УДК 519.2

К ТЕОРИИ ОБРАТНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИИ

Кашаева С.Ю.
МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва

Поступила в редакцию 22.12.2014, после переработки 15.01.2015.

В статье обсуждаются условия существования решений обратных стохастических дифференциальных уравнений в терминах общей фильтрации. Найдено решение линейного обратного стохастического дифференциального уравнения с помощью классической теории дифференциальных уравнений. Исследован специальный класс обратных стохастических дифференциальных уравнений. С помощью свойств решений таких уравнений дано новое прямое доказательство разложения Дуба-Мейера супермартингала из класса $\mathcal{DL}$ в виде разности мартингала и возрастающего предсказуемого процесса. Доказана общая теорема о перестановке интеграла случайного процесса и условного математического ожидания.

Ключевые слова: обратное стохастическое дифференциальное уравнение, разложение Дуба-Мейера, мартингал, супермартингал.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 1. С. 15–46.

1. Введение

Имеется обширная литература (см. [1, 2, 5, 10, 11, 13–15, 17, 20, 22–24, 27, 28]) об обратных стохастических дифференциальных уравнениях и их многочисленных приложениях, особенно в финансовой математике. В подавляющем большинстве случаев обсуждаются обратные стохастические уравнения, формулируемые в терминах стохастических интегралов Ито, в которых интегрирование осуществляется по процессу броуновского движения. Решения таких уравнений должны быть согласованными с броуновской фильтрацией. Значительно меньше имеется исследований об обратных стохастических уравнениях, формулируемых в терминах общих стохастических интегралов и общих фильтраций. Поэтому создание общей теории обратных стохастических уравнений является делом будущего.

В настоящей статье обсуждаются вопросы существования обратных стохастических уравнений и некоторые свойства их решений в терминах общей фильтрации. В связи с этим исследованием доказана общая теорема о перестановочности операцией интегрирования случайных процессов и условного математического ожидания. Дано решение линейного обратного стохастического дифференциального уравнения с помощью классической теориии дифференциальных уравнений. Этот подход представляет особый интерес в тех случаях, когда не применима формула Ито. Исследуется специальный класс обратных стохастических уравнений. С помощью свойств решений таких уравнений дается новое доказательство разложения Дуба-Мейера для супермартингала из класса Дуба в виде разности мартингала и возрастающего предсказуемого процесса.

Оригинальное доказательство упомянутой теоремы о разложении Дуба-Мейера, данное Мейером ([25] и [26]), гласит, что супермартингал из класса Дуба может быть представлен в виде разности мартингала и возрастающего натурального процесса. Позже Долеан-Дэд доказала [9], что класс натуральных возрастающих процессов и класс возрастающих предсказуемых процессов совпадают. Тем самым мы получаем прямое доказательство части теоремы Долеан-Дэд. Упомянутое оригинальное доказательство теоремы Мейера о разложении супермартингала считается весьма трудным. По этой причине были предприняты многочисленные попытки (см. [3, 4, 6, 7, 12, 16, 18, 29, 31]) найти простое доказательство теоремы Мейера. Подробный анализ известных доказательств не позволяет сказать, что требуемое простое и короткое доказательство найдено. Стремление найти простое и короткое доказательство теоремы Мейера о разложении супермартингала продиктовано тем, что эта теорема является принципиально важной и необходимой при исследовании большого числа задач из теории стохастического анализа.

Пусть даны полное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, а также расширенная и непрерывная справа фильтрация $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, t \geqslant 0\}$. Напомним, что свойство расширенности фильтрации означает, что сигма-алгебра $\mathcal{F}_0$ содержит все события нулевой вероятности. Свойство непрерывности справа фильтрации означает, что выполняется равенство $\cap_{s>t}\mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t$ для любого $t \geqslant 0$. Мы будем иметь дело только с вещественными случайными процессами. Случайный процесс $X = \{X_t, t \geqslant t\}$ называется согласованным (согласованным с фильтрацией $\mathbb{F}$), если для любого $t \geqslant 0$ случайная величина X_t измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_t$. Случайные процессы $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ и $X' = \{X'_t, t \geqslant 0\}$ называются версиями друг друга, если для любого $t \geqslant 0$ случайные величины X_t и X'_t равны $\mathbb{P}$-почти всюду (п.в.). Случайные процессы X и X' называются неотличимыми, если существует событие $\Omega' \in \mathcal{F}$ единичной вероятности такое, что для любого $\omega \in \Omega'$ траектории $X_t(\omega), t \geqslant 0$, и $X'_t(\omega), t \geqslant 0$, совпадают. Случайный процесс X называется регулярным справа, если любая его траектория $X_t(\omega), t \geqslant 0$, непрерывна справа и имеет предел слева в каждой точке $t > 0$.

Обозначим $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ борелевскую сигма-алгебру на вещественной прямой $\mathbb{R}$ и сигма-алгебры $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ и $\mathcal{B}_a$ борелевских подмножеств положительной полупрямой $\mathbb{R}_+$ и сегмента $[0, a], a > 0$. Пусть дана произвольная сигма-алгебра $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Случайный процесс $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ можно трактовать как функцию $X_t(\omega)$ переменных $t \in \mathbb{R}_+$ и $\omega \in \Omega$. Случайный процесс X называется $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{G}$-измеримым, если прообраз $\{(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega : X_t(\omega) \in A\}$ любого множества $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ принадлежит прямому произведению $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{G}$ сигма-алгебр $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ и $\mathcal{G}$. Аналогично, случайный процесс $\{X_t, t \in [0, a]\}$ называется $\mathcal{B}_a \otimes \mathcal{G}$-измеримым, если прообраз $\{(t, \omega) \in [0, a] \times \Omega : X_t(\omega) \in A\}$ любого множества $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ принадлежит прямому произведению $\mathcal{B}_a \otimes \mathcal{G}$ сигма-алгебр $\mathcal{B}_a$ и $\mathcal{G}$. Если $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{G}$-измеримый случайный процесс $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ является версией случайного процесса $Y = \{Y_t, t \geqslant 0\}$, то X называется $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{G}$-измеримой версией случайного процесса Y. Аналогично, если $\mathcal{B}_a \otimes \mathcal{G}$-измеримый случайный процесс $X = \{X_t, t \in [0, a]\}$ является версией случайного процесса $Y = \{Y_t, t \in [0, a]\}$, то X называется $\mathcal{B}_a \otimes \mathcal{G}$-измеримой версией случайного процесса Y. Обычно $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathcal{F}$-измеримые и, соответственно, $\mathcal{B}_a\otimes\mathcal{F}$-измеримые случайные процессы X называют измеримыми, опуская упоминание о прямом произведении сигма-алгебр $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ и $\mathcal{F}$, соответственно, о прямом произведении сигма-алгебр $\mathcal{B}_a$ и $\mathcal{F}$.

Случайный процесс $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ называется субмартингалом (мартингалом) относительно фильтрации $\mathbb{F}$ или $\mathbb{F}$-субмартингалом (мартингалом), если он согласован с фильтрацией, для любого $t \geqslant 0$ математическое ожидание $\mathbb{E}|X_t|$ конечно, для любых чисел $0 \leqslant s < t$ выполняется субмартингальное (мартингальное) условие $X_s \leqslant \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)$ ($X_s = \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)$) п.в. Символ $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)$ обозначает условное математическое ожидание случайной величины X_t относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_s$. Случайный процесс $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ называется супермартингалом относительно фильтрации $\mathbb{F}$ или $\mathbb{F}$-супермартингалом, если случайный процесс $\{-X_t, t \geqslant 0\}$ является $\mathbb{F}$-субмартингалом. Мы будем использовать приведенную терминологию и в том случае, когда вместо параметрического множества $\mathbb{R}_+$ используется любой сегмент $[0, a]$. Например, говорить о $\mathbb{F}$-мартингале (суб/супермартингале) $X = \{X_t, t \in [0, a]\}$.

Одним из основных объектов нашего исследования является обратное стохастическое дифференциальное уравнение следующего вида

$$X_t = \mathbb{E}\Big(\xi + \int_t^a \mu(s, X_s)ds|\mathcal{F}_t\Big), t \in [0, a], X_a = \xi. \tag{1}$$

Решением этого уравнения называется случайный процесс $X = \{X_t, t \in [0, a]\}$, будучи подставленным в уравнение, обращает его в тождество для всех $t \in [0, a]$ на некотором событии $\Omega' \in \mathcal{F}$ единичной вероятности. Случайный процесс X должен удовлетворять некоторым естественным условиям, а именно быть $\mathbb{F}$-согласованным, измеримым и интегрируемым. Действительно, случайная величина X_t является условным математическим ожиданием от случайной величины $\xi + \int_t^a \mu(s, X_s)ds$ и, следовательно, $\mathcal{F}_t$-измерима. Чтобы существовали условное математическое ожидание, следует предположить, что

$$\mathbb{E}\int_0^a |\mu(t, X_t)|dt < \infty. \tag{2}$$

Чтобы существовал интеграл под знаком математического ожидания, следует предположить, что случайный процесс $\{\mu(s, X_s), s \in [0, a]\}$ является измеримым. Для этого достаточно, чтобы функция $\mu : \Omega \times [0, a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ была измеримой, как функция трех переменных, и случайный процесс X был измеримым. Название *обратное* стохастическое дифференциальное уравнение объясняется тем, что граничное условие $X_a = \xi$ задается в правой конечной точке параметрического множества $[0, a]$. Случайная величина ξ должна иметь конечный абсолютный момент $\mathbb{E}|\xi|$ и быть $\mathcal{F}_a$-измеримой. Последнее условие необходимо, чтобы решение X уравнения (1) было согласованным с фильтрацией $\mathbb{F}$.

Предположим, что X является решением уравнения (1). Перепишем уравнение (1) (теперь тождество) в следующем виде

$$X_t = \mathbb{E}\Big(\xi + \int_0^a \mu(s, X_s)ds - \int_0^t \mu(s, X_s)ds|\mathcal{F}_t\Big) = -\int_0^t \mu(s, X_s)ds + M_t =$$
$$= \xi + \int_t^a \mu(s, X_s)ds - (M_a - M_t),$$

где $M_t = \mathbb{E}(\xi + \int_0^a \mu(s, X_s)ds|\mathcal{F}_t)$. Случайный процесс $M = \{M_t, t \in [0, a]\}$ является $\mathbb{F}$-мартингалом. По известной теореме ([21], стр. 145) существует регулярная версия мартингала M. Из сказанного следует, что любое решение уравнения (1) является решением обратного стохастического дифференциального уравнения

$$X_t = \xi + \int_t^a \mu(s, X_s)ds - (M_a - M_t), X_a = \xi. \tag{3}$$

Предположим теперь, что случайный процесс X удовлетворяет этому уравнению с некоторым регулярным справа $\mathbb{F}$–мартингалом $M = \{M_t, t \in [0, a]\}$. Можно выбрать вариант условного математического ожидания $\mathbb{E}(M_a|\mathcal{F}_t)$ так, что случайные процессы $\{\mathbb{E}(M_a|\mathcal{F}_t), t \in [0, a]\}$ и M будут неотличимыми. В этом случае любое решение уравнения (3) является решением уравенения (1). Уравнения (1) и (3) оказываются эквивалентными. В научной литературе можно найти достаточные условия для существования решений обратных стохастических дифференциальных уравнений (1) и (3). Некоторые достаточные условия для существования решений уравнений (1) и (3) мы обсудим в третьем разделе статьи.

2. Теорема Фубини для условного математического ожидания

В этом разделе будет описан класс случайных процессов, в котором содержатся решения обратных стохастических дифференциальных уравнений. Затем мы докажем две теоремы. Теорема 2 о перестановочности операций интегрирования и условного математического ожидания называется теоремой Фубини для условных математических ожиданий. Каждая из доказанных теорем представляет самостоятельный интерес. Они также понадобятся для доказательства теоремы о существовании решения обратного стохастического дифференциального уравнения.

Теорема 1. *Пусть даны регулярные справа случайные процессы $X^{(n)} = \{X_t^{(n)}, t \in [0, a]\}, n \in \mathbb{N}$. Если $\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a} |X_t^{(n)}|^p) < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и для некоторого числа $p \geqslant 1$ и*

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a} |X_t^{(n)} - X_t^{(m)}|^p) = 0, \tag{4}$$

то существуют регулярный справа случайный процесс $X = \{X_t, t \in [0, a]\}$ и последовательность $\{m_n\}_{n\geqslant 1}$ индексов такие, что $\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a} |X_t|^p) < \infty$ и

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a} |X_t^{(n)} - X_t|^p) = 0, \lim_{n\to\infty} \sup_{0\leqslant t\leqslant a} |X_t^{(m_n)} - X_t| = 0 \text{ п.в.} \tag{5}$$

Доказательство. Обозначим Q_a множество всех рациональных чисел в сегменте $[0, a]$, к которому добавим число a. Для любых $n, m \in \mathbb{N}$ функция $\sup_{0\leqslant t\leqslant a} |X_t^{(n)} - X_t^{(m)}|$ является $\mathcal{F}$-измеримой. Для этого достаточно доказать, что $A = \{\sup_{0\leqslant t\leqslant a} |X_t^{(n)} - X_t^{(m)}| \leqslant c\} \in \mathcal{F}$ для любого вещественного числа c. Если $c < 0$, то $A = \varnothing \in \mathcal{F}$. Если $c \geqslant 0$ и справедливо равенство $A = \cap_{t\in Q_a}\{|X_t^{(n)} - X_t^{(m)}| \leqslant c\}$, то $A \in \mathcal{F}$, так как A является пересечением счетного числа множеств из $\mathcal{F}$. Докажем упомянутое равенство. Пусть $\omega \in \cap_{t\in Q_a}\{|X_t^{(n)} - X_t^{(m)}| \leqslant c\}$. Для любого

$t \in [0,a) \setminus Q_a$ найдется убывающая последовательность $\{t_j\}_{j\geqslant 1}$ чисел из Q_a, которая сходится к t. Так как функция $|X_t^{(n)}(\omega) - X_t^{(m)}(\omega)|, t \in [0,a]$ непрерывна справа и ограничена числом c на множестве Q_a, то

$$|X_t^{(n)}(\omega) - X_t^{(m)}(\omega)| = \lim_{j\to\infty} |X_{t_j}^{(n)}(\omega) - X_{t_j}^{(m)}(\omega)| \leqslant c$$

и, следовательно, $\omega \in A$. С другой стороны, очевидно, что $A \subseteq \cap_{t\in Q_a}\{|X_t^{(n)} - X_t^{(m)}| \leqslant c\}$. Множества A и $\cap_{t\in Q_a}\{|X_t^{(n)} - X_t^{(m)}| \leqslant c\}$ совпадают, так как являются частями друг друга.

В силу условия (4) найдется последовательность $\{m_n\}_{n\geqslant 1}$ индексов такая, что

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a} |X_t^{(m_{n+1})} - X_t^{(m_n)}|^p) \leqslant 2^{-np}, n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

С помощью теоремы о монотонной сходимости и неравенства Ляпунова $\mathbb{E}\xi \leqslant (\mathbb{E}\xi^p)^{1/p}$ для любой неотрицательной случайной величины ξ, мы получим

$$\mathbb{E}(\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant a} |X_t^{(m_{n+1})} - X_t^{(m_n)}|) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a} |X_t^{(m_{n+1})} - X_t^{(m_n)}|) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}(\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a} |X_t^{(m_{n+1})} - X_t^{(m_n)}|^p))^{1/p} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1.$$

Отсюда следует, что множество $\Omega' = \{\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t^{(m_{n+1})} - X_t^{(m_n)}| < \infty\}$ является событием единичной вероятности. Определим случайный процесс $X = \{X_t, t\in[0,a]\}$, положив

$$X_t(\omega) = \begin{cases} X_t^{(m_1)}(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty}(X_t^{(m_{n+1})}(\omega) - X_t^{(m_n)}(\omega)), & \text{если } \omega \in \Omega', \\ 0, & \text{если } \omega \in \Omega\setminus\Omega'. \end{cases}$$

Если $\omega \in \Omega$, то функция $X_t(\omega), t\in[0,a]$, непрерывна справа и имеет предел слева в каждой точке $t \in (0,a]$, так как она является суммой равномерно сходящегося ряда функций с такими свойствами. Если $\omega \in \Omega\setminus\Omega'$, то функция $X_t(\omega), t\in[0,a]$, постоянна и, следовательно, непрерывна. Для каждого $t \in [0,a]$ функция $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}$, так как является пределом почти всюду сходящегося ряда случайных величин. Второе утверждение (5) является следствием следующих соотношений, которые выполняются на множестве Ω':

$$\lim_{n\to\infty}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t - X_t^{(m_{n+1})}|) = \lim_{n\to\infty}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|\sum_{k=n+1}^{\infty}(X_t^{(m_{k+1})} - X_t^{(m_k)})|) \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t^{(m_{k+1})} - X_t^{(m_k)}| = 0.$$

С помощью (6) и неравенства Минковского можно убедиться, что

$$(\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t|^p))^{1/p} \leqslant (\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t^{(m_1)}|^p))^{1/p} + \sum_{n=1}^{\infty}(\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t^{(m_{n+1})} - X_t^{(m_n)}|^p)^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant (\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t^{(m_1)}|^p))^{1/p} + \sum_{n=1}^{\infty}2^{-n} = (\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t^{(m_1)}|^p)^{1/p} + 1 < \infty.$$

Снова с помощью неравенства Минковского мы получим

$$\lim_{n\to\infty}(\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t-X_t^{(m_{n+1})}|^p))^{1/p}=\lim_{n\to\infty}(\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|\sum_{k=n+1}^{\infty}(X_t^{(m_{k+1})}-X_t^{(m_k)})|^p)^{1/p}\leqslant$$
$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}(\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t^{(m_{k+1})}-X_t^{(m_k)}|^p))^{1/p}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}2^{-n}=0.$$

Для любого $k\in\mathbb{N}$ найдется $n\in\mathbb{N}$ такое, что $m_n\leqslant k<m_{n+1}$. Для таких k и n справедливы неравенства

$$(\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t-X_t^{(k)}|^p)^{1/p}=(\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t-X_t^{(m_n)}+X_t^{(m_n)}-X_t^{(k)}|^p))^{1/p}\leqslant$$
$$\leqslant(\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t-X_t^{(m_n)}|^p))^{1/p}+(\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t^{(m_n)}-X_t^{(k)}|^p))^{1/p}\to 0$$

при $k\to\infty$, так как по доказанному выше $\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t-X_t^{(m_n)}|^p)=0$ и выполняется утверждение $\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t^{(m_n)}-X^{(k)}|^p)=0$ по условию (4). Первое утверждение (5) доказано. Теорема доказана. □

Теорема 2. *Пусть счетно конечная мера* ν *определена на сигма-алгебре* $\mathcal{B}_a$. *Если измеримый случайный процесс* $X=\{X_t,t\in[0,a]\}$ *удовлетворяет условию*

$$\mathbb{E}\int_0^a|X_t|\nu\{dt\}<\infty, \tag{7}$$

то для любой сигма-алгебры $\mathcal{G}\subseteq\mathcal{F}$ *существует* $\mathcal{B}_a\otimes\mathcal{G}$*-измеримая версия* $Y=\{Y_t,t\in[0,a]\}$ *случайного процесса* $\{\mathbb{E}(X_t|\mathcal{G}),t\in[0,a]\}$ *такая, что*

$$\int_u^v Y_t\nu\{dt\}=\mathbb{E}\Big(\int_u^v X_t\nu\{dt\}|\mathcal{G}\Big)\ \textit{для любых}\ 0\leqslant u<v\leqslant a. \tag{8}$$

Доказательство. Равенство (8) означает, что в качестве условного математического ожидания $\mathbb{E}(\int_u^v X_t\nu\{dt\}|\mathcal{G})$ можно взять случайную величину $\int_u^v Y_t\nu\{dt\}$. Предположим сначала, что мера ν конечна. Условимся называть случайный процесс Y, о котором говорится в теореме, соответствующим случайному процессу X. Теорема справедлива для индикаторной функции $\mathbb{1}_{A\times B}$ любого прямоугольника $A\times B$ со сторонами $A\in\mathcal{B}_a$ и $B\in\mathcal{F}$. Действительно, случайный процесс $X=\{X_t,t\in[0,a]\},X_t(\omega)=\mathbb{1}_A(t)\mathbb{1}_B(\omega)$, является измеримым и удовлетворяет условию (7)

$$\mathbb{E}\int_0^a|X_t|\mu\{dt\}=\int_0^a\mathbb{1}_A(t)\nu\{dt\}\mathbb{E}\mathbb{1}_B=\nu\{A\}\mathbb{P}\{B\}<\infty.$$

Произведение $c\mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})$ можно взять (так мы и поступим) в качестве условного математического ожидания $\mathbb{E}(c\xi|\mathcal{G})$ для любой случайной величины ξ с конечным математическим ожиданием и для любой неслучайной постоянной или функции c аргумента $t\in[0,a]$.

Случайный процесс $Y = \{Y_t, t \in [0,a]\}, Y_t = \mathbb{E}(X_t|\mathcal{G}) = \mathbb{1}_A(t)\mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{G})$ является $\mathcal{B}_a \otimes \mathcal{G}$-измеримым. Равенство (8) следует из следующих соотношений

$$\int_u^v Y_t \nu\{dt\} = \int_u^v \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A\times B}(t)|\mathcal{G})\nu\{dt\} = \int_u^v \mathbb{1}_A(t)\mathbb{E}\mathbb{1}_B|\mathcal{G})\nu\{dt\} =$$
$$= \int_u^v \mathbb{1}_A(t)\nu\{dt\}\mathbb{E}(\mathbb{1}_B|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\int_u^v \mathbb{1}_{A\times B}(t)\nu\{dt\}|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\int_u^v X_t\nu\{dt\}|\mathcal{G}).$$

Убедимся, что теорема справедлива для индикаторной функции любого множества из $\mathcal{B}_a \otimes \mathcal{F}$. Обозначим $\mathcal{L}$ класс множеств $A \in \mathcal{B}_a \otimes \mathcal{F}$ для индикаторных функций, для которых справедлива теорема. Заметим, что индикаторная функция $\mathbb{1}_A$ является измеримым случайным процессом, более подробно, $\mathcal{B}_a \otimes \mathcal{F}$-измеримым. Она удовлетворяет условию (7), так как $0 \leqslant \mathbb{1}_A \leqslant 1$. Убедимся, что $\mathcal{L}$ является λ-классом. Выше было доказано, что прямоугольник $[0,a] \times \Omega$ принадлежит классу $\mathcal{L}$. Если $A, B \in \mathcal{L}$ и $A \subset B$, то $B \setminus A \in \mathcal{L}$. Пусть случайные процессы $Y = \{Y_t, t \in [0,a]\}$ и $Z = \{Z_t, t \in [0,a]\}$, соответствуют случайным процессам $\mathbb{1}_A$ и $\mathbb{1}_B$. Разность $Z - Y$ двух $\mathcal{B}_a \otimes \mathcal{G}$-измеримых случайных процессов является $\mathcal{B}_a \times \mathcal{G}$-измеримым случайным процессом Из равенств

$$\int_u^v Y_t\nu\{dt\} = \mathbb{E}(\int_u^v \mathbb{1}_A(t)\nu\{dt\}|\mathcal{G}), \int_u^v Z_t\nu\{dt\} = \mathbb{E}(\int_u^v \mathbb{1}_B(t)\nu\{dt\}|\mathcal{G})$$

следует, что $Z - Y$ удовлетворят равенству (8)

$$\int_u^v (Z_t - Y_t)\nu\{dt\} = \mathbb{E}(\int_u^v (\mathbb{1}_B(t) - \mathbb{1}_A(t))\nu\{dt\}|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\int_u^v \mathbb{1}_{B\setminus A}(t)\nu\{dt\}|\mathcal{G}).$$

Случайный процесс $Z - Y$ соответствует случайному процессу $\mathbb{1}_{B\setminus A}$. Это означает, что $B \setminus A \in \mathcal{L}$. Если $A_n \in \mathcal{L}$ и $A_n \subseteq A_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$. К возрастающим последовательностям $\{\mathbb{1}_{A_n}\}_{n\geqslant 1}$ и $\{\int_u^v \mathbb{1}_{A_n}(t)\nu\{dt\}\}_{n\geqslant 1}$ применимы теорема о монотонной сходимости и теорема о монотонной сходимости для условных математических ожиданий, по которым

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \int_u^v \mathbb{1}_{A_n}(t)\nu\{dt\} = \int_u^v \mathbb{1}_A(t)\nu\{dt\}, \\ &\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\int_u^v \mathbb{1}_{A_n}(t)\nu\{dt\}|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\int_u^v \mathbb{1}_A(t)\nu\{dt\}|\mathcal{G}) \text{ п.в.} \end{aligned} \tag{9}$$

Пусть случайный процесс $Y^{(n)} = \{Y_t^{(n)}, t \in [0,a]\}$ соответствует случайному процессу $\mathbb{1}_{A_n}$. Так как $Y^{(n)}$ является версией случайного процесса $\{\mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_n}(t)|\mathcal{G}), t \in [0,a]\}$ и последовательность $\{A_n\}_{n\geqslant 1}$ возрастает, то

$$Y_t^{(n)} = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_n}(t)|\mathcal{G}) \leqslant \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_{n+1}}(t)|\mathcal{G}) = Y_t^{(n+1)} \leqslant 1 \text{ п.в.}$$

Определим случайный процесс $Y = \{Y_t, t \in [0,a]\}$ положив $Y_t = \sup_{n\geqslant 1} Y_t^{(n)}$. Случайный процесс Y измерим относительно сигма-алгебры $\mathcal{B}_a \otimes \mathcal{G}$. Для любого $t \in [0,a]$ последовательность $\{Y_t^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ возрастает и сходится п.в. к Y. По теореме об ограниченной сходимости последовательность $\{Y_t^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ сходится в среднем к Y_t и, следовательно,

$$\mathbb{E}\Big|\int_u^v Y_t^{(n)}\nu\{dt\} - \int_u^v Y_t\nu\{dt\}\Big| \leqslant \int_u^v \mathbb{E}|Y_t^{(n)} - Y_t|\nu\{dt\} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

По известной теореме Рисса найдется последовательность $\{\int_u^v Y_t^{(m_n)}\nu\{dt\}\}_{n\geqslant 1}$, которая сходится п.в. к $\int_u^v Y_t\nu\{dt$. Отсюда и из (9) следует, что

$$\int_u^v Y_t\nu\{dt\} = \lim_{n\to\infty}\int_u^v Y_t^{(m_n)}\nu\{dt\} = \\ = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(\int_u^v \mathbb{1}_{A^{m_n}}(t)\nu\{dt\}|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\int_u^v \mathbb{1}_A(t)\nu\{dt\}|\mathcal{G}) \text{ п.в.}$$

Величины справа и слева совпадают п.в. Это означает, что в качестве условного математического ожидания $\mathbb{E}(\int_u^v \mathbb{1}_A(t)\nu\{dt\}|\mathcal{G})$ можно взять случайную величину $\int_u^v Y_t\nu\{dt\}$. Случайный процесс Y соответствует случайному процессу $\mathbb{1}_A$. Это означает, что $A\in\mathcal{L}$. Доказательство, что $\mathcal{L}$ является λ-классом, завершено. По доказанному выше класс $\mathcal{L}$ содержит все прямоугольники $A\times B$ со сторонами $A\in\mathcal{B}_a$ и $B\in\mathcal{F}$. По теореме Серпинского ([21], стр. 13) сигма-алгебра, порожденная указанными прямоугольниками, содержится в λ-классе $\mathcal{L}$. По определению сигма-алгебра $\mathcal{B}_a\otimes\mathcal{F}$ порождается указанными прямоугольниками и, следовательно, $\mathcal{B}_a\otimes\mathcal{F}\subseteq\mathcal{L}$. С другой стороны класс по своему определению $\mathcal{L}$ содержится в $\mathcal{B}_a\otimes\mathcal{F}$ и, следовательно, $\mathcal{L}=\mathcal{B}_a\otimes\mathcal{F}$. Тем самым доказано, что теорема справедлива для индикаторной функции $\mathbb{1}_A$ любого множества $A\in\mathcal{B}_a\otimes\mathcal{F}$, трактуемой как случайный процесс. В силу линейного свойства интеграла и условного математического ожидания теорема справедлива для простых случайных процессов следующего вида

$$X=\sum_{k=1}^{m_n} c_k\mathbb{1}_{A_n}, A_k\in\mathcal{B}_a\otimes\mathcal{F}, c_k\in\mathbb{R}, k=1,\ldots,m_n.$$

Пусть дан любой $\mathcal{B}_a\otimes\mathcal{F}$-измеримый, неотрицательный случайный процесс $X=\{X_t, t\in[0,a]\}$, удовлетворяющий условию (7). По известной теореме ([21], стр. 22) существует возрастающая последовательность $\{X^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ простых процессов $X^{(n)}=\{X_t^{(n)}, t\in[0,a]\}$, которая поточечно сходится к X. По теореме о монотонной сходимости и по теореме о монотонной сходимости для условных математических ожиданий мы получим

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty}\int_u^v X_t^{(n)}\nu\{dt\} = \int_u^v X_t\nu\{dt\}, \\ &\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(\int_u^v X_t^{(n)}\nu\{dt\}|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\int_u^v X_t\nu\{dt\}|\mathcal{G}) \text{ п.в.} \end{aligned} \tag{10}$$

Пусть случайный процесс $Y^{(n)}=\{Y_t^{(n)}, t\in[0,a]\}$ соответствует случайному процессу $X^{(n)}$. Так как $Y^{(n)}$ является версией случайного процесса $\{\mathbb{E}(X_t^{(n)}|\mathcal{G}), t\in[0,a]\}$ и для каждого $t\in[0,a]$ последовательность $\{X_t^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ возрастает и ограничена случайной величиной X_t, то справедливы следующие неравенства

$$Y_t^{(n)}=\mathbb{E}(X_t^{(n)}|\mathcal{G})\leqslant\mathbb{E}(X_t^{(n+1)}|\mathcal{G})=Y_t^{(n+1)}\leqslant\mathbb{E}(X_t|\mathcal{G}) \text{ п.в.}$$

Определим случайный процесс $Y=\{Y_t, t\geqslant[0,a]\}$, положив $Y_t=\sup_{n\geqslant 1}Y_t^{(n)}$. Случайный процесс Y измерим относительно сигма-алгебры $\mathcal{B}_a\otimes\mathcal{G}$. Для любого

$t \in [0,a]$ последовательность $\{Y_t^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ сходится п.в. к Y_t и выполняется неравенство $Y_t \leqslant \mathbb{E}X_t|\mathcal{G})$ п.в. В силу условия (7) и теоремы Фубини мы имеем, что $\int_0^a \mathbb{E}X_t\nu\{dt\} = \mathbb{E}\int_0^a X_t\nu\{dt\} < \infty$. Поэтому $\mathbb{E}X_t < \infty$ для ν-почти всех $t \in [0,a]$. Для таких $t \in [0,a]$ справедливы неравенства $\mathbb{E}Y_t^{(n)} \leqslant \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_t|\mathcal{G})) = \mathbb{E}X_t < \infty$ и $\mathbb{E}Y_t \leqslant \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_t|\mathcal{G})) = \mathbb{E}X_t < \infty$, а также имеет место сходимость в среднем $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}|Y_t^{(n)} - Y_t| = 0$ по теореме о монотонной сходимости. Так как $\mathbb{E}|Y_t^{(n)} - Y_t| \leqslant 2\mathbb{E}X_t$ и $\int_0^a \mathbb{E}X_t\nu\{dt\} = \mathbb{E}\int_0^a X_t\nu\{dt\} < \infty$ по условию (7), то применима теорема об ограниченной сходимости, по которой

$$\mathbb{E}\Big|\int_u^v Y_t\nu\{dt\} - \int_u^v \mathbb{E}Y_t\nu\{dt\}\Big| \leqslant \mathbb{E}\int_u^v |Y_t - Y_t|\nu\{dt\}\Big| = \int_u^v \mathbb{E}|Y_t^{n)} - Y_t|\nu\{dt\} \to 0$$

при $n \to \infty$. По известной теореме Рисса найдется последовательность $\{\int_0^a Y_t^{(m_n)}\nu\{dt\}\}_{n\geqslant 1}$, которая сходится п.в. к $\int_0^a Y_t\nu\{dt\}$. Отсюда и из (10) следует, что

$$\int_u^v Y_t\nu\{dt\} = \lim_{n\to\infty}\int_u^v Y_t^{(m_n)}\nu\{dt\} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(\int_u^v X_t^{(m_n)}\nu\{dt\}|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\int_u^v X_t\nu\{dt\}|\mathcal{G}) \text{ п.в.}$$

В качестве условного математического ожидания $\mathbb{E}(\int_u^v X_t\nu\{dt\}|\mathcal{G})$ можно взять случайную величину $\int_u^v Y_t\nu\{dt\}$. Случайный процесс Y соответствует случайному процессу X.

Пусть теперь дан любой $\mathcal{B}_a \otimes \mathcal{F}$-измеримый случайный процесс $X = \{X_t, t \in [0,a]\}$, удовлетворяющий условию (7). Положительная $X^{(+)} = \{X_t^{(+)}, t \in [0,a]\}$ и отрицательная часть $X^{(-)} = \{X_t^{(-)}, t \in [0,a]\}$ случайного процесса X измеримы относительно сигма-алгебры $\mathcal{B}_a \otimes \mathcal{F}$. Они удовлетворяют условию (7), так как $\mathbb{E}\int_0^a X_t^{(\pm)}\nu\{dt\} \leqslant \mathbb{E}\int_0^a |X_t|\nu\{dt\}$. Для неотрицательных случайных процессов $X^{(+)}$ и $X^{(-)}$ теорема справедлива. Пусть случайные процессы $Y = \{Y_t, t \in [0,a]\}$ и $Z = \{Z_t, t \in]0,a]\}$ соответствуют случайным процессам $X^{(+)}$ и $X^{(-)}$. Случайный процесс $Y - Z$ является $\mathcal{B}_a \otimes \mathcal{G}$-измеримой версией случайного процесса $\{\mathbb{E}(X_t|\mathcal{G}), t \in [0,a]\}$, так как $X = X^{(+)} - X^{(-)}$ и $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X_t^{(+)}|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(X_t^{(-)}|\mathcal{G})$. Он удовлетворяет равенству (8). Это следует из следующих соотношений

$$\int_u^v (Y_t - Z_t)\nu\{dt\} = \int_u^v Y_t\nu\{dt\} - \int_u^v Z_t\nu\{dt\} =$$
$$= \mathbb{E}(\int_u^v X_t^{(+)}\nu\{dt\}|\mathcal{G}) - \mathbb{E}(\int_u^v X_t^{(-)}\nu\{dt\}|\mathcal{G}) =$$
$$= \mathbb{E}(\int_u^v (X_t^{(+)} - X_t^{(-)})\nu\{dt\}|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\int_u^v X_t\nu\{dt\}|\mathcal{G}).$$

Случайный процесс $Y - Z = \{Z_t - Y_t, t \in [0,a]\}$ соответствует случайному процессу $X = \{X_t, t \in [0,a]\}$.

Предположим теперь, что мера ν счетно конечна. В этом случае найдутся множества $B_n \in \mathcal{B}_a, n \in \mathbb{N}$ такие, что $\nu\{B_n\} < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $[0,a] = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$. Можно считать, что множества $B_n, n \in \mathbb{N}$ попарно не пересекаются. В противном случае вместо B_n можно взять $B'_1 = B_1, B'_{n+1} = B_{n+1} \setminus \cup_{k=1}^n B_k$ для $n \in \mathbb{N}$. Множества $B'_n, n \in \mathbb{N}$, как нетрудно видеть, попарно не пересекаются, $\nu\{B'_n\} < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $[0,a] = \cup_{n=1}^\infty B'_n$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ мера $\nu_n\{A \cap B_n\}, A \in \mathcal{B}_a$, конечна. По доказанному выше для любого измеримого неотрицательного случайного процесса $X = \{X_t, t \in [0,a]\}$, удовлетворяющего условию (7), и для любой сигма-алгебры $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ существует $\mathcal{B}_a \otimes \mathcal{G}$-измеримый случайный процесс $Y^{(n)} = \{Y_t^{(n)}, t \in [0,a]\}$ такой, что он является версией случайного процесса $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{G}, t \in [0,a]\}$ и выполняются следующие равенства

$$\int_{B_n \cap [u,v]} Y_t^{(n)} \nu\{dt\} = \int_u^v Y_t^{(n)} \nu_n\{dt\} =$$

$$= \mathbb{E}(\int_u^v X_t \nu_n\{dt\}|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\int_{B_n \cap [u,v]} X_t \nu_n\{dt\}|\mathcal{G}).$$

Определим случайный процесс $Y = \{Y_t, t \in [0,a]\}$, положив $Y_t = \sum_{n=1}^\infty Y_t^{(n)} \mathbb{1}_{B_n}$. Нетрудно видеть, что случайный процесс Y является $\mathcal{B}_a \otimes \mathcal{G}$-измеримым. Суммируя, мы получим

$$\int_u^v Y_t \nu\{dt\} = \sum_{n=1}^\infty \int_{B_n \cap [u,v]} Y_t^{(n)} \nu\{dt\} = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{E}(\int_{B_n \cap [u,v]} X_t \nu_n\{dt\}|\mathcal{G}) =$$

$$= \mathbb{E}(\sum_{n=1}^\infty \int_{B_n \cap [u,v]} X_t \nu_n\{dt\}|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\int_u^v X_t \nu\{dt\}|\mathcal{G}) \text{ п.в.}$$

Предпоследнее равенство выполняется по известной теореме ([21], стр. 102). В качестве условного математического ожидания $\mathbb{E}(\int_u^v X_t \nu\{dt\}|\mathcal{G})$ можно взять случайную величину $\int_u^v Y_t \nu\{dt\}$. Случайный процесс Y соответствует случайному процессу X.

Общий случай можно доказать уже знакомым образом. Пусть дан измеримый случайный процесс $X = \{X_t, t \in [0,a]\}$, удовлетворяющий условию (7). Теорема справедлива для положительной части $X^{(+)} = \{X_t^{(+)}, t \in [0,a]\}$ и отрицательной части $X^{(-)} = \{X_t^{(-)}, t \in [0,a]\}$ случайного процесса X. Пусть случайные процессы $Y = \{Y_t, t \in [0,a]\}$ и $Z = \{Z_t, t \in]0,a]\}$ соответствуют случайным процессам $X^{(+)}$ и $X^{(-)}$. Разность $Y - Z$ соответствует случайному процессу X. Теорема доказана. $\square$

3. Существование решений обратных стохастических уравнений

В этом разделе доказаны три теоремы. Одна из них содержит достаточные условия для существования решения обратного стохастического уравнения в классе случайных процессов, описанных в теореме 1. Две другие теоремы содержат точные решения линейных стохастических дифференциальных уравнений.

Теорема 3. *Пусть даны $\mathcal{F}_a$-измеримая случайная величина ξ и $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_a \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$-измеримая функция $\mu : \Omega \times [0,a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что*

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant a} |\mu(t,x) - \mu(t,y)| \leqslant c|x-y| \text{ для некоторого } c>0 \text{ и для любых } x,y \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Если $\mathbb{E}|\xi|^p < \infty$ *и* $\mathbb{E}\int_0^a |\mu(t,0)|^p dt < \infty$ *для некоторого числа* $p > 1$, *тогда существует единственное с точностью до неразличимости регулярное справа решение* $X = \{X_t, t \in [0,a]\}$ *обратного стохастического дифференциального уравнения (1) такое, что*

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a} |X_t|^p) < \infty. \tag{12}$$

Доказательство. Теорема будет доказана методом последовательного приближения. Именно этим методом обычно ([8], стр. 217-263) доказывают существование сильного решения стохастических дифференциальных уравнений. Мы будем следовать плану, намеченному в статье [10]. Новшество нашего доказательства состоит в привлечении более простых приемов и подробных объяснениях применяемой математической техники. Например, мы обходимся без неравенства Гронуолла, используемого во всех известных доказательствах единственности решений стохастических дифференциальных уравнений.

Определим случайные процессы $X^{(0)} = \{X_t^{(0)}, t \in [0,a]\}$ и $X^{(n)} = \{X_t^{(n)}, t \in [0,a]\}, n \in \mathbb{N}$, положив $X_t^{(0)} = 0$ для всех $t \in [0,a]$ и

$$X_t^{(n+1)} = M_t^{(n)} - \int_0^t \mu(s, X_s^{(n)})ds, t \in [0,a], \tag{13}$$

где случайный процесс $M^{(n)} = \{M_t^{(n)}, t \in [0,a]\}$ является регулярной справа версией мартингала $\{\mathbb{E}(\xi + \int_0^a \mu(s, X_s^{(n)})ds|\mathcal{F}_t), t \in [0,a]\}$. Известно ([21], стр. 84), что регулярные справа случайные процессы измеримы и, следовательно все их траектории являются борелевскми функциями. Поэтому для любого $\omega \in \Omega$ существует интеграл Лебега $\int_0^a \mu(\omega, s, X_s(\omega))ds$. По традиции переменную ω не указывают.

Докажем, что для любого $n \in \mathbb{N}$ случайный процесс $X^{(n)}$ согласован с фильтрацией $\mathbb{F}$, обладает свойством регулярности справа, и удовлетворяет условию

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a} |X_t^{(n)}|^p) < \infty. \tag{14}$$

Это утверждение справедливо для случайного процесса $X^{(0)}$, тождественно равного нулю. Далее можно рассуждать по индукции. Предположим, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ случайный процесс $X^{(n)}$ обладает всеми перечисленными свойствами. Из определения (13) следует, что случайный процесс $X^{(n+1)}$ является регулярным справа. Убедимся, что он согласован с фильтрацией $\mathbb{F}$. Для этого достаточно доказать, что для любого $t \in [0,a]$ случайная величина $\int_0^t \mu(s, X_s^{(n)})ds$ измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_t$. С этой целью разобьем сегмент $[0,t]$ точками $s_{m,k} = k2^{-m}t, k = 0,\ldots,2^m, m \in \mathbb{N}$, и определим случайный процесс $\eta^{(m)} = \{\eta_s^{(m)}, s \in [0,t]\}$, положив $\eta_0^{(m)} = X_0^{(n)}, \eta_s^{(m)} = X_{s_{m,k}}^{(n)}$ для $s \in (s_{n,k-1}, s_{n,k}], k = 1,\ldots,2^m$. Так как случайный процесс $X^{(n)}$ непрерывен справа и выполняется условие (11), то

$$\lim_{m\to\infty} \mu(s, \eta_s^{(m)}) = \mu(s, X_s^{(n)}) \text{ для любого } s \in [0,t].$$

В силу (11) справедливы следующие оценки

$$|\mu(s,\eta_s^{(m)})| = |\mu(s,0)+\mu(s,\eta_s^{(m)})-\mu(s,0)| \leqslant |\mu(s,0)|+c|\eta_s^{(m)}| \leqslant |\mu(s,0)|+\sup_{0\leqslant s\leqslant a} |X_s^{(n)}|.$$

Справа стоит сумма случайных величин п.в. конечных, так как они имеют конечный момент p-порядка в силу условия теоремы и индуктивного предположения (14). По теореме об ограниченной сходимости мы получим

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{2^m}\mu(s_{m,k},\eta^{(m)}_{s_{m,k}})(s_{m,k}-s_{m,k-1})=\lim_{m\to\infty}\int_0^t\mu(s,\eta^{(m)}_s)ds=\int_0^t\mu(s,X^{(n)}_s)ds \text{ п.в.}$$

Для каждого $m\in\mathbb{N}$ сумма, стоящая слева под знаком предела, является $\mathcal{F}_t$-измеримой случайной величиной. Случайная величина $\int_0^t\mu(s,X^{(n)}ds$ измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_t$, так как она является пределом п.в. некоторой последовательности $\mathcal{F}_t$-измеримых случайных величин на полном вероятностном пространстве.

Убедимся, что выполняется (14) с $n+1$ вместо n. С помощью интегрального неравенства Гельдера и неравенства $|\alpha+\beta|^p\leqslant 2^p(|\alpha|^p+|\beta|^p)$ для любых вещественных чисел α и β мы получим

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X^{(n+1)}_t|^p)&\leqslant 2^p\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|M^{(n)}_t|^p)+2^p\mathbb{E}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}\Big|\int_0^t\mu(s,X^{(n)}_s)ds\Big|^p\Big)\leqslant\\&\leqslant 2^p\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|M^{(n)}_t|^p)+(2a^{1/q})^p\mathbb{E}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}\int_0^t|\mu(s,X^{(n)}_s)|^pds\Big),\end{aligned}\tag{15}$$

где $q=p/(p-1)$. Второе слагаемое можно оценить с помощью (11) и (14) следующим образом

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}\int_0^t|\mu(s,X^{(n)}_s)|^pds\Big)&\leqslant\mathbb{E}\Big(\int_0^a|\mu(s,X^{(n)}_s)|^pds\Big)=\\&=\mathbb{E}\int_0^a|\mu(s,X^{(n)}_s)-\mu(s,0)+\mu(s,0)|^p)ds\leqslant\\&\leqslant(2c)^p\mathbb{E}\int_0^a(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X^{(n)}_s|^p)ds+2^p\mathbb{E}\int_0^a|\mu(s,0)|^p)ds\leqslant\\&\leqslant(2c)^pa\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X^{(n)}_s|^p)+2^p\mathbb{E}\int_0^a|\mu(s,0)|^p)ds<\infty.\end{aligned}$$

Обратимся к оценке первого слагаемого справа в (15). Привлекая максимальное неравенство ([21], стр. 134) для мартингалов, неравенство Иенсена для условных математических ожиданий и неравенство Гельдера, мы получим

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|M_t^{(n)}|^p)\leqslant q^p\mathbb{E}|M_a^{(n)}|^p=q^p\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\Big(\int_0^a \mu(s,X_s^{(n)})ds\Big|\mathcal{F}_a\Big)\Big)^p\leqslant$$
$$\leqslant q^p\mathbb{E}\Big(\mathbb{E}\Big|\int_0^a \mu(s,X_s^{(n)})ds\Big|^p\Big|\mathcal{F}_a\Big)\Big)=q^p\mathbb{E}\Big|\int_0^a \mu(s,X_s^{(n)})ds\Big|^p\leqslant$$
$$\leqslant (qa^{1/q})^p\mathbb{E}\int_0^a|\mu(s,X_s^{(n)})|^pds=$$
$$=(qa^{1/q})^p\mathbb{E}\int_0^a|\mu(s,X_s^{(n)})-\mu(s,0)+\mu(s,0)|^pds\leqslant$$
$$\leqslant(2qa^{1/q})^p\mathbb{E}\int_0^a|\mu(s,X_s^{(n)})-\mu(s,0)|^pds+(2qa^{1/q})^p\mathbb{E}\int_0^a|\mu(s,0)|^pds\leqslant$$
$$\leqslant(2qa^{1/q}c)^p\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant s\leqslant a}|X_s^{(n)}|^p)+(2qa^{1/q})^p\mathbb{E}\int_0^a|\mu(s,0)|^pds<\infty.$$

Утверждение (14) доказано.

Докажем, что для любого $n\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant a}\mathbb{E}|X_t^{(n+1)}-X_t^{(n)}|^2\leqslant\frac{(ca^{1/q})^{np}}{n!}\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant s\leqslant a}|X_s^{(1)}|^p). \tag{16}$$

Мартингалы $M^{(n)}$ и $\{\mathbb{E}(\xi+\int_0^a\mu(s,X_s^{(n)})ds|\mathcal{F}_t),t\in[0,a]\}$ являются версиями друг друга. Поэтому (13) для n и $n+1$ можно переписать в следующем виде

$$X_t^{(n)}=\mathbb{E}(\xi+\int_0^a\mu(s,X_s^{(n-1)})ds|\mathcal{F}_t)-\int_0^t\mu(s,X_s^{(n-1)})ds=$$
$$=\mathbb{E}(\xi+\int_t^a\mu(s,X_s^{(n-1)})ds|\mathcal{F}_t)\text{ п.в.},$$

$$X_t^{(n+1)}=\mathbb{E}(\xi+\int_0^a\mu(s,X_s^{(n)})ds|\mathcal{F}_t)-\int_0^t\mu(s,X_s^{(n)})ds=$$
$$=\mathbb{E}(\xi+\int_t^a\mu(s,X_s^{(n)})ds|\mathcal{F}_t)\text{ п.в.}$$

Из этих равенств и из условия (11) следует, что

$$|X_t^{(n+1)}-X_t^{(n)}|\leqslant\mathbb{E}(\int_t^a|\mu(s,X_s^{(n)})-\mu(s,X_s^{(n-1)})|ds|\mathcal{F}_t)\leqslant$$
$$\leqslant c\mathbb{E}(\int_t^a|X_s^{(n)}-X_s^{(n-1)}|ds|\mathcal{F}_t)\leqslant ca^{1/q}\mathbb{E}(\int_t^a|X_s^{(n)}-X_s^{(n-1)}|^pds)^{1/p}|\mathcal{F}_t)\text{ п.в.}$$

На последнем этапе было применено неравенство Гельдера. С помощью неравенства Иенсена для условных математических ожиданий для выпуклых функций мы получим

$$\mathbb{E}|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^p \leqslant (ca^{1/q})^p \mathbb{E}|\mathbb{E}(\int_t^a |X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|^p ds)^{1/p}|\mathcal{F}_t)|^p \leqslant$$
$$\leqslant (ca^{1/q})^p \mathbb{E}\mathbb{E}(\int_t^a |X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|^p ds|\mathcal{F}_t) =$$
$$= (ca^{1/q})^p \mathbb{E}(\int_t^a |X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|^p ds = (ca^{1/q})^p \int_t^a \mathbb{E}|X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|^p ds.$$

Последнее равенство выполняется по теореме Фубини. Неравенство между первым и последним выражениями имеет итерационный характер. Многократная итерация ведет к следующим неравенствам

$$\mathbb{E}|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^p \leqslant (ca^{1/q})^p \int_t^a \mathbb{E}|X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|^2 ds =$$
$$= (ca^{1/q})^p \int_t^a \mathbb{E}|X_{s_n}^{(n)} - X_{s_n}^{(n-1)}|^p ds_n \leqslant$$
$$\leqslant (ca^{1/q})^{2p} \int_t^a \int_{s_n}^a \mathbb{E}|X_{s_{n-1}}^{(n-1)} - X_{s_{n-1}}^{(n-2)}|^p ds_{n-1} ds_n \leqslant \cdots$$
$$\cdots \leqslant (ca^{1/q})^{np} \int_t^a \int_{s_n}^a \int_{s_{n-1}}^a \cdots \int_{s_1}^a \mathbb{E}|X_{s_1}^{(1)} - X_{s_1}^{(0)}|^p ds_1 \cdots ds_{n-1} ds_n \leqslant$$
$$\leqslant (ca^{1/q})^{np} \mathbb{E}(\sup_{0\leqslant s_1\leqslant a} |X_{s_1}^{(1)}|^p) \int_t^a \int_{s_n}^a \int_{s_{n-1}}^a \cdots \int_{s_1}^a ds_1 \cdots ds_{n-1} ds_n.$$

Последний многократный интеграл равен $(a-t)^n/n!$. Отсюда следует неравенство (16). Из неравенства (16) и неравенства Минковского следует, что

$$(\mathbb{E}|X_t^{(n+m+1)} - X_t^{(m)}|^p)^{1/p} = (\mathbb{E}|\sum_{k=m}^{n+m}(X_t^{(k+1)} - X_t^{(k)})|^p)^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=m}^{n+m}(\mathbb{E}|X_t^{(k+1)} - X_t^{(k)}|^p)^{1/p} \leqslant (\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant s\leqslant a}|X_s^{(1)}|^p)^{1/p} \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(ca^{1/q})^n}{(n!)^{1/p}}.$$

Эти неравенства выполняются равномерно по $t \in [0, a]$. Так как остаток ряда стремится к нулю при $m \to \infty$, то

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{n\geqslant 1} \sup_{0\leqslant t\leqslant a} E|X_t^{(n+m+1)} - X_t^{(m)}|^p = 0. \tag{17}$$

Из условия (11) и определения (13) следует, что

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t^{(n+m+1)} - X_t^{(m)}| \leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant a}|M_t^{(n+m+1)} - M_t^{(m)}| + c\int_0^a |X_s^{(n+m+1)} - X_s^{(m)}| ds \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant a}|M_t^{(n+m+1)} - M_t^{(m)}| + ca^{1/q}(\int_0^a |X_s^{(n+m+1)} - X_s^{(m)})|^p ds)^{1/p}.$$

На последнем этапе было применено неравенство Гельдера. Разность $M^{(n+m+1)} - M^{(m)}$ двух регулярных справа $\mathbb{F}$-мартингалов является регулярным справа $\mathbb{F}$-мартингалом. С помощью максимального неравенства для мартингалов ([21], стр. 134) и знакомого неравенства $|\alpha+\beta|^p \leqslant 2^p(|\alpha|^p+|\beta|^p)$ для вещественных чисел α и β мы получим

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant t\leqslant a}|X_t^{(n+m+1)} - X_t^{(m)}|^p) \leqslant (2q)^p\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|M_t^{(n+m+1)} - M_t^{(m)}|^p)+$$
$$+ (2ca^{1/q})^p\mathbb{E}(\int_0^a |X_s^{(n+m+1)} - X_s^{(m)}|^p ds) \leqslant$$
$$\leqslant (2q)^p\mathbb{E}(|M_a^{(n+m+1)} - M_a^{(m)}|^p + (2ca^{1/q})^p\mathbb{E}(\int_0^a |X_s^{(n+m+1)} - X_s^{(m)}|^p ds).$$

Мартингалы $M^{(n+m+1)} - M^{(m)}$ и $\{\mathbb{E}(\int_0^a(\mu(s,X_s^{(n+m+1)}) - \mu(s,X_s^{(m)}))ds|\mathcal{F}_t), t \in [0,a]\}$ являются версиями друг друга. Отсюда и из условия (11) следует, что

$$\mathbb{E}|M_a^{(n+m+1)} - M_a^{(m)}|^p = \mathbb{E}\Big|\mathbb{E}(\int_0^a(\mu(s,X_s^{(n+m+1)}) - \mu(s,X_s^{(m)}))ds|\mathcal{F}_a)\Big|^p \leqslant$$
$$\leqslant c^p\mathbb{E}\Big|\int_0^a |X_s^{(n+m+1)}) - X_s^{(m)})|ds\Big|^p \leqslant (ca^{1/q})^p\mathbb{E}\int_0^a |X_s^{(n+m+1)} - X_s^{(m)}|^p ds.$$

На последнем этапе было использовано неравенство Гельдера. Отсюда и из предыдущих неравенств следует, что

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t^{(n+m+1)} - X_t^{(m)}|^p) \leqslant 2(2ca^{1/q})^p\mathbb{E}(\int_0^a |X_s^{(n+m+1)} - X_s^{(m)}|^p ds) =$$
$$= 2(2ca^{1/q})^p\int_0^a \mathbb{E}|X_s^{(n+m+1)} - X_s^{(m)}|^p ds.$$

На последнем этапе была использована теорема Фубини. Отсюда и из (17) следует, что

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{n\geqslant 1}\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t^{(n+m+1)} - X_t^{(m)}|^p) = 0.$$

По теореме 1 существуют регулярный справа случайный процесс $X = \{X_t, t \in [0,a]\}$ и последовательность $\{m_n\}_{n\geqslant 1}$ индексов такие, что

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t^{(m_n)} - X_t| = 0 \text{ п.в. и } \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(\sup_{0\leqslant t\leqslant a}|X_t^{(n)} - X_t|^p) = 0. \tag{18}$$

Докажем, что случайный процесс X является решением уравнения (1). С этой целью заметим, что

$$|X_t^{(n+1)} - \mathbb{E}(\xi + \int_t^a \mu(s,X_s)ds|\mathcal{F}_t)| = |\mathbb{E}(\int_t^a (\mu(s,X_s^{(n)}) - \mu(s,X_s))ds|\mathcal{F}_t)| \leqslant$$
$$\leqslant c\mathbb{E}(\int_0^a |X_s^{(n)} - X_s|ds|\mathcal{F}_t) = ca^{1/q}\mathbb{E}(\int_0^a |X_s^{(n)} - X_s|^p ds)^{1/p}|\mathcal{F}_t).$$

Эти неравенства являются следствиями условия (11) и неравенства Гельдера. С помощью знакомых рассуждений можно убедиться, что

$$\mathbb{E}(|X_t^{(n+1)} - \mathbb{E}(\xi + \int_t^a \mu(s, X_s)ds|\mathcal{F}_t|)|^p) \leqslant (ca^{1/q})^p \mathbb{E}\Big|\mathbb{E}(\int_0^a |X_s^{(n)} - X_s|^p ds)^{1/p}|\mathcal{F}_t)\Big|^p \leqslant$$
$$\leqslant (ca^{1/q})^p \int_0^a \mathbb{E}|X_s^{(n)} - X_s|^p ds.$$

Отсюда и из (18) следует, что

$$\mathbb{E}(|X_t - \mathbb{E}(\xi + \int_t^a \mu(s, X_s)ds|\mathcal{F}_t|)|^p) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_t^{(n+1)} - \mathbb{E}(\xi + \int_t^a \mu(s, X_s)ds|\mathcal{F}_t|)|^p) \leqslant$$
$$\leqslant (ca^{1/q})^p \lim_{n\to\infty} \int_0^a \mathbb{E}|X_s^{(n)} - X_s|^p ds = 0$$

и, следовательно, $X_t = \mathbb{E}(\xi + \int_t^a \mu(s, X_s)ds|\mathcal{F}_t)$ п.в. Вспомним (см. предисловие), что условное математическое ожидание должно быть записано в следующем виде

$$\mathbb{E}(\xi + \int_t^a \mu(s, X_s)ds|\mathcal{F}_t) = M_t - \int_0^t \mu(s, X_s)ds,$$

где случайный процесс $M = \{M_t, t \in [0, a]\}$ является регулярной справа версией мартингала $\{\mathbb{E}(\xi + \int_0^a \mu(s, X_s)ds|\mathcal{F}_t), t \in [0, a]\}$ относительно фильтрации $\mathbb{F}$. Для любого $t \in [0, a]$ выполняется равенство $X_t = M_t - \int_0^t \mu(s, X_s)ds$ п.в. С обоих сторон этого равенства стоят регулярные справа случайные процессы и, следовательно, равенство выполняется для всех $t \in [0, a]$ на некотором событии $\Omega' \in \mathcal{F}$ единичной вероятности.

Докажем, что любые два решения уравнения (1) со свойством (12) неотличимы. Пусть имеются два решения $X = \{X_t, t \in [0, a]\}$ и $X' = \{X'_t, t \in [0, a]\}$ уравнения (1) со свойством (12). С помощью условия (11), неравенства Гельдера и теоремы Фубини мы получим

$$\mathbb{E}|X_t - X'_t|^p = \mathbb{E}\Big|\mathbb{E}(\xi + \int_t^a \mu(s, X_s)ds|\mathcal{F}_t) - \mathbb{E}(\xi + \int_t^a \mu(s, X'_s)ds|\mathcal{F}_t)\Big|^p =$$
$$= \mathbb{E}\Big|\mathbb{E}(\int_t^a (\mu(s, X_s) - \mu(s, X'_s))ds|\mathcal{F}_t)\Big|^p \leqslant \mathbb{E}|\int_t^a (\mu(s, X_s) - \mu(s, X'_s))ds\Big|^p \leqslant$$
$$\leqslant (ca^{1/q})^p \mathbb{E}\int_t^a |X_s - X'_s)|^p ds = (ca^{1/q})^p \int_t^a \mathbb{E}|X_s - X'_s)|^p ds.$$

Далее можно рассуждать как при доказательстве неравенства (16) и убедиться, что

$$\mathbb{E}|X_t - X'_t|^p \leqslant \mathbb{E}(\sup_{0\leqslant s\leqslant a} |X_s - X'_s|^p) \frac{(ca^{1/q})^{np}}{n!}.$$

Полагая $n \to \infty$, мы получим равенство $\mathbb{E}|X_t - X'_t|^p = 0$ и, следовательно, $X_t = X'_t$ п.в. Так как случайные процессы X и X' регулярны справа, то они неотличимы. Теорема доказана. □

Предположение о том, что $p > 1$, существенно для справедливости теоремы 3. Именно это предположение дает возможность использовать максимальное неравенство для мартингалов, которое играет ключевую роль в доказательстве. Случай $p = 1$ был изучен в статье [1]. Процитируем нужный нам результат в виде следующей теоремы.

Теорема 4. *Если выполнены условия теоремы 3 с* $p = 1$, *тогда существует единственный с точностью до неразличимости регулярный справа случайный процесс* $X = \{X_t, t \in [0, a]\}$ *такой, что*

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^a |X_t - \mathbb{E}(X_a + \int_t^a \mu(s, X_s)ds|\mathcal{F}_t)|dt\Big) = 0.$$

Предположение о том, что $p > 1$, при доказательстве единственности решения в теореме 3 не использовалось. Поэтому оно годится для доказательства единственности решения в рассматриваемом случае случае $p = 1$.

В следующих двух теоремах указаны точные решения линейного обратного стохастического дифференциального уравнения.

Теорема 5. *Пусть даны* $\mathcal{F}_a$ *– измеримая случайная величина* ξ *и непрерывные справа случайные процессы* $\eta = \{\eta_t, t \in [0, a]\}$ *и* $\zeta = \{\zeta_t, t \in [0, a]\}$ *такие, что*

$$\mathbb{E}|\xi|^p < \infty, \mathbb{E}\exp\Big\{q\int_0^a |\eta_t|dt\Big\} < \infty, \mathbb{E}\int_0^a |\zeta_t|^p ds < \infty \tag{19}$$

для некоторого $p > 1$, *где* $q = p/(p-1)$. *Тогда линейное обратное стохастическое дифференциальное уравнение*

$$X_t = \mathbb{E}(\xi + \int_t^a (\eta_s X_s + \zeta_s)ds|\mathcal{F}_t), X_a = \xi, \tag{20}$$

имеет единственное решение $X = \{X_t, t \in [0, a]\}$,

$$X_t = e^{-u_t}M_t^{(1)} + e^{-u_t}M_t^{(2)} - e^{-u_t}\int_0^t \zeta_s e^{u_s}ds, \tag{21}$$

где $M^{(1)} = \{M_t^{(1)}, t \in [0, a]\}$ *и* $M^{(2)} = \{M_t^{(2)}, t \in [0, a]\}$ *являются регулярными справа версиями* $\mathbb{F}$*-мартингалов* $\{\mathbb{E}(\xi e^{u_a}|\mathcal{F}_t), t \in [0, a]\}$ *и* $\{\mathbb{E}(\int_0^a \zeta_s e^{u_s}ds|\mathcal{F}_t), t \in [0, a]\}$ *и* $u_t = \int_0^t \eta_s ds$. *Случайный процесс* X *удовлетворяет следующему условию*

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant a} \mathbb{E}|X_t| \leqslant (\mathbb{E}\exp\{q\int_0^a |\eta_s|ds\})^{1/q}\Big(\mathbb{E}|\xi|^p)^{1/p} + (\mathbb{E}\int_0^a |\zeta_s|^p ds\})^{1/p}\Big). \tag{22}$$

Доказательство. Сначала мы докажем утверждение (22). Для любого $t \in [0, a]$ равенство (21) можно переписать в следующем виде

$$X_t = \mathbb{E}(\xi e^{u_a - u_t} + \int_0^a \zeta_s e^{u_s - u_t}ds - \int_0^t \zeta_s e^{u_s - u_t}|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\xi e^{u_a - u_t} + \int_t^a \zeta_s e^{u_s - u_t}ds|\mathcal{F}_t) \text{ п.в.}$$

С помощью неравенства Иенсена для условных математических ожиданий и неравенства Гельдера мы получим

$$\mathbb{E}|X_t| \leqslant \mathbb{E}(\mathbb{E}(|\xi e^{u_a-u_t} + \int_t^a \zeta_s e^{u_s-u_t}ds||\mathcal{F}_t)) \leqslant \mathbb{E}|\xi e^{u_a-u_t} + \int_t^a \zeta_s e^{u_s-u_t}ds| \leqslant$$
$$\leqslant (\mathbb{E}|\xi|^p)^{1/p}(\mathbb{E}e^{q(u_a-u_t)})^{1/q} + \mathbb{E}\Big((\int_t^a |\zeta_s|^p ds)^{1/p}(\int_t^a e^{q(u_s-u_t)}ds)^{1/q}\Big) \leqslant$$
$$\leqslant (\mathbb{E}|\xi|^p)^{1/p}(\mathbb{E}e^{q(u_a-u_t)})^{1/q} + (\mathbb{E}\int_t^a |\zeta_s|^p ds)^{1/p}(\mathbb{E}\int_t^a e^{q(u_s-u_t)}ds)^{1/q}.$$

Величины $u_a - u_t$ и $u_s - u_t$ можно оценить следующим образом

$$|u_a - u_t| = |\int_a^t \eta_s ds| \leqslant \int_0^a |\eta_s|ds, |u_s - u_t = |\int_t^s \eta_v dv| \leqslant \int_0^a |\eta_v|dv.$$

В результате мы получим, что

$$\mathbb{E}|X_t| \leqslant (\mathbb{E}|\xi|^p)^{1/p}(\mathbb{E}e^{q(u_a-u_t)})^{1/q} + (\mathbb{E}\int_t^a |\zeta_s|^p ds)^{1/p}(\mathbb{E}\int_t^a e^{q(u_s-u_t)}ds)^{1/q} \leqslant$$
$$\leqslant (\mathbb{E}\exp\{q\int_0^a |\eta_s|ds\})^{1/q}\Big((\mathbb{E}|\xi|^p)^{1/p} + (\mathbb{E}\int_0^a |\zeta_s|^p ds\})^{1/p}\Big).$$

Отсюда следует утверждение (22).

Фиксируем элементарное событие $\omega \in \Omega$. Найдем решение $Y = \{Y_t, t \in [0,a]\}$ следующего интегрального уравнения

$$Y_t = \xi(\omega) + \int_t^a (\eta_s(\omega)Y_s + \zeta_s(\omega))ds, \tag{23}$$

удовлетворяющего краевому условию $Y_a = \xi(\omega)$. Далее мы будем опускать аргумент ω. С помощью дифференцирования можно убедиться, что искомая функция Y должна удовлетворять следующему линейному дифференциальному уравнению

$$\frac{dY_t}{dt} + \eta_t Y_t = -\zeta_t, t \in [0,a].$$

В курсах по дифференциальным уравнениям (см., например, [30], стр. 99–100) можно найти правило решения линейного дифференциального уравнения с помощью подходящего интегрирующего множителя. В данном случае в качестве интегрирующего множителя можно взять функцию $u_t = \int_0^t \eta_v dv, t \in [0,a]$. Решение указанного дифференциального уравнения можно записать в следующем виде

$$Y_t = e^{-u_t}(c - \int_0^t \zeta_s e^{u_s}ds), \tag{24}$$

где c – произвольная постоянная. Постоянную c можно конкретизировать с помощью краевого условия $Y_a = \xi$, где

$$\xi = e^{-u_a}(c - \int_0^a \zeta_s e^{u_s}ds).$$

Вычислив c и подставив ее в решение (24), мы получим

$$Y_t = e^{-u_t}(c - \int_0^t \zeta_s e^{u_s} ds) = \xi e^{u_a - u_t} + e^{-u_t} \int_t^a \zeta_s e^{u_s} ds. \qquad (25)$$

Эти равенства справедливы для любого $\omega \in \Omega$. Тем самым мы построили случайные процессы $\{u_t, t \in [0,a]\}$ и $Y = \{Y_t, t \in [0,a]\}$. Перепишем представление Y_t в следующем виде

$$Y_t = \xi e^{u_a - u_t} + e^{-u_t} \int_t^a \zeta_s e^{u_s} ds = \xi e^{u_a - u_t} + e^{-u_t}(D - \int_0^t \zeta_s e^{u_s} ds), \qquad (26)$$

где $D = \int_0^a \zeta_s e^{u_s} ds$. Для любого $t \in [0,a]$ случайные величины $\int_0^t \zeta_s e^{u_s} ds$ и e^{-u_t} измеримы относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_t$. Отсюда и из (25) следует, что

$$\mathbb{E}(Y_t|\mathcal{F}_t) = e^{-u_t}\mathbb{E}(\xi e^{u_a}|\mathcal{F}_t) + e^{-u_t}\mathbb{E}(D|\mathcal{F}_t) - e^{-u_t} \int_0^t \zeta_s e^{u_s} ds. \qquad (27)$$

Обозначим $M^{(1)} = \{M_t^{(1)}, t \in [0,a]\}$ и $M^{(2)} = \{M_t^{(2)}, t \in [0,a]\}$ регулярные справа версии $\mathbb{F}$-мартингалов $\{\mathbb{E}(\xi e^{u_a}|\mathcal{F}_t), t \in [0,a]\}$ и $\{\mathbb{E}(D|\mathcal{F}_t), t \in [0,a]\}$. Докажем, что случайный процесс

$$X = \{X_t, t \in [0,a]\}, X_t = e^{-u_t} M_t^{(1)} + e^{-u_t} M_t^{(2)} - e^{-u_t} \int_0^t \zeta_s e^{u_s} ds, \qquad (28)$$

является решением уравнения (20). Из (25) и (26) следует, что $X_a = \mathbb{E}(Y_a|\mathcal{F}_a) = Y_a = \xi$ п.в. Случайный процесс X согласован с фильтрацией и обладает свойством регулярности справа. Фиксируем $t \in [0,a]$. Подставим случайный процесс (28) в выражение справа в (20) и воспользуемся теоремой 2. По теореме 2 найдется $\mathcal{B}_a \otimes \mathcal{F}_t$-измеримый случайный процесс $Z = \{Z_s, s \in [0,a]\}$, который является версией случайного процесса $\{\mathbb{E}(\eta_s + \zeta_s|\mathcal{F}_t), s \in [0,a]\}$, и удовлетворяет условию

$$\mathbb{E}(\xi + \int_t^a (\eta_s X_s + \zeta_s) ds|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{F}_t) + \int_t^a Z_s ds, \qquad (29)$$

Случайную величину Z_s можно преобразовать следующим образом

$$\begin{aligned} Z_s &= \mathbb{E}(\eta_s X_s + \zeta_s)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}\Big(\eta_s(e^{-u_s} M_s^{(1)} + e^{-u_s} M_s^{(2)} - e^{-u_s} \int_0^s \zeta_v e^{u_v} dv) + \zeta_s|\mathcal{F}_t\Big) = \\ &= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(\eta_s(\xi e^{-u_s} e^{u_a} + e^{-u_s} \int_0^a \zeta_v e^{u_v} dv - e^{-u_s} \int_0^s \zeta_v e^{u_v} dv) + \zeta_s|\mathcal{F}_s)|\mathcal{F}_t\Big) = \\ &= \mathbb{E}\Big(\mathbb{E}(\eta_s(\xi e^{u_a - u_s} + e^{-u_s} \int_s^a \zeta_v e^{u_v} dv) + \zeta_s|\mathcal{F}_s)|\mathcal{F}_t\Big) = \\ &= \mathbb{E}\Big(\eta_s(\xi e^{u_a - u_s} + e^{-u_s} \int_s^a \zeta_v e^{u_v} dv) + \zeta_s|\mathcal{F}_t\Big). \end{aligned}$$

Подставим преобразованное выражение в (29) и воспользуемся теоремой 2. Мы получим

$$\mathbb{E}(\xi + \int_t^a (\eta_s X_s + \zeta_s) ds | \mathcal{F}_t) =$$

$$\mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_t) + \int_t^a \mathbb{E}\Big(\eta_s (\xi e^{u_a - u_s} + e^{-u_s} \int_s^a \zeta_v e^{u_v} dv) + \zeta_s | \mathcal{F}_t\Big) ds =$$

$$= \mathbb{E}(\xi | \mathcal{F}_t) + \mathbb{E}\Big(\int_t^a (\eta_s (\xi e^{u_a - u_s} + e^{-u_s} \int_s^a \zeta_v e^{u_v} dv) + \zeta_s) ds | \mathcal{F}_t\Big) =$$

$$= \mathbb{E}\Big(\xi + \int_t^a (\eta_s (\xi e^{u_a - u_s} + e^{-u_s} \int_s^a \zeta_v e^{u_v} dv) + \zeta_s) ds | \mathcal{F}_t\Big) = \mathbb{E}(Y_t | \mathcal{F}_t) = X_t.$$

Здесь мы воспользовались тем, что случайный процесс (26) удовлетворяет интегральному уравнению (23). Теорема доказана. □

Далее нам понадобится один специальный вариант теоремы 5, в которой случайный процесс η ограничен, а случайный процесс ζ удовлетворяет условию из теоремы 5 с $p = 1$.

Теорема 6. *Пусть даны $\mathcal{F}_a$-измеримая случайная величина ξ и непрерывные справа случайные процессы $\eta = \{\eta_t, t \in [0,a]\}$ и $\zeta = \{\zeta_t, t \in [0,a]\}$ такие, что*

$$\mathbb{E}|\xi| < \infty, \sup_{0 \leqslant t \leqslant a} |\eta_t| \leqslant c - \text{ постоянная, } \mathbb{E} \int_0^a |\zeta_t| ds < \infty. \tag{30}$$

Тогда линейное обратное стохастическое дифференциальное уравнение

$$X_t = \mathbb{E}(\xi + \int_t^a (\eta_s X_s + \zeta_s) ds | \mathcal{F}_t), X_a = \xi, \tag{31}$$

имеет единственное решение $X = \{X_t, t \in [0,a]\}$,

$$X_t = e^{-u_t} M_t^{(1)} + e^{-u_t} M_t^{(2)} - e^{-u_t} \int_0^t \zeta_s e^{u_s} ds, \tag{32}$$

где $M^{(1)} = \{M_t^{(1)}, t \in [0,a]\}$ и $M^{(2)} = \{M_t^{(2)}, t \in [0,a]\}$ являются регулярными справа версиями $\mathbb{F}$-мартингалов $\{\mathbb{E}(\xi e^{u_a} | \mathcal{F}_t), t \in [0,a]\}$ и $\{\mathbb{E}(\int_0^a \zeta_s e^{u_s} ds | \mathcal{F}_t), t \in [0,a]\}$ и $u_t = \int_0^t \eta_s ds$. Случайный процесс X удовлетворяет следующему условию

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant a} \mathbb{E}|X_t| \leqslant e^{2c}\Big(\mathbb{E}|\xi| + \mathbb{E} \int_0^a |\zeta_s| ds\Big). \tag{33}$$

Доказательство. Доказательство существования решения уравнения (31) можно осуществить по аналогии с доказательством теоремы 5. Докажем утверждение (33). С помощью неравенства Иенсена для условных математических ожиданий решение (32) можно оценить следующим образом

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|X_t| &= \mathbb{E}\Big|e^{-u_t}M_t^{(1)} + e^{-u_t}M_t^{(2)} - e^{-u_t}\int_0^t \zeta_s e^{u_s}ds\Big| = \\
&= \mathbb{E}\Big|\mathbb{E}(e^{-u_t}\xi e^{u_a} + e^{-u_t}\int_0^a \zeta_s e^{u_s}ds - e^{-u_t}\int_0^t \zeta_s e^{u_s}ds|\mathcal{F}_t)\Big| = \\
&= \mathbb{E}\Big|\mathbb{E}(\xi e^{u_a-u_t} + \int_t^a \zeta_s e^{u_s-u_t}ds|\mathcal{F}_t)\Big| \leqslant \\
&\leqslant \mathbb{E}\Big|\mathbb{E}(|\xi e^{u_a-u_t}| + |\int_t^a \zeta_s e^{u_s-u_t}ds||\mathcal{F}_t)\Big| = \\
&= \mathbb{E}|\xi e^{u_a-u_t}| + \mathbb{E}(\mathbb{E}|\int_t^a \zeta_s e^{u_s-u_t}ds|\mathcal{F}_t)|) \leqslant e^{ac}\mathbb{E}|\xi| + e^{ac}\mathbb{E}\int_0^a |\zeta_s|ds.
\end{aligned}$$

На последнем этапе мы воспользовались неравенством Иенсена для условных математических ожиданий, следующими неравенствами

$$e^{u_s-u_t} = \exp\Big\{\int_t^s \eta_v dv\Big\} \leqslant \exp\Big\{\int_0^a |\eta_v|dv\Big\} \leqslant e^{ac}$$

и аналогичным неравенством $e^{u_a-u_t} \leqslant e^{ac}$. Отсюда следует утверждение (33). Теорема доказана. □

4. Применение к теореме Дуба-Мейера

В этом разделе будет исследована последовательность связанных между собой обратных стохастических дифференциальных уравнений. Каждое уравнение содержит данный супермартингал в качестве своего элемента. Решения упомянутых уравнений возрастают и сходятся почти всюду и в среднем к супермартингалу. Это позволяет дать упрощенное доказательство теоремы Дуба-Мейера о разложении супермартингала в виде разности мартингала и возрастающего предсказуемого процесса.

Теорема 7. *Для любого регулярного справа* $\mathbb{F}$*-супермартингала* $X = \{X_t, t \in [0,a]\}$ *и для любого* $n \in \mathbb{N}$ *существует решение* $Y^{(n)} = \{Y_t^{(n)}, t \in [0,a]\}$ *обратного стохастического дифференциального уравнения*

$$Y_t = \mathbb{E}(X_a + \int_t^a n(X_s - Y_s)^+ ds|\mathcal{F}_t), t \in [0,a], Y_a = X_a. \tag{34}$$

Последовательность $\{Y^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ *возрастает и сходится п.в. и в среднем к* X.

Доказательство. Функция $\mu(\omega,t,x) = n(X_t(\omega) - x)^+$ переменных $\omega \in \Omega, t \in [0,a], x \in \mathbb{R}$ измерима. Другими словами, каково бы ни было борелевское множество $A \subseteq \mathbb{R}$, его прообраз $\{(\omega,t,x) : \Omega \times [0,a] \times \mathbb{R} : \mu(\omega,t,x) \in A\}$ принадлежит прямому произведению $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}_a \otimes \mathcal{B}$ сигма-алгебры $\mathcal{F}$, борелевской сигма-алгебры $\mathcal{B}_a$ на сегменте $[0,a]$ и борелевской сигма-алгебры $\mathcal{B}$ на вещественной прямой $\mathbb{R}$. По переменной $x \in \mathbb{R}$ функция μ удовлетворяет условию Липшица

$$|\mu(\omega,t,x) - \mu(\omega,t,y)| = n\Big|(X_t(\omega) - x)^+ - (X_t(\omega) - y)^+\Big| \leqslant n|x-y|, x,y \in \mathbb{R}.$$

По теореме 4 существует единственное решение $Y^{(n)}$ уравнения (34). Сравним решения $Y^{(n)}$ и $Y^{(n+1)}$ уравнений (34) для n и $n+1$. С этой целью определим случайные процессы $\zeta = \{\zeta_t, t \in [0,a]\}$ и $\eta = \{\eta_t, t \in [0,a]\}$, положив $\zeta_t = (X_t - Y_t^{(n)})^+$ и

$$\eta_t = \begin{cases} \dfrac{(n+1)(X_t - Y_t^{(n+1)})^+ - (n+1)(X_t - Y_t^{(n)})^+}{Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)}}, \text{ если } Y_t^{(n+1)} \neq Y_t^{(n)}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0, \text{ если } Y_t^{(n+1)} = Y_t^{(n)}. \end{cases} \tag{35}$$

Заметим, что случайные процессы ζ и η обладают свойством регулярности справа, случайный процесс η ограничен числом $n+1$ и $\zeta_t \geqslant 0$ для всех $t \in [0,a]$. Так как случайные процессы $Y^{(n)}$ и $Y^{(n+1)}$ являются решениями уравнений (34) для n и $n+1$, то разность $Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)}$ равна

$$\mathbb{E}\Big(\int_t^a (n+1)((X_s - Y_s^{(n+1)})^+ - (X_s - Y_s^{(n)})^+) + (X_s - Y_s^{(n)})^+)ds|\mathcal{F}_t\Big) =$$
$$= \mathbb{E}\Big(\int_t^a (\eta_s(Y_s^{(n+1)} - Y_s^{(n)}) + \zeta_s)ds|\mathcal{F}_t\Big).$$

Мы видим, что разность $Y^{(n+1)} - Y^{(n)}$ является решением линейного обратного стохастического дифференциального уравнения, удовлетворяющего условиям теоремы 6 с $\xi = 0$. Решение можно записать, как указано в теореме 6,

$$Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)} = e^{-u_t}M_t - e^{-u_t}\int_0^t \zeta_s e^{u_s} ds, \tag{36}$$

где $M = \{M_t, t \in [0,a]\}$ являются регулярной справа версией $\mathbb{F}$-мартингала

$$\{\mathbb{E}(\int_0^a \zeta_s e^{u_s} ds|\mathcal{F}_t), t \in [0,a]\}, \text{ где } u_t = \int_0^t \eta_s ds.$$

Величина справа в (36) неотрицательна. Чтобы убедиться в этом, достаточно переписать равенство (36) в следующем виде

$$Y_t^{(n+1)} - Y_t^{(n)} = e^{-u_t}M_t - e^{-u_t}\int_0^t \zeta_s e^{u_s} ds = \mathbb{E}(\int_0^a \zeta_s e^{u_s - u_t} ds|\mathcal{F}_t) \geqslant 0. \tag{37}$$

Отсюда следует, что для любого $t \in [0,a]$ последовательность $\{Y_t^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ возрастает почти всюду.

Подобные уравнения также исследовались в статье [7], в которой доказано неравенство $Y_t^{(n)} \leqslant X_t$ п.в. для всех $n \in \mathbb{N}$ и $t \in [0,a]$. Возрастающая последовательность $\{Y^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ случайных процессов сходится к некоторому случайному процессу $Y = \{Y_t, t \in [0,a]\}, Y_t \leqslant X_t$ п.в. Докажем равенство $Y_t = X_t$ п.в. Так как $Y_s^{(n)} \leqslant X_s$ п.в., то

$$Y_t^{(n)} = \mathbb{E}(\xi + n\int_t^a (X_s - Y_s^{(n)})^+ ds|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\xi + n\int_t^a |X_s - Y_s^{(n)}|ds|\mathcal{F}_t),$$
$$\mathbb{E}Y_t^{(n)} = \mathbb{E}\xi + n\int_t^a \mathbb{E}|X_s - Y_s^{(n)}|ds.$$

Отсюда и из теоремы о монотонной сходимости следует, что

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} Y_0^{(n)} = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{n} \mathbb{E}\xi + \int_0^a \mathbb{E}|X_s - Y_s^{(n)}|ds) = \int_0^a \mathbb{E}|X_s - Y_s|ds.$$

Для почти всех $s \in [0,a]$ по мере Лебега выполняется равенство $\mathbb{E}|X_s - Y_s| = 0$. Отсюда следует, что для почти всех $s \in [0,a]$ по мере Лебега выполняется равенство $Y_s = X_s$ п.в. по вероятности $\mathbb{P}$. Из чего следует, что случайные процессы Y и X неотличимы. Теорема доказана. □

Напомним, что регулярный справа случайный процесс $X = \{X_t, t \in [0,a]\}$ принадлежит классу $\mathcal{D}_a$, если семейство случайных величин X_τ, когда τ пробегает множество всех $\mathbb{F}$-марковских моментов, ограниченных числом a, равномерно интегрируемо.

Теорема 8. *Пусть дан любой регулярный справа $\mathbb{F}$-супермартингал $X = \{X_t, t \in [0,a]\}$ из класса $\mathcal{D}_a$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует единственное решение $Y^{(n)} = \{Y_t^{(n)}, t \in [0,a]\}$ обратного стохастического дифференциального уравнения*

$$Y_t = \mathbb{E}(X_a + \int_t^a n(X_s - Y_s)^+ ds|\mathcal{F}_t), t \in [0,a], Y_a = X_a, \tag{38}$$

и последовательность $\{n\int_0^a (X_s - Y_s^{(n)})^+ ds\}_{n\geqslant 1}$ равномерно интегрируема.

Доказательство. Существование решений $Y^{(n)}, n \in \mathbb{N}$ было доказано выше. Было также доказано, что последовательность $\{Y^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ возрастает и сходится к X. Для дальнейшего важно, что для любых $n \in \mathbb{N}$ и $t \in [0,a]$ выполняется неравенство $Y_t^{(n)} \leqslant X_t$ п.в. Обозначим $A_t^{(n)} = \int_0^t n(X_s - Y_s^{(n)})^+ ds$ для любого $t \in [0,a]$ и докажем, что последовательность $\{A_a^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ равномерно интегрируема, другими словами, что выполнено условие

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sup_{n\geqslant 1} \int_{\{A_a^{(n)}>\lambda\}} A_a^{(n)} d\mathbb{P} = 0. \tag{39}$$

Разобьем сегмент $[0,a]$ точками $t_{n,k} = k2^{-n}a, k = 0,1,\ldots,2^n$. Нетрудно проверить, что для любого $\lambda > 0$ функция $\tau_\lambda^{(n)} : \Omega \to [0,a]$,

$$\tau_\lambda^{(n)} = \begin{cases} \inf\{t_{n,k} \in \{t_{n,0},\ldots,t_{n,2^n-1} : A_{t_{n,k+1}}^{(n)} > \lambda\}, \text{ если } A_a^{(n)} > \lambda, \\ \hfill a, \text{ если } A_a^{(n)} \leqslant \lambda, \end{cases}$$

является $\mathbb{F}$-марковским моментом. Докажем, что выполняется равенство

$$\mathbb{E}(A_a^{(n)}|\mathcal{F}_{\tau_\lambda^{(n)}}) = Y_{\tau_\lambda^{(n)}}^{(n)} + A_{\tau_\lambda^{(n)}}^{(n)} - \mathbb{E}(X_a|\mathcal{F}_{\tau_\lambda^{(n)}}) \text{ п.в.}, \tag{40}$$

где $\mathcal{F}_{\tau_\lambda^{(n)}}$ обозначает сигма-алгебру, ассоциированную с марковским моментом $\tau_\lambda^{(n)}$. Для любого $F \in \mathcal{F}_{\tau_\lambda^{(n)}}$ справедливы следующие равенства

$$\int_F \mathbb{E}(X_a + A_a^{(n)}|\mathcal{F}_{\tau_\lambda^{(n)}})d\mathbb{P} = \int_F (X_a + A_a^{(n)})d\mathbb{P} = \sum_{k=0}^{2^n} \int_{F\cap\{\tau_\lambda^{(n)}=t_{n,k}\}} (X_a + A_a^{(n)})d\mathbb{P} =$$

$$= \sum_{k=0}^{2^n} \int_{F\cap\{\tau_\lambda^{(n)}=t_{n,k}\}} \mathbb{E}(X_a + A_a^{(n)}|\mathcal{F}_{t_{n,k}})d\mathbb{P}.$$

Последнее равенство выполняется по определению условного математического ожидания, так как $F \cap \{\tau_\lambda^{(n)} = t_{n,k}\} \in \mathcal{F}_{t_{n,k}}$. Так как случайный процесс $Y^{(n)}$ является решением уравнения (38), то

$$
\begin{aligned}
Y_{t_{n,k}}^{(n)} &= \mathbb{E}(X_a + \int_{t_{n,k}}^a n(X_s - Y_s^{(n)})^+ ds | \mathcal{F}_{t_{n,k}}) = \\
&= \mathbb{E}(X_a + \int_0^a n(X_s - Y_s^{(n)})^+ ds - \int_0^{t_{n,k}} n(X_s - Y_s^{(n)})^+ ds | \mathcal{F}_{t_{n,k}}) = \\
&= \mathbb{E}(X_a + A_a^{(n)} - A_{t_{n,k}}^{(n)} | \mathcal{F}_{t_{n,k}}) = \mathbb{E}(X_a + A_a^{(n)} | \mathcal{F}_{t_{n,k}}) - A_{t_{n,k}}^{(n)} \text{ п.в.}
\end{aligned}
$$

После подстановки $\mathbb{E}(X_a + A_a^{(n)} | \mathcal{F}_{t_{n,k}}) = Y_{t_{n,k}}^{(n)} + A_{t_{n,k}}^{(n)}$ в предыдущие равенства мы получим

$$
\begin{aligned}
\int_F \mathbb{E}(X_a + A_a^{(n)} | \mathcal{F}_{\tau_\lambda^{(n)}}) d\mathbb{P} &= \sum_{k=0}^{2^n} \int_{F \cap \{\tau_\lambda^{(n)} = t_{n,k}\}} \mathbb{E}(X_a + A_a^{(n)} | \mathcal{F}_{t_{n,k}}) d\mathbb{P} = \\
&= \sum_{k=0}^{2^n} \int_{F \cap \{\tau_\lambda^{(n)} = t_{n,k}\}} (Y_{t_{n,k}}^{(n)} + A_{t_{n,k}}^{(n)}) d\mathbb{P} = \\
&= \sum_{k=0}^{2^n} \int_{F \cap \{\tau_\lambda^{(n)} = t_{n,k}\}} (Y_{\tau_\lambda^{(n)}}^{(n)} + A_{\tau_\lambda^{(n)}}^{(n)}) d\mathbb{P} = \int_F (Y_{\tau_\lambda^{(n)}}^{(n)} + A_{\tau_\lambda^{(n)}}^{(n)}) \mathbb{P}.
\end{aligned}
$$

Функции $\mathbb{E}(X_a + A_a^{(n)} | \mathcal{F}_{\tau_\lambda^{(n)}})$ и $Y_{\tau_\lambda^{(n)}}^{(n)} + A_{\tau_\lambda^{(n)}}^{(n)}$ измеримы относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_{\tau_\lambda^{(n)}}$. По известной теореме ([21], стр. 29) выполняется равенство $\mathbb{E}(X_a + A_a^{(n)} | \mathcal{F}_{\tau_\lambda^{(n)}}) = Y_{\tau_\lambda^{(n)}}^{(n)} + A_{\tau_\lambda^{(n)}}^{(n)}$ п.в., которое совпадает с требуемым равенством (40).

По известной теореме ([21], стр. 82) функция $\tau_\lambda^{(n)}$ измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_{\tau_\lambda^{(n)}}$ и, следовательно, $\{\tau_\lambda^{(n)} < a\} \in \mathcal{F}_{\tau_\lambda^{(n)}}$. Из определения $\tau_\lambda^{(n)}$ следует, что $A_{\tau_\lambda^{(n)}}^{(n)} \leqslant \lambda$ и $\{\tau_\lambda^{(n)} < a\} = \{A_a^{(n)} > \lambda\}$. С учетом этих замечаний и равенства (40) мы получим

$$
\begin{aligned}
\int_{\{A_a^{(n)} > \lambda\}} A_a^{(n)} d\mathbb{P} &= \int_{\{\tau_\lambda^{(n)} < a\}} A_a^{(n)} d\mathbb{P} = \int_{\{\tau_\lambda^{(n)} < a\}} \mathbb{E}(A_a^{(n)} | \mathcal{F}_{\tau_\lambda^{(n)}}) d\mathbb{P} = \\
&= \int_{\{\tau_\lambda^{(n)} < a\}} A_{\tau_\lambda^{(n)}}^{(n)} d\mathbb{P} + \int_{\{\tau_\lambda^{(n)} < a\}} Y_{\tau_\lambda^{(n)}}^{(n)} d\mathbb{P} - \int_{\{\tau_\lambda^{(n)} < a\}} \mathbb{E}(X_a | \mathcal{F}_{\tau_\lambda^{(n)}}) d\mathbb{P} = \\
&= \int_{\{\tau_\lambda^{(n)} < a\}} A_{\tau_\lambda^{(n)}}^{(n)} d\mathbb{P} + \int_{\{\tau_\lambda^{(n)} < a\}} Y_{\tau_\lambda^{(n)}}^{(n)} d\mathbb{P} - \int_{\{\tau_\lambda^{(n)} < a\}} X_a d\mathbb{P} \leqslant \\
&\leqslant \lambda \mathbb{P}\{\tau_\lambda^{(n)} < a\} + \int_{\{\tau_\lambda^{(n)} < a\}} Y_{\tau_\lambda^{(n)}}^{(n)} d\mathbb{P} - \int_{\{\tau_\lambda^{(n)} < a\}} X_a d\mathbb{P}.
\end{aligned}
$$

Оценим величину $\lambda \mathbb{P}\{\tau_\lambda^{(n)} < a\}$. Определим $\mathbb{F}$-марковский момент $\tau_{\lambda/2}^{(n)}$ по аналогии с $\tau_\lambda^{(n)}$. Равенство (40) останется справедливым после замены $\tau_\lambda^{(n)}$ на $\tau_{\lambda/2}^{(n)}$. Заметим, что $\{\tau_\lambda^{(n)} < a\} \subseteq \{\tau_{\lambda/2}^{(n)} < a\}$. На множестве $\{\tau_\lambda^{(n)} < a\}$ выполняются неравенства $A^{(n)}_{\tau^{(n)}_{\lambda/2}} \leqslant \lambda/2$ и $A_a^{(n)} > \lambda$. С учетом этих замечаний мы получим

$$\begin{aligned}\lambda\mathbb{P}\{\tau_\lambda^{(n)} < a\} &\leqslant 2\int_{\{\tau_\lambda^{(n)}<a\}}(A_a^{(n)} - A^{(n)}_{\tau^{(n)}_{\lambda/2}})d\mathbb{P} \leqslant 2\int_{\{\tau_{\lambda/2}^{(n)}<a\}}(A_a^{(n)} - A^{(n)}_{\tau^{(n)}_{\lambda/2}<a\}})d\mathbb{P} = \\ &= 2\int_{\{\tau_{\lambda/2}^{(n)}<a\}}\mathbb{E}(A_a^{(n)}|\mathcal{F}_{\tau^{(n)}_{\lambda/2}})d\mathbb{P} - 2\int_{\{\tau_{\lambda/2}^{(n)}<a\}}A^{(n)}_{\tau^{(n)}_{\lambda/2}}d\mathbb{P} = \\ &= 2\int_{\{\tau_{\{\lambda/2}^{(n)}<a\}}Y^{(n)}_{\tau^{(n)}_{\lambda/2}}d\mathbb{P} - 2\int_{\{\tau_{\lambda/2}^{(n)}<a\}}\mathbb{E}(X_a|\mathcal{F}_{\tau^{(n)}_{\lambda/2}})d\mathbb{P} = \\ &= 2\int_{\{\tau_{\{\lambda/2}^{(n)}<a\}}Y^{(n)}_{\tau^{(n)}_{\lambda/2}}d\mathbb{P} - 2\int_{\tau_{\{\lambda/2}^{(n)}<a\}}X_a d\mathbb{P}.\end{aligned}$$

В результате мы придем к следующим неравенствам

$$\begin{aligned}&\int_{\{A_a^{(n)}>\lambda\}}A_a^{(n)}\mathbb{P} \leqslant \lambda\mathbb{P}\{\tau_\lambda^{(n)} < a\} + \int_{\{\tau_\lambda^{(n)}<a\}}Y^{(n)}_{\tau^{(n)}_\lambda}d\mathbb{P} - \int_{\{\tau_\lambda^{(n)}<a\}}X_a d\mathbb{P} \leqslant \\ &\leqslant \int_{\{\tau_\lambda^{(n)}<a\}}Y^{(n)}_{\tau^{(n)}_\lambda}\mathbb{P} + 2\int_{\{\tau_{\lambda/2}^{(n)}<a\}}Y^{(n)}_{\tau^{(n)}_{\lambda/2}})d\mathbb{P} - \int_{\{\tau_\lambda^{(n)}<a\}}X_a d\mathbb{P} - 2\int_{\{\tau_{\lambda/2}^{(n)}<a\}}X_a d\mathbb{P}.\end{aligned}$$

По теореме 7 последовательность $\{Y^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ возрастает и сходится к X. Поэтому для любого $t \in [0,a]$ выполняется неравенство $Y_t^{(n)} \leqslant X_t$ п.в. Отсюда, в свою очередь, следуют неравенства $Y^{(n)}_{\tau^{(n)}_\lambda} \leqslant X^{(n)}_{\tau^{(n)}_\lambda}, Y^{(n)}_{\tau^{(n)}_{\lambda/2}} \leqslant X^{(n)}_{\tau^{(n)}_{\lambda/2}}$ п.в. и

$$\begin{aligned}\int_{\{A_a^{(n)}>\lambda\}}A_a^{(n)}\mathbb{P} \leqslant \int_{\{\tau_\lambda^{(n)}<a\}}X_{\tau^{(n)}_\lambda}\mathbb{P} + 2\int_{\{\tau_{\lambda/2}^{(n)}<a\}}X_{\tau^{(n)}_{\lambda/2}})d\mathbb{P} - \\ - \int_{\{\tau_\lambda^{(n)}<a\}}X_a d\mathbb{P} - 2\int_{\{\tau_{\lambda/2}^{(n)}<a\}}X_a d\mathbb{P}.\end{aligned}$$

Условие (39) выполняется, если каждый из четырех интегралов справа сходится к нулю при $\lambda \to \infty$ равномерно по $n \in \mathbb{N}$. Для этого достаточно доказать, что вероятности событий $\{\tau_\lambda^{(n)} < a\}$ и $\{\tau_{\lambda/2}^{(n)} < a\}$ стремились к нулю при $\lambda \to \infty$ равномерно по $n \in \mathbb{N}$, так как случайный процесс X принадлежит классу $\mathcal{D}_a$. Случайный процесс $Y^{(n)}$ является решением уравнения (38). Поэтому справедливы следующие равенства

$$\begin{aligned}&Y_0^{(n)} = \mathbb{E}(X_a + \int_0^a n(X_s - Y_s^{(n)})^+ds|\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(X_a + A_a^{(n)}|\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}(X_a|\mathcal{F}_0) + \mathbb{E}(A_a^{(n)}|\mathcal{F}_0), \\ &\mathbb{E}Y_0^{(n)} = \mathbb{E}\mathbb{E}(X_a|\mathcal{F}_0) + \mathbb{E}\mathbb{E}(A_a^{(n)}|\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}X_a + \mathbb{E}A_a^{(n)}.\end{aligned}$$

С помощью неравенства $Y_0^{(n)} \leqslant X_0$ п.в. и неравенства Маркова мы получим

$$\mathbb{P}\{\tau_\lambda^{(n)} < a\} = \mathbb{P}\{A_a^{(n)} > \lambda\} \leqslant \frac{\mathbb{E}A_a^{(n)}}{\lambda} = \frac{\mathbb{E}Y_0^{(n)} - \mathbb{E}X_a}{\lambda} \leqslant \frac{\mathbb{E}X_0 - \mathbb{E}X_a}{\lambda}.$$

Отсюда следует, что $\lim_{\lambda\to\infty}\sup_{n\geqslant 1}\mathbb{P}\{\tau_\lambda^{(n)} < a\} = 0$. Аналогично можно доказать, что $\lim_{\lambda\to\infty}\sup_{n\geqslant 1}\mathbb{P}\{\tau_{\lambda/2}^{(n)} < a\} = 0$. Утверждение (39) и, следовательно, теорема доказана. $\square$

Теорема 9. *Для любого регулярного справа $\mathbb{F}$-супермартингала $X = \{X_t, t \geqslant 0\}$ из $\cap_{a>0}\mathcal{D}_a$ существуют регулярный справа $\mathbb{F}$-мартингал и предсказуемый возрастающий процесс $A = \{A_t, t \geqslant 0\}$ такие, что*

$$X = M - A \text{ п.в.} \tag{41}$$

Если имеется другое такое разложение $X = M' - A'$ п.в., то случайные процессы M и M' а также A и A' неразличимы.

Доказательство. Известен ([18], [21], [26], [31]) несложный способ того, как построить разложение (41) на положительной полуоси, если такое разложение имеет место на любом конечном сегменте $[0, a]$. В упомянутых источниках также можно найти доказательство единственности разложения (41). В большинстве известных доказательствах разложения (41) случайный процесс A является возрастающим натуральным процессом. Затем привлекают трудную теорему Долеан [9], чтобы доказать, что A является предсказуемым процессом. Ниже предлагается прямое доказательство разложения (41), которое не нуждается в теореме Долеан.

Требуется доказать, что для любого $a > 0$ существует событие $\Omega' = \Omega'(a) \in \mathcal{F}$ единичной вероятности, на котором выполняется равенство

$$X_t = M_t - A_t \text{ для всех } t \in [0, a]. \tag{42}$$

Выше было доказано, что уравнение (34) имеет единственное решение $Y^{(n)}$ и для каждого $t \in [0, a]$ последовательность $\{Y_t^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ сходится п.в. и в среднем к X_t. По теореме 7 последовательность $\{A_a^{(n)}\}_{\geqslant 1}$, где $A_t^{(n)} = \int_0^t n(X_s - Y_s^{(n)})^+ ds, t \in [0, a]$, равномерно интегрируема. Поэтому, в силу теоремы Комлоша [19] существуют строго возрастающая последовательность $\{n_j\}_{j\geqslant 1}$ натуральных чисел и случайная величина A_a такие, что $\mathbb{E}A_a < \infty$ и последовательность $\{\sum_{l=1}^m A_a^{(n_{j_l})}/m\}$ сходится п.в. к A_a для любой подпоследовательности $\{n_{j_l}\}_{l\geqslant 1}$ последовательности $\{n_j\}_{j\geqslant 1}$. Чтобы не усложнять обозначений мы будем считать, что теорема Комлоша применима к последовательности $\{\sum_{k=1}^n A_a^{(k)}/n\}$. Так как последовательность $\{A_a^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ равномерно интегрируема, то наряду со сходимостью

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n A_a^{(k)} = A_a \text{ п.в.} \tag{43}$$

имеет место сходимость в среднем

$$\lim_{m\to\infty}\mathbb{E}\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n A_a^{(k)} - A_a\Big| = 0. \tag{44}$$

Из (43) и (44), в силу известной теореме ([21], стр. 117), следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(X_a + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n A_a^{(k)}|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(X_a + A_a|\mathcal{F}_t) \text{ п.в.} \tag{45}$$

Обозначим $M = \{M_t, t \in [0,a]\}$ регулярную справа версию $\mathbb{F}$-мартингала $\{\mathbb{E}(X_a + A_a|\mathcal{F}_t), t \in [0,a]\}$ и $A_t = X_t - M_t$. Случайный процесс $A = \{A_t, t \in [0,a]\}$, будучи разностью двух регулярных справа, $\mathbb{F}$-согласованных случайных процессов, обладает свойством регулярности справа и согласован с фильтрацией $\mathbb{F}$. Требуемое разложение (42) будет доказано, если существует событие $\Omega' \in \mathcal{F}$ единичной вероятности такое, что случайный процесс $\mathbb{1}_{\Omega'} A = \{\mathbb{1}_{\Omega'} A_t, t \in [0,a]\}$ является возрастающим предсказуемым процессом.

Запишем решение решение $Y^{(n)}$ уравнения (34) в следующем виде

$$\begin{aligned}
Y_t^{(n)} &= \mathbb{E}(X_a + \int_t^a n(X_s - Y_s^{(n)})^+ ds|\mathcal{F}_t) = \\
&= \mathbb{E}(X_a + \int_0^a n(X_s - Y_s^{(n)})^+ ds|\mathcal{F}_t) - \int_0^t n(X_s - Y_s^{(n)})^+ ds = \\
&= \mathbb{E}(X_a + A_a^{(n)}|\mathcal{F}_t) - A_t^{(n)} \text{ п.в.}
\end{aligned}$$

Выше отмечалось, что последовательность $\{Y_t^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ сходится п.в. и в среднем к X_t. Отсюда и из (43), (44), (45) следует, что

$$X_t = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Y_t^{(k)} = \lim_{n\to\infty}\Big(\mathbb{E}(X_a + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n A_a^{(k)}|\mathcal{F}_t) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n A_t^{(k)}\Big) \text{ п.в.},$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big|X_a + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n A_a^{(k)}|\mathcal{F}_t) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n A_t^{(k)} - X_t\Big| = 0.$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что для любого $t \in [0,a]$ справедливо следующее утверждение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n A_t^{(k)} = A_t \text{ п.в.}$$

Множество $\Omega_t = \{\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n A_t^{(k)} = A_t\}$ является событием единичной вероятности. Обозначим Q_a объединение всех рациональных точек сегмента $[0,a]$ и одноточечного множества $\{a\}$. Множество $\Omega' = \cap_{t\in Q_a}\Omega_t$ является событием единичной вероятности. Для любых $t \in Q_a$ и $\omega \in \Omega'$ мы имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n A_t^{(k)}(\omega) = A_t(\omega). \tag{46}$$

Заметим, что для любого $n \in \mathbb{N}$ случайный процесс $A^{(n)} = \{A_t^{(n)}, t \in [0,a]\}$ непрерывен и возрастает. Пусть $\omega \in \Omega'$ и $t \in (0,a)\setminus Q_a$ является точкой непрерывности траектории $A_t(\omega), t \in [0,a]$. Для любых $t', t'' \in Q_a, t' < t < t''$, справедливы следующие соотношения

$$\begin{aligned}
A_{t'}(\omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n A_{t'}^{(k)}(\omega) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n A_t^{(k)} \leqslant \\
\limsup_{n\to\infty} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n A_t^{(k)} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n A_{t''}^{(k)}(\omega) = A_{t''}(\omega).
\end{aligned}$$

Так как $\lim_{t'\uparrow t} A_{t'}(\omega) = A_t(\omega) = \lim_{t''\downarrow t} A_{t''}(\omega)$, то утверждение (46) выполняется для всех $\omega \in \Omega'$ и $t \in Q_a$ и для любой точки непрерывности $t \in (0, a)$ траектории $A_t(\omega), t \in [0, a]$.

Мы докажем утверждение (46) для всех $t \in [0, a]$ и для всех $\omega \in \Omega'$. Сначала мы убедимся, что каждая точка $s > 0$ разрыва любой траектории $A_t(\omega), t \in [0, a]$, является значением некоторого из марковских моментов следующего вида

$$\tau_{\alpha,\beta} = \inf\{t \geqslant \beta : |A_t - A_\beta| \geqslant \alpha\} \wedge a, \alpha, \beta \in \mathbb{Q}_0 = Q_a \setminus \{0\}. \tag{47}$$

Здесь использовано обозначение $a \wedge b$ для $min\{a, b\}$ для любых вещественных чисел a и b. Найдется рациональное число $\alpha > 0$ такое, что $|A_s(\omega) - A_{s-}(\omega)| \geqslant 2\alpha$. Возьмем какую-нибудь строго возрастающую последовательность $\{\beta_n\}_{n\geqslant 1}$ чисел из $\mathbb{Q}_0$, которая сходится к s. Так как $\lim_{n\to\infty} A_{\beta_n}(\omega) = A_{s-}(\omega)$, то найдется $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $|A_{s'}(\omega) - A_{s-}(\omega)| < \alpha/2$ для всех $\beta_{n_0} \leqslant s' < s$ и $|A_s(\omega) - A_{\beta_{n_0}}(\omega)| \geqslant \alpha$. Отсюда следует, что

$$|A_{s'}(\omega) - A_{\beta_{n_0}}(\omega)| \leqslant |A_{s'}(\omega) - A_{s-}(\omega)| + |A_{s-}(\omega) - A_{\beta_{n_0}}(\omega)| < \alpha$$

и, следовательно, s является значением $s = \tau_{\alpha,\beta}(\omega)$ марковского момента (47) с α и $\beta = \beta_{n_0}$.

Докажем, что для любого марковского момента $\tau_{\alpha,\beta}$ существуют $\mathbb{F}$-марковские моменты $\sigma_m, m \in \mathbb{N}$ со значениями в Q_0 такие, что каждый марковский момент σ_m принимает конечное число значений, последовательность $\{\sigma_m\}_{m\geqslant 1}$ убывает и сходится к $\tau_{\alpha,\beta}$. Разобьем сегмент $[0, a]$ точками $0 = t_{m,0} < t_{m,1} < \cdots < t_{m,m} = a$ таким образом, чтобы $t_{m,0}, \ldots, t_{m,m} \in Q_0$ и $\lim_{m\to\infty} \max_{1\leqslant k\leqslant m}(t_{m,k} - t_{m,k-1}) = 0$. Определим функцию $v_m : [0, a] \to Q_0$, положив $v_{m,0}(0) = 0$ и $v_m(t) = t_{m,k}$ для $t \in (t_{m,k-1}, t_{m,k}], k = 1, \ldots, m$. Функция v_m возрастает и удовлетворяет неравенству $v_m(t) \geqslant t$ для всех $t \in [0, a]$. Кроме того, выполнены следующие соотношения $v_{m+1}(t) \leqslant v_m(t)$ и $\lim_{m\to\infty} v_m(t) = t$ для любого $t \in [0, a]$. Суперпозиция $v_m(\tau_{\alpha,\beta})$ функции v_m и марковского момента $\tau_{\alpha,\beta}$ измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_{\tau_{\alpha,\beta}}$, ассоциированной с марковским моментом $\tau_{\alpha,\beta}$, и удовлетворяет неравенству $\tau_{\alpha,\beta} \leqslant v_m(\tau_{\alpha,\beta})$. По известной теореме ([21], стр. 83) функция $\sigma_m = v_m(\tau_{\alpha,\beta}) : \Omega \to Q_0$ является $\mathbb{F}$-марковским моментом. Функция σ_m принимает конечное число значений из Q_0. Из свойств функций $v_m, m \in \mathbb{N}$, следует, что $\sigma_m \downarrow \tau_{\alpha,\beta}$ при $m \uparrow \infty$.

Все траектории случайного процеса $A = \{A_t, t \in [0, a]\}$ непрерывны справа. Пусть $\omega \in \Omega'$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $m = m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что $|A_{\tau_{\alpha,\beta}(\omega)}(\omega) - A_{\sigma_m(\omega)}(\omega)| < \varepsilon$. Утверждение (46) справедливо при замене t на $\sigma_m(\omega)$ и, следовательно,

$$A_{\tau_{\alpha,\beta}(\omega)}(\omega) - \varepsilon < A_{\sigma_m(\omega)}(\omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} A^{(k)}_{\sigma_m(\omega)}(\omega) =$$
$$= A_{\sigma_m(\omega)}(\omega) < A_{\tau_{\alpha,\beta}(\omega)}(\omega) + \varepsilon.$$

Число $\varepsilon > 0$ можно выбрать произвольно малым и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} A^{(k)}_{\sigma_m(\omega)}(\omega) = A_{\tau_{\alpha,\beta}(\omega)}(\omega).$$

Это означет, что утверждение (46) выполняется для всех $\omega \in \Omega'$ и для всех $t \in [0,a]$. Утверждение (46) можно переписать в следующем виде

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}A_t^{(k)}\Big)\mathbb{1}_{\Omega'} = A_t\mathbb{1}_{\Omega'}.$$

Случайный процесс $\{n^{-1}\sum_{k=1}^{n}A_t^{(k)}, t \in [0,a]\}$, будучи непрерывным и $\mathbb{F}$-согласованным, является предсказуемым. Случайный процесс $A_t\mathbb{1}_{\Omega'}$ является предсказуемым, так как он является поточечным пределом последовательности предсказуемых процессов. Случайный процесс A неотличим от случайного процесса $A\mathbb{1}_{\Omega'}$ и, следовательно, предсказуем. Теорема доказана. □

Заключение

В статье доказана теорема о существовании решения обратного стохастического дифференциального уравнения. С помощью теории обыкновенных дифференциальных уранений найдены явные решения линейных обратных стохастических дифференциальных уравнений. Исследована последовательность связанных между собой стохастических дифференциальных уравнений. С помощью свойств решений таких уравнений дано новое прямое доказательство разложения Дуба-Мейера супермартингала из класса $\mathcal{DL}$ в виде разности мартингала и возрастающего предсказуемого процесса. Доказана общая теорема о перестановке интеграла случайного процесса и условного математического ожидания.

Список литературы

[1] Antonelli F. Backward-forward stochastic differential equations // Annals of Applied Probability. 1993. Vol. 3. Pp. 777–793.

[2] Barles G., Buckdahn R., Pardoux E. Backward stochastic differential equations and integral-partial differential equations // Stochastics and Stochastics Reports. 1997. Vol. 60. Pp. 57–83.

[3] Bass R.F. The Doob-Meyer decomposition revisited // Canadian Mathematical Bulletin. 1996. Vol. 39. Pp. 138–150.

[4] Beiglböck M., Schachermayer W., Veliyev B. A short proof of the Doob-Meyer theorem // Stochastic Processes and their Applications. 2012. Vol. 122, № 4. Pp. 1202–1204.

[5] Briand P., Hu Y. BSDE with quadratic growth and unbounded terminal value // Probability Theory and Related Fields. 2006. Vol. 136, № 4. Pp. 604–618.

[6] Burgstaller B. A note on the Doob-Meyer decomposition of L^p-valued submartingales // Bulletin of the Australian Mathematical Society. 2004. Vol. 69. Pp. 227–235.

[7] Chen Z. A new proof of Doob-Meyer decomposition theorem // Comptes Rendus de Academie des Sciences, Paris, Serie I Math. 1999. Vol. 328, № 10. Pp. 919–924.

[8] Chung K.L, Williams R.J. An introduction to stochastic integration. Second edition. Boston: Birkhäuser, 1990. 294 p.

[9] Doléans-Dade C. Processus croissants naturels et processus croissants très bien mesurables. Comptes Rendus de Academie des Sciences, Paris, Serie A-B. 1967. Vol. 264. Pp. 874–876.

[10] Duffie D., Epstein L.G. Stochastic differential utility // Econometrica. 1992. Vol. 60. Pp. 353–394.

[11] Duffie D., Epstein L.G. Assert pricing with stochastic differential utilities // Review of Financial Studies. 1992. Vol. 5, № 3. Pp. 411–436.

[12] Дуб Дж. Вероятностные процессы. М.: Мир, 1956. 608 с.

[13] Ethier S.N., Kurtz T.G. Markov Processes: Characterization and Convergence. New York: John Wiley & Sons, 1986. 551 p.

[14] Hu Y., Peng S. Adapted solution of a backward stochastic evolution equation // Stochastic Analysis and Applications. 1991. Vol. 48, Pp. 445–459.

[15] Hu Y., Peng S. Solution of forward-backward stochastic differential evolution equations // Probability Theory and Related Fields. 1995. Vol. 103, Pp. 273–283.

[16] Jakubowski A. Towards a general Doob-Meyer decomposition theorem // Probability and Mathematical Statistics. 2006. Vol. 26. Pp. 143–153.

[17] El Karoui N., Peng S.G., Quenez M.C. Backward stochastic differential equations in finance // Mathematical Finance. 1997. Vol. 7, № 1. Pp. 1–71.

[18] Kashayeva S.Yu., Kruglov V.M. On a representation of submartingales and its application // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2014. № 2. Pp. 74–84.

[19] Komlós. A. A generalization of a problem of Steinhaus // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. 1967. Vol. 18. Pp. 217–229.

[20] Koopmans T. Stationary ordinary utility and impatience // Econometrica. 1960. Vol. 28. Pp. 287–309.

[21] Круглов В.М. Случайные процессы. М.: Академия, 2013. 336 с.

[22] Lepeltier M., San Martin J. Backward stochastic differential equations with non-Lipschitz coefficients // Statistics & Probability Letters. 1997. Vol. 32, № 4. Pp. 425–430.

[23] Ma J., Yong J. Forward-Backward Stochastic Differential Equations and their Applications // Lecture Notes in Mathematics. 2007. Vol. 1702. 274 p. doi:10.1007/978-3-540-48831-6

[24] Ma J., Yong J. Adapted solution of a degenerate backward SPDE with applications // Stochastic Processes and their Applications. 1997. Vol. 70. Pp. 59–84.

[25] Meyer P.-A. A decomposition theorem for supermartingales // Illinois Journal of Mathematics. 1962. Vol. 6. Pp. 193–205.

[26] Meyer P.-A. Decomposition of supermartingales: the uniqueness theorem // Illinois Journal of Mathematics. 1963. Vol. 7. Pp. 1–17.

[27] Pardoux E. Backward stochastic differential equations and applications // Proc. of the International Congress of Mathematics. Zurich, Switzerland, 1994. Pp. 1502–1510.

[28] Pardoux E., Peng S.G. Adapted solution of a backwand stochastic differential equation // Systems & Control Letters. 1990. Vol. 14, № 1. Pp. 55–61.

[29] Protter P.E. Stochastic integration and differential equations // Stochastic Modelling and Applied Probability. 2005. Vol. 21. 407 p. doi:10.1007/978-3-662-10061-5

[30] Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: ГТТИ, Физматлит, 1959. 473 с.

[31] Rao K.M. On decomposition theorems of Meyer // Mathematica Scandinavica. 1969. Vol. 24. Pp. 66–78.

Библиографическая ссылка

Кашаева С.Ю. К теории обратных стохастических уравнений и их применении // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 1. С. 15–46.

Сведения об авторах

1. **Кашаева Светлана Юрьевна**
аспирант кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова.

Россия, 119991, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ им. М.В. Ломоносова. E-mail: svetlana.kashayeva@gmail.com.

ON THE THEORY OF BACKWARD STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THEIR APPLICATIONS

Kashayeva Svetlana Yuryevna
PhD student of Mathematical Statistics dep., Lomonosov Moscow State University
Russia, 119991, Moscow, GSP-1, Vorobyovi gory, Lomonosov MSU.
E-mail: svetlana.kashayeva@gmail.com

Received 22.12.2014, revised 15.01.2015.

In this paper, we discuss conditions of existence of solutions of backward stochastic differential equations with respect to general filtrations. A solution of a linear backward stochastic differential equation is found using classical theory of differential equations. We also study a special class of backward stochastic differential equations. Using solution properties of this type of equations, we give a new direct proof of Doob-Meyer theorem on a decomposition of a supermartingale from class DL into a difference of a martingale and an increasing predictive process. We also prove a new theorem on transposition of an integral of a stochastic process and a conditional mathematical expectation.

Keywords: backward stochastic differential equation, Doob-Meyer decomposition, martingales, supermartingale.

Bibliographic citation

Kashayeva S.Yu. On the theory of backward stochastic differential equations and their applications. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2015, no. 1, pp. 15–46. (in Russian)