pp. 965–971.
- [16] Cherepashchuk A.M. Search for black holes. *Physics-Uspokhi*, 2003, vol. 46(4), pp. 335–371.
- [17] Chandrasekar S. *Matematicheskaya Teoriya Chernykh Dyr* [The mathematical Theory of Black Holes]. Moscow, Nauka Publ., 1989.
- [18] Vieira R.S.S., Schee J., Kluzniak W., Stuchlík Z., Abramowicz M. Circular geodesics of naked singularities in the Kehagias-Sfetsos metric of Hořava’s gravity. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, 2014, vol. 90, pp. 024035. Available at: arXiv:gr-qc/1311.5820
- [19] Dennhardt H., Lechtenfeld O. Scalar Deformations of Schwarzschild Holes and their stability. *International Journal of Modern Physics A*, 1998, vol. 13(5), pp. 741–764. Available at: arXiv:gr-qc/9612062
- [20] Bronnikov K.A., Shikin G.N. Spherically symmetric scalar vacuum: no-go theorems, black holes and solitons. *Gravitation & Cosmology*, 2002, vol. 8, pp. 107–116.
- [21] Nikonov V.V., Tchamarina Ju.V., Tsurulev A.N. A two-parameter family of exact asymptotically flat solutions to the Einstein-scalar field equations. *Classical and Quantum Gravity*, 2008, vol. 25, pp. 138001.
- [22] Tchamarina Ju.V., Tsurulev A.N. Spherically symmetric gravitating scalar field. The inverse problem and exact solutions. *Gravitation and Cosmology*, 2009, vol. 15, pp. 94–95.
- [23] Azrez-Aïnou M. Selection criteria for two-parameter solutions to scalar-tensor gravity. *General Relativity and Gravitation*, 2010, vol. 42, pp. 1427–1456. Available at: gr-qc/0912.1722.
- [24] Solovyev D.A., Tsurulev A.N. General properties and exact models of static selfgravitating scalar field configurations. *Classical and Quantum Gravity*, 2012, vol. 29, pp. 055013.
- [25] Nikonov V.V., Potashov I.M., Tsurulev A.N. Circular orbits around static self-gravitating scalar field configurations [Electronic resource]. *Mathematical Modelling and Geometry*, 2016, vol. 4(2), pp. 10–32. URL: <http://mmg.tversu.ru/images/publications/2016-vol4-n2/Nikonov-Article.pdf>
- [26] Bronnikov K.A., Rubin S.G. *Black holes, cosmology and extra dimensions*. Singapore, World Scientific, 2012. doi:10.1142/8302

- [27] Ono T., Suzuki T., Fushimi N., Asada H., Yamada K. Application of Sturm's theorem to marginal stable circular orbits of a test body in spherically symmetric and static spacetimes. *EPL*, 2015, vol. 111(3), pp. 30008. Available at: arXiv:gr-qc/1508.00101
- [28] Solovyov D.A., Tsirulev A.N., Chemarina Yu.V. Mathematical models of a gravitating configurations with a phantom scalar field. *Vestnik Tver State University. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2011, no. 23, pp. 7–18.
- [29] Ellis H.G. Ether flow through a drainhole: a particle model in general relativity. *Journal of Mathematical Physics*, 1973, vol. 14, pp. 104–118. (Errata: *Journal of Mathematical Physics*, 1974, vol. 15, pp. 520.)