УДК 519.216

ПУАССОНОВСКАЯ МОДЕЛЬ ТРАФИКА С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ НЕОДНОРОДНЫХ ИСТОЧНИКОВ

Сидорова О.И.
Кафедра математической статистики и системного анализа

Поступила в редакцию 05.02.2015, после переработки 15.02.2015.

Многочисленные экспериментальные исследования потоков данных в современных телекоммуникационных системах выявили два принципиально новых свойства, присущих таким системам: долговременную зависимость и самоподобие, что принципиально отличает их от систем марковского типа. Сильная иррегулярность и вариабельность пакетного трафика вкупе с присутствием долговременной зависимости оказывают сильное влияние на поведение сети и традиционные методы расчета характеристик производительности приводят в данном случае к существенной недооценке реальной нагрузки. Следовательно, построение адекватной модели трафика, отражающей его реальные особенности, и исследование ее свойств являются важнейшими задачами сетевого проектирования. Особый интерес для изучения представляет неоднородный трафик и его влияние на производительность системы. В настоящей работе рассматривается обобщение модели Пуассона с бесконечным числом источников на случай неоднородных длин активных периодов и указываются условия, при которых каждый такой источник нетривиальным образом влияет на всю систему.

Ключевые слова: долговременная и кратковременная зависимости, распределения с тяжелыми хвостами, модель Пуассона с бесконечным числом источников, α–устойчивое движение Леви.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 1. С. 47–66.

Введение

Связь является одним из важнейших компонентов инфраструктуры современного общества. Стремительно растущий спрос на коммуникационные услуги связи и прогресс в области современных технологий сбора, хранения, обработки и передачи информации стимулируют динамичное развитие данной отрасли. Менее чем за полтора столетия системы связи прошли путь от традиционных телеграфных и телефонных сетей, построенных по принципу «коммутации каналов», до современных цифровых систем связи, опирающихся на принцип «коммутации пакетов», и обеспечивающих за счет этого передачу интегральной информации — речи, данных, видео и т.п., в рамках одной *мультисервисной сети связи.*

В традиционных системах связи входящие потоки хорошо аппроксимируются марковскими процессами или стационарными процессами типа ARMA, а интервалы времени между прибытиями заявок полагаются независимыми случайными величинами, имеющими распределения с легкими хвостами. В силу экспоненциального убывания корреляционной функции трафика в подобных моделях агрегированный поток при увеличении масштаба усреднения приближается по свойствам к однородному процессу с независимыми приращениями (белому шуму), то есть обладает *короткой памятью.*

Многочисленные эмпирические исследования [4], [5], [7], [11] показали, что свойства компьютерного трафика кардинально отличаются от свойств трафика в традиционных «голосовых системах».

Компьютерный трафик имеет долгую память, у распределений длин периодов занятости/покоя наблюдаются тяжелые хвосты, агрегированный процесс нагрузки статистически выглядит одинаково при любом масштабе усреднения, то есть является *самоподобным* (*монофрактальным*), имеет *долгую память* и характеризуется «высокой пачечностью».

Наиболее известными моделями, приводящими к самоподобному входящему потоку, являются *ON/OFF*–модель и *модель Пуассона с бесконечным числом источников* [8], [10]. Отличительной особенностью данных моделей является наличие тяжелых хвостов у распределений длин *ON* и *OFF*–периодов в *ON/OFF*–модели и длин сообщений в модели Пуассона.

Широко используемые сегодня технологии обработки информации позволяют передавать по одному каналу трафик («голос», видео, текст и пр.) с разными требованиями к ширине полосы пропускания, скорости передачи, задержкам и прочим характеристикам сети, вследствие чего поток может быть крайне неоднородным. Ряд исследований [6], [11] показал, что самоподобие проявляется на крупных временных шкалах, а для малых периодов усреднения поведение трафика больше похоже на мультифрактал. В связи с этим актуальной является задача построения новых моделей входящих потоков, обладающих нужными свойствами. В частности, особый интерес для исследования представляет суперпозиция нескольких самоподобных процессов с различными индексами самоподобия.

К настоящему моменту подобного рода модели изучены слабо: основной вывод из нескольких работ, посвященных моделям трафика, порождаемого неоднородными источниками, состоит в том, что свойства трафика и характеристики производительности системы определяются источниками с самым длинным активным периодом («тяжелыми» заявками). В работах [2], [3] рассматривалась обобщенная *ON/OFF*–модель с неоднородными источниками, а в [1] — *модель Пуассона с бесконечным числом источников* в дискретном времени и были получены условия, при которых любой из источников способен нетривиальным образом влиять на производительность системы. Это позволяет описывать ситуации, в которых «тяжелые» заявки приходят редко, а основную нагрузку порождают более «легкие» требования.

Целью данной работы является обобщение модели Пуассона с бесконечным числом источников на случай неоднородных длин активных периодов и анализ условий, при которых источники любых типов оказывают нетривиальное влияние на всю систему.

1. Распределения с тяжелыми хвостами

Обычно, свойства самоподобия и долговременной зависимости, обнаруженные в многочисленных эмпирических исследованиях для различных сетевых сценариев, пытаются объяснить тем, что размеры файлов и (или) времена передачи сообщений имеют распределения с тяжелыми хвостами. К подобным распределениям относят вероятностные законы, характеризующиеся более медленным, по сравнению с экспоненциальным (легкий хвост), убыванием хвоста распределения. Ниже приводится описание соответствующих классов распределений.

Определение 1 (класс $\mathcal{L}$)**.** *Говорят, что распределение F случайной величины Z, сосредоточенное на $(0,\infty)$, имеет* ***длинный хвост****, если*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\bar F(x-y)}{\bar F(x)}=1,\ \forall\, y>0. \tag{1}$$

Определение 2. *Определенная для всех $x\geqslant 0$ положительная функция $L(x)$ называется медленно меняющейся на бесконечности, если для всех $t>0$*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{L(tx)}{L(x)}=1.$$

Определение 3. *Определенная для всех $x\geqslant 0$ положительная функция $U(x)$ называется* ***правильно меняющейся на бесконечности*** *с показателем $\alpha\in R$, если для всех $t>0$*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{U(t\,x)}{U(x)}=t^{\alpha}. \tag{2}$$

Очевидно, что функция $U(x)$ правильно меняется в том и только в том случае, если она представима в виде

$$U(x)=x^{\alpha}\cdot L(x),$$

где $L(x)$ — медленно меняющаяся функция.

Определение 4 (класс $\mathcal{R}(-\alpha),\alpha>0$)**.** *Говорят, что случайная величина Z имеет распределение* ***с правильно меняющимся хвостом****, если*

$$\bar F(x)=x^{-\alpha}\cdot L(x),\ x>0, \tag{3}$$

где $L(x)$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция.

Классу распределений с правильно меняющимся хвостом принадлежат *распределение Парето*, *логарифмическое гамма распределение*, *α–устойчивые законы*.

Пусть $\{X_i,\ i\in N\}$ есть последовательность н.о.р.с.в. с функцией распределения F, такой что $F(x)<1$ для всех $x>0$.

Определение 5 (класс $\mathcal{S}$). *Распределение F называется* ***субэкспоненциальным****, если выполнено одно из 2–х условий*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\bar F^{n*}(x)}{\bar F(x)}=n,$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(X_1+\ldots+X_n>x)}{P\big(\max(X_1,\ldots,X_n)>x\big)}=1,\quad n\geqslant 2,$$

где $\bar{F}^{n*}(x) = P(X_1 + \ldots + X_n > x)$.

К классу $\mathcal{S}$ помимо распределений с правильно меняющимися хвостами относятся *распределение Вейбулла*, *логнормальное* и некоторые другие.

Для перечисленных выше классов распределения справедливо следующее соотношение

$$\mathcal{R}(-\alpha) \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{L},$$

причем обратное, вообще говоря, не верно.

Медленное убывание хвоста распределения приводит к тому, что данная случайная величина может с положительной вероятностью принимать очень большие значения, и, следовательно, подобные распределения можно использовать при моделировании явлений, подверженных сильным флуктуациям.

2. α–устойчивые процессы Леви

Процессы Леви широко используются при описании входящих потоков в различных телекоммуникационных системах. Ниже приводится краткое описание подобных процессов.

Определение 6. *Случайный процесс* $Y = \big(Y(t),\ t \geqslant 0\big)$ *называется* ***процессом Леви****, если выполнены условия:*

1. $Y(0) = 0$ *почти наверное;*
2. Y *имеет независимые приращения;*
3. Y *имеет однородные (по времени) приращения;*
4. Y *является стохастически непрерывным;*
5. *траектории* Y *непрерывны справа и имеют конечные пределы слева при* $t > 0$.

В силу независимости и однородности приращений, распределение процесса Y полностью и единственным образом определяется распределением с.в. $Y(1)$.

Определение 7. *Распределение вероятностей* F *называется* ***устойчивым****, если для любых н.о.р.с.в.* X_1, X_2, X_3, *имеющих распределение* F *и любых положительных* a_1 *и* a_2 *существуют* $a_3 > 0$ *и* $c \in R^1$ *такие, что*

$$a_1X_1 + a_2X_2 \stackrel{d}{=} a_3X_3 + c,$$

где $\stackrel{d}{=}$ *означает равенство по распределению.*

Если $c = 0$ *для всех* $a_1, a_2 > 0$, *то распределение называется* ***строго устойчивым****.*

Характеристическая функция для устойчивой случайной величины X имеет вид:

$$Ee^{itX} = \begin{cases} \exp\Big\{-\sigma^\alpha |t|^\alpha \Big(1 - i\beta \operatorname{sign}(t)\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\Big) + i\mu t\Big\}, & \text{если} \quad \alpha \neq 1, \\ \exp\Big\{-\sigma |t| \Big(1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sign}(t)\ \ln|t|\Big) + i\mu t\Big\}, & \text{если} \quad \alpha = 1, \end{cases}$$

где $0 < \alpha \leqslant 2$ — показатель устойчивости; $\beta \in [-1, 1]$ — параметр скошенности плотности распределения; $\sigma \geqslant 0$ — параметр масштаба; $\mu \in R^1$ — параметр положения.

При $\beta = 0$ имеем симметричное относительно μ устойчивое распределение, характеристическая функция которого при $\mu = 0$ имеет вид

$$Ee^{itX} = \exp\{-\sigma^\alpha |t|^\alpha\}.$$

Параметр α отвечает за характер убывания хвоста распределения. Случай $\alpha = 2$ соответствует **нормальному распределению** — единственному из устойчивых законов с конечными математическим ожиданием и дисперсией. При $0 < \alpha < 2$ распределение с.в. X имеет **тяжелый хвост**, поскольку при $x \to \infty$ вероятности попадания в хвосты убывают степенным образом, т.е.

$$P(X > x) \sim c_\alpha \cdot \sigma^\alpha \cdot \frac{1+\beta}{2} \cdot x^{-\alpha}, \quad P(X < -x) \sim c_\alpha \cdot \sigma^\alpha \cdot \frac{1-\beta}{2} \cdot x^{-\alpha},$$

где c_α есть некоторая константа, зависящая только от α.

Полезно отметить следующее важное свойство: если с.в. X имеет α–устойчивое распределение с параметром $0 < \alpha < 2$, то для любого $0 < \gamma < \alpha$,

$$E|X_\alpha|^\gamma < \infty \quad \text{и} \quad E|X_\alpha|^\alpha = \infty.$$

Поэтому при $0 < \alpha < 2$ дисперсия с.в. X и моменты порядка $\gamma > 2$ бесконечны и, кроме того, при $0 < \alpha < 1$ математическое ожидание с.в. X также бесконечно.

Определение 8. *Случайный процесс* $Y = \big(Y_{\alpha,\sigma,\beta}(t),\ t \geqslant 0\big)$, *где* $\alpha \in (0, 2]$, $\beta \in [-1, 1]$, $\sigma \geqslant 0$ *называется* α*–устойчивым движением Леви, если он имеет независимые и стационарные приращения с* α*–устойчивым распределением.*

Значение $\alpha = 2$ соответствует броуновскому движению. Для $0 < \alpha < 1$ все моменты процесса Y бесконечны, для $1 < \alpha < 2$ процесс имеет конечное среднее и бесконечную дисперсию.

Определение 9. *Случайный процесс* $Y = (Y(t),\ t \geqslant 0)$ *называется* ***самоподобным*** *с показателем Херста* $H \geqslant 0$, *если выполнено следующее условие*

$$Y(ct) \stackrel{d}{=} c^H Y(t), \quad \forall\, t \geqslant 0,\, c > 0,$$

где $\stackrel{d}{=}$ *означает равенство конечномерных распределений.*

Поскольку при $x \to \infty$

$$P\big(Y_{\alpha,\sigma,\beta}(t) > x\big) = P\big(t^{1/\alpha} Y_{\alpha,\sigma,\beta}(1) > x\big) \sim c_\alpha \cdot \sigma^\alpha \cdot \frac{1+\beta}{2} \cdot t \cdot x^{-\alpha},$$

α–устойчивое движение Леви есть самоподобный процесс с параметром $H = 1/\alpha$.

В силу независимости приращений α–устойчивое движение Леви имеет «короткую» память.

3. Модель Пуассона с бесконечным числом источников

3.1 Однородный случай

Следуя работе [8], обозначим через $\{\Gamma_k,\ -\infty < k < \infty,\ \Gamma_0 < 0 < \Gamma_1\}$ моменты прибытия для однородного процесса Пуассона с интенсивностью λ. Тогда $\{-\Gamma_0, \Gamma_1, (\Gamma_{k+1} - \Gamma_k),\ k \neq 0)\}$ есть последовательность н.о.р.с.в., имеющих показательное распределение с параметром λ.

Величина
$$\varsigma = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \epsilon_{\Gamma_k},$$
считающая количество точек в процессе Пуассона, есть пуассоновская случайная мера со средним λL, где L — это мера Лебега.

Предположим, что в телекоммуникационной системе есть бесконечное число источников. Некоторый источник включается в момент Γ_k и начинает передавать сообщения на сервер. Без ограничения общности можно считать скорость передачи равной 1 (этого всегда можно добиться с помощью подходящей нормировки).

Обозначим через X_k длину k–го сообщения. Мы предполагаем, что $X_{on}, X_1, X_2, \ldots$ есть н.о.р.с.в., независимые от с.в. $\{\Gamma_k,\ k > -\infty\}$, имеющие распределение вида:
$$\bar{F}_{on}(x) = P(X_{on} > x) = x^{-\alpha} L(x), \quad x > 0, \quad 1 < \alpha < 2, \tag{4}$$
где $L(x)$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция.

Поскольку $1 < \alpha < 2$ с.в. X_{on} имеет конечное среднее μ_{on} и бесконечную дисперсию.

Определим функцию квантилей
$$b(t) = (1/\bar{F}_{on})^{\leftarrow}(t) = \inf\Big\{x > 0 :\ 1/\bar{F}_{on}(x) \geqslant t\Big\},\ t > 0,$$
являющуюся непрерывной слева и неубывающей. Из теории правильно меняющихся функций следует, что $b(t)$ правильно меняется с показателем $1/\alpha$, то есть
$$b(t) = t^{1/\alpha} L_0(t),$$
где $L_0(t)$ есть некоторая медленно меняющаяся на бесконечности функция.

Обозначим меру, считающую точки $\{(\Gamma_k, X_k)\}$, на $R \times [0, \infty]$ через
$$\nu = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \epsilon_{(\Gamma_k, X_k)}.$$

Мера ν имеет среднее, равное $\lambda\mathrm{L} \times F_{on}$.

Число источников $N(t)$, активных в момент t, равно
$$N(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_{[\Gamma_k \leqslant t \leqslant \Gamma_k + X_k]} = \nu\Big(\big\{(s, y) \in R \times [0, \infty] :\ s \leqslant t < s + y\big\}\Big), \tag{5}$$

где для любого t с.в. $N(t)$ имеет распределение Пуассона со средним:

$$EN(t) = \int\limits_{s=-\infty}^{t} \int\limits_{y=t-s}^{\infty} \lambda \mathrm{L}(ds) \times F_{on}(dy) = \lambda \int\limits_{s=-\infty}^{t} \bar{F}_{on}(t-s)ds = \lambda\mu_{on}. \quad (6)$$

Тогда **полная нагрузка** на сервер на интервале $[0,t]$ равна:

$$A(t) = \int\limits_{0}^{t} N(s)\, ds. \quad (7)$$

Поскольку при $h \to \infty$

$$\gamma_N(h) = cov\big(N(t), N(t+h)\big) = \lambda \int\limits_{h}^{\infty} \bar{F}_{on}(v)\, dv \sim c \cdot h^{-(\alpha-1)} \cdot L(h), \quad (8)$$

случайный процесс $N(t)$ имеет «долгую» память.

Таким образом, высокая вариабельность длительностей времен передачи сообщений влечет эффект «долгой» памяти в скорости, с которой нагрузка поступает в систему.

Пусть интенсивность установления соединения

$$\lambda = \lambda(T) \to \infty, \quad T \to \infty,$$

где $T > 0$ — масштабный параметр.

Будем рассматривать **семейство Пуассоновских процессов**

$$N_T(t) := N(Tt), \quad T > 0$$

и соответствующее **семейство агрегированных процессов полной нагрузки**

$$A_T(t) := A(Tt).$$

Процесс $\big(A(Tt),\ t \geqslant 0\big)$ при больших T характеризует полную нагрузку на систему на крупных временных шкалах.

Замечание 1. Для компактной записи формул зависимость λ от T в дальнейшем может опускаться.

Пусть рассматриваемая система функционирует в режиме **«медленного роста числа соединений»** (Slow Growth Condition, SGC)

$$\lim_{T\to\infty} \frac{b(\lambda T)}{T} = 0. \quad (9)$$

Можно показать (см. [8], Леммы 1, 2), что в этом случае

$$\lim_{T\to\infty} \lambda T \bar{F}_{on}(T) = 0 \quad (10)$$

и

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\lambda T^2 \bar{F}_{on}(T)}{b(\lambda T)} = 0. \quad (11)$$

Нас интересует асимптотическое поведение процесса $A(Tt)$ при $T \to \infty$ в режиме SGC. Справедлив следующий результат

Теорема 1. ([8]) *Пусть F_{on} удовлетворяют условию* (4). *В режиме SGC процесс* $\big(A(Tt),\ t \geqslant 0\big)$, *описывающий полную работу в системе на интервале* $[0, Tt]$, *удовлетворяет следующему асимптотическому соотношению*

$$\frac{A(Tt) - T\lambda\mu_{on}t}{b(\lambda T)} \xrightarrow{fidi} X_{\alpha,1,1}(t),$$

где $\xrightarrow{fidi}$ *означает сходимость конечномерных распределений.*

3.2 Неоднородный случай

Рассмотрим ситуацию, когда в системе присутствуют источники $2 \leqslant r < \infty$ различных типов. Как и в однородном случае будем полагать, что источники m–го типа появляются в системе в соответствии с процессом Пуассона $\big(\Gamma_k^{(m)},\ -\infty < k < \infty,\ \Gamma_0^{(m)} < 0 < \Gamma_1^{(m)}\big)$, интенсивность которого равна $\lambda^{(m)}$, $m = \overline{1, r}$.

Обозначим через $X_k^{(m)}$ длину k–го сообщения для источника m–го типа. Мы предполагаем, что $X_{on}^{(m)}, X_1^{(m)}, X_2^{(m)}, \ldots$ есть н.о.р.с.в., независимые от с.в. $\big\{\Gamma_k^{(m)},\ k > -\infty\big\}$, имеющие распределение

$$\bar{F}_{on}^{(m)}(x) = x^{-\alpha^{(m)}} L^{(m)}(x), \quad x > 0; \quad m = \overline{1, r}, \tag{12}$$

где $1 < \alpha^{(m)} < 2$ и $L^{(m)}(x)$ — медленно меняющаяся на бесконечности функция.

Поскольку $\alpha^{(m)} \in (1, 2)$ для всех m распределения $F_{on}^{(m)}$ имеют конечные средние $\mu_{on}^{(m)}$ и бесконечные дисперсии.

Мы полагаем, что $1 < \alpha^{(1)} < \ldots < \alpha^{(r)} < 2$.

Обозначим

$$\begin{aligned} N^{(m)}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_{[\Gamma_k^{(m)} \leqslant t \leqslant \Gamma_k^{(m)} + X_k^{(m)}]} = \\ &= \nu^{(m)}\Big(\big\{(s, y) \in R \times [0, \infty] :\ s \leqslant t < s + y\big\}\Big) \end{aligned}$$

число активных в момент t источников, длина активных периодов которых имеет распределение $F_{on}^{(m)}$. Мы предполагаем, что $(N^{(m)}(t),\ t \geqslant 0)$ есть независимые процессы Пуассона с параметром $\lambda^{(m)}$, $m = \overline{1, r}$.

Интенсивность входящего потока в момент t и *полная входящая работа* к моменту времени t будут равны соответственно

$$N(t) = = \sum_{m=1}^{r} N^{(m)}(t), \tag{13}$$

$$A(t) = = \int_0^t N(s)\, ds,\ t \geqslant 0, \tag{14}$$

где $N(t)$ есть процесс Пуассона с параметром $\lambda = \lambda^{(1)} + \ldots + \lambda^{(r)}$.

Далее будем рассматривать семейство агрегированных процессов нагрузки

$$A_T(t) := A(Tt), \quad T > 0. \tag{15}$$

Определим функции $\lambda^{(m)}(T)$ по правилу:

$$\begin{aligned} \lambda^{(m)}(T) &\sim \frac{(\lambda T)^{\alpha^{(m)}/\alpha^{(r)}} \cdot \big(L_0^{(r)}(\lambda T)\big)^{\alpha^{(m)}}}{T \cdot L^{(m)}\big(b^{(r)}(\lambda T)\big)}, \quad m = \overline{1, r-1}, \\ \lambda^{(r)}(T) &= \lambda(T) - \lambda^{(1)}(T) - \ldots - \lambda^{(r-1)}(T). \end{aligned} \tag{16}$$

Легко видеть, что при $T \to \infty$

$$\lambda^{(r)}(T)/\lambda(T) \to 1; \quad \lambda^{(m)}(T)/\lambda(T) \to 0, \quad m = \overline{1, r-1}.$$

Основным результатом данной статьи является следующая

Теорема 2. *Если $F_{on}^{(m)}$ удовлетворяют условию* (12) *и режим SGC выполняется для всех m и $\lambda^{(m)}(T)$, определенных в* (16)*, то при некоторой нормировке предельный процесс для $A(Tt)$ существует и является суммой независимых устойчивых движений Леви с показателями $\alpha^{(1)} < \ldots < \alpha^{(r)}$.*

Доказательство. 1. Основное представление.

Представим случайную величину $A(T)$ виде суммы отдельных слагаемых. Для этого все процессы, порождающие $A(T)$, разделим на четыре вида:

– процессы, начавшиеся и закончившиеся в промежутке $[0, T]$;

– процессы, начавшиеся в промежутке $[0, T]$ и продолжающиеся после T;

– процессы, начавшиеся до нулевого момента времени и закончившиеся в промежутке $[0, T]$;

– процессы, начавшиеся до нулевого момента времени и продолжающиеся после T.

Каждой из этих групп соответствуют непересекающиеся области на плоскости:

$$\begin{aligned} R_1 &:= \big\{(s, y) :\ 0 < s \leqslant T,\ 0 < y,\ s + y \leqslant T\big\}, \\ R_2 &:= \big\{(s, y) :\ 0 < s \leqslant T,\ T < s + y\big\}, \\ R_3 &:= \big\{(s, y) :\ s \leqslant 0,\ 0 < s + y \leqslant T\big\}, \\ R_4 &:= \big\{(s, y) :\ s \leqslant 0,\ T < s + y\big\}. \end{aligned} \tag{17}$$

Случайную величину $A(T)$ можно представить в виде суммы

$$\begin{aligned} A(T) &= \sum_{m=1}^{r} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k^{(m)} I_{[(\Gamma_k^{(m)}, X_k^{(m)}) \in R_1]} + \sum_{m=1}^{r} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \big(T - \Gamma_k^{(m)}\big) I_{[(\Gamma_k^{(m)}, X_k^{(m)}) \in R_2]} + \\ &+ \sum_{m=1}^{r} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \big(X_k^{(m)} + \Gamma_k^{(m)}\big) I_{[(\Gamma_k^{(m)}, X_k^{(m)}) \in R_3]} + \sum_{m=1}^{r} \sum_{k=-\infty}^{\infty} T I_{[(\Gamma_k^{(m)}, X_k^{(m)}) \in R_4]} = \\ &= \sum_{m=1}^{r} A_1^{(m)} + \sum_{m=1}^{r} A_2^{(m)} + \sum_{m=1}^{r} A_3^{(m)} + \sum_{m=1}^{r} A_4^{(m)} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 + \bar{A}_3 + \bar{A}_4, \end{aligned} \tag{18}$$

в которой случайные слагаемые $\bar{A}_k$, $k = 1, 2, 3, 4$ являются независимыми.

Для любого m величина $\nu^{(m)}$, характеризующая число точек в области $R \times [0, \infty]$, есть пуассоновская случайная мера со средним $\lambda^{(m)}\mathrm{L} \times F_{on}^{(m)}$. Тогда средние значения $E\nu^{(m)}(R_i)$, $i = \overline{1,4}$ представляют собой интегралы по мере $\lambda^{(m)}\mathrm{L} \times F_{on}^{(m)}$ по областям R_i:

$$\begin{aligned}
\lambda^{(m)} m_1^{(m)} &= E\nu^{(m)}(R_1) = \lambda^{(m)} \int\limits_{s=0}^{T} \int\limits_{y=0}^{T-s} \mathrm{L}(ds) \times F_{on}^{(m)}(dy) = \\
&= \lambda^{(m)} \int\limits_{s=0}^{T} F_{on}^{(m)}(T-s)\, ds \sim \lambda^{(m)} T \quad \Rightarrow \quad m_1^{(m)} \sim T, \\
\lambda^{(m)} m_2^{(m)} &= E\nu^{(m)}(R_2) = \lambda^{(m)} \int\limits_{s=0}^{T} \int\limits_{y=T-s}^{\infty} \mathrm{L}(ds) \times F_{on}^{(m)}(dy) = \\
&= \lambda^{(m)} \int\limits_{s=0}^{T} \bar{F}_{on}^{(m)}(T-s)\, ds \sim \lambda^{(m)} \mu_{on}^{(m)} \quad \Rightarrow \quad m_2^{(m)} \sim \mu_{on}^{(m)}, \\
\lambda^{(m)} m_3^{(m)} &= E\nu^{(m)}(R_3) = \lambda^{(m)} \int\limits_{s=-\infty}^{0} \int\limits_{y=-s}^{T-s} \mathrm{L}(ds) \times F_{on}^{(m)}(dy) = \\
&= \lambda^{(m)} \int\limits_{u=0}^{T} \bar{F}_{on}^{(m)}(u)\, du \sim \lambda^{(m)} \mu_{on}^{(m)} \quad \Rightarrow \quad m_3^{(m)} \sim \mu_{on}^{(m)}, \\
\lambda^{(m)} m_4^{(m)} &= E\nu^{(m)}(R_4) = \lambda^{(m)} \int\limits_{s=-\infty}^{T} \int\limits_{y=T-s}^{\infty} \mathrm{L}(ds) \times F_{on}^{(m)}(dy) = \\
&= \lambda^{(m)} \int\limits_{u=T}^{\infty} \bar{F}_{on}^{(m)}(u)\, du \sim \frac{\lambda^{(m)} T \bar{F}_{on}^{(m)}(T)}{\alpha^{(m)} - 1} \to 0 \quad \Rightarrow \quad m_4^{(m)} \to 0
\end{aligned}$$

при $T \to \infty$.

В силу конечности средних значений $E\nu^{(m)}(R_i)$, $i = \overline{1,4}$ имеем

$$\nu^{(m)}(R_i) \overset{d}{=} \sum_{k=1}^{P_i^{(m)}} \epsilon\Big(t_{k,i}^{(m)}, j_{k,i}^{(m)}\Big),$$

где $P_i^{(m)}$ – пуассоновские случайные величины со средним $\lambda^{(m)} m_i^{(m)}$; $\Big(t_{k,i}^{(m)}, j_{k,i}^{(m)}\Big)$ – независимые и одинаково распределенные (при фиксированных i и m) случайные вектора с общим распределением

$$\frac{\lambda^{(m)}\mathrm{L}(ds) \times F_{on}^{(m)}(dy)}{\lambda^{(m)} m_i^{(m)}} = \frac{\mathrm{L}(ds) \times F_{on}^{(m)}(dy)}{m_i^{(m)}}. \tag{19}$$

Заметим также, что при любых i, k и m с.в. $P_i^{(m)}$ не зависят от $t_{k,i}^{(m)}, j_{k,i}^{(m)}$.

При фиксированных T и m величины $A_i^{(m)}$ можно представить в виде следующих случайных сумм:

$$A_1^{(m)} \overset{d}{=} \sum_{k=1}^{P_1^{(m)}} j_{k,1}^{(m)}, \qquad A_3^{(m)} = \sum_{k=1}^{P_3^{(m)}} \left(j_{k,3}^{(m)} + t_{k,3}^{(m)}\right),$$
$$A_2^{(m)} \overset{d}{=} \sum_{k=1}^{P_2^{(m)}} \left(T - t_{k,2}^{(m)}\right), \quad A_4^{(m)} = \sum_{k=1}^{P_4^{(m)}} T. \tag{20}$$

Тогда

$$\bar{A}_1 = \sum_{m=1}^{r} A_1^{(m)}, \quad \bar{A}_3 = \sum_{m=1}^{r} A_3^{(m)},$$
$$\bar{A}_2 = \sum_{m=1}^{r} A_2^{(m)}, \quad \bar{A}_4 = \sum_{m=1}^{r} A_4^{(m)}. \tag{21}$$

Далее для упрощения обозначений будем полагать, что случайные вектора $\left(t_i^{(m)}, j_i^{(m)}\right)$ имеют то же распределение, что и $\left(t_{k,i}^{(m)}, j_{k,i}^{(m)}\right)$, $i = 1, 2, 3, 4$.

2. Сходимость одномерных распределений.

Покажем, что в условиях SGC основная нагрузка на сервер характеризуется величиной $\bar{A}_1(T) = \bar{A}_1$, которая при $T \to \infty$ имеет асимптотически устойчивое распределение с параметром $\alpha^{(1)} + \ldots + \alpha^{(r)}$, а величины $\bar{A}_i$, $i = 2, 3, 4$ асимптотически незначимы.

В силу (16) и того, что функция $b^{(m)}(t)$ правильно меняется с показателем $1/\alpha^{(m)}$, имеем при $T \to \infty$

$$\begin{aligned}
b^{(m)}(\lambda^{(m)}T) \quad &\sim \quad \frac{(\lambda T)^{1/\alpha^{(r)}} \cdot L_0^{(r)}(\lambda T)}{T^{1/\alpha^{(m)}} \cdot \left(L^{(m)}\left(b^{(r)}(\lambda T)\right)\right)^{1/\alpha^{(m)}}} \cdot T^{1/\alpha^{(m)}} \cdot L_0^{(m)}(\lambda^{(m)}T) \\
&\sim \quad (\lambda T)^{1/\alpha^{(r)}} \cdot L_0^{(r)}(\lambda T) \cdot \frac{L_0^{(m)}(\lambda^{(m)}T)}{\left(L^{(m)}\left(b^{(r)}(\lambda T)\right)\right)^{1/\alpha^{(m)}}} \\
&= \quad (\lambda T)^{1/\alpha^{(r)}} \cdot L_0^{(r)}(\lambda T) \cdot \tilde{L}^{(m)}(\lambda T), \quad m = \overline{1, r-1}
\end{aligned}$$

и

$$b^{(r)}(\lambda^{(r)}T) \sim (\lambda T)^{1/\alpha^{(r)}} \cdot L_0^{(r)}(\lambda T).$$

Следовательно, величины $\lambda^{(k)}(T)$ подобраны таким образом, что при $T \to \infty$

$$b^{(m)}(\lambda^{(m)}T) \sim b^{(r)}(\lambda T) \cdot \tilde{L}^{(m)}(\lambda T).$$

Пусть $i = 2$. Покажем, что

$$\frac{A_2^{(m)}}{b^{(r)}(\lambda T)} \xrightarrow{P} 0,$$

где $\xrightarrow{P}$ означает сходимость по вероятности.

При $l \geqslant 1$ имеем

$$\begin{aligned} E\big(T - t_2^{(m)}\big)^l &= \int\limits_{s=0}^{T} \int\limits_{y=T-s}^{\infty} (T-s)^l \, \frac{\mathrm{L}(ds) \times F_{on}^{(m)}(dy)}{m_2^{(m)}} \sim \\ &\sim \frac{1}{\mu_{on}^{(m)}} \int\limits_{s=0}^{T} \int\limits_{y=T-s}^{\infty} (T-s)^l \, F_{on}^{(m)}(dy)\, ds = \\ &= \frac{1}{\mu_{on}^{(m)}} \int\limits_{u=0}^{T} u^l \, \bar{F}_{on}^{(m)}(u)\, du. \end{aligned}$$

Поскольку при любых m выполнено $l+1 \geqslant 2 > \alpha^{(m)}$ при $T \to \infty$ имеем по теореме Карамата

$$\begin{aligned} \frac{E\big(T - t_2^{(m)}\big)^l}{T^{l+1}\bar{F}_{on}^{(m)}(T)} &\sim \frac{1}{\mu_{on}^{(m)}} \int\limits_{x=0}^{1} x^l \, \frac{\bar{F}_{on}^{(m)}(xT)}{\bar{F}_{on}^{(m)}(T)}\, dx = \\ &\sim \frac{1}{\mu_{on}^{(m)}} \int\limits_{0}^{1} x^{l-\alpha^{(m)}}\, dx = \frac{1}{\mu_{on}^{(m)}(l - \alpha^{(m)} + 1)}, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{gathered} \frac{E\big(T - t_2^{(m)}\big)}{T^2\bar{F}_{on}^{(m)}(T)} \sim \frac{1}{\mu_{on}^{(m)}\big(2 - \alpha^{(m)}\big)}; \\ \frac{D\big(T - t_2^{(m)}\big)}{T^3\bar{F}_{on}^{(m)}(T)} \sim \frac{E\big(T - t_2^{(m)}\big)^2}{T^3\bar{F}_{on}^{(m)}(T)} \sim \frac{1}{\mu_{on}^{(m)}(3 - \alpha^{(m)})}; \\ \limsup_{T\to\infty} \frac{|E\big(T - t_2^{(m)} - E(T - t_2^{(m)})|^3}{T^4\bar{F}_{on}^{(m)}(T)} \leqslant const. \end{gathered} \tag{22}$$

В силу того, что функции $b^{(m)}(\lambda^{(m)}T)$ и $b^{(r)}(\lambda T)$ асимптотически ведут себя одинаково, с учетом (22) и (11) получаем

$$EA_2^{(m)} = EP_2^{(m)} E\big(T - t_2^{(m)}\big) \sim c^{(m)}\, \lambda^{(m)} T^2 \bar{F}_{on}^{(m)}(T) = o\big(b^{(r)}(\lambda T)\big),$$

и

$$DA_2^{(m)} = EP_2^{(m)} D\big(T - t_2^{(m)}\big) + DP_2^{(m)} E\big(T - t_2^{(m)}\big)^2 \sim \tilde{c}^{(m)}\, \lambda^{(m)} T^3 \bar{F}_{on}^{(m)}(T),$$

где $c^{(m)}$ и $\tilde{c}^{(m)}$ есть некоторые константы.

Применяя неравенство Чебышева и условия (10) и (11), получаем

$$\begin{aligned} P\Big(\big|A_2^{(m)} - EA_2^{(m)}\big| > \varepsilon b^{(r)}(\lambda T)\Big) &\leqslant \frac{DA_2^{(m)}}{\varepsilon^2\big(b^{(r)}(\lambda T)\big)^2} \sim \\ &\sim \tilde{c}^{(m)}\, \frac{\lambda^{(m)} T^2 \bar{F}_{on}^{(m)}(T)}{b^{(r)}(\lambda T)} \, \frac{T}{\varepsilon^2 b^{(r)}(\lambda T)} \to 0. \end{aligned}$$

Следовательно, при $T \to \infty$

$$\frac{A_2^{(m)}}{b^{(r)}(\lambda T)} \xrightarrow{P} \frac{EA_2^{(m)}}{b^{(r)}(\lambda T)} \to 0.$$

Аналогичным образом, можно показать, что

$$\frac{A_i^{(m)}}{b^{(r)}(\lambda T)} \xrightarrow{P} 0, \quad i = 3, 4.$$

Из определения с.в. $\bar{A}_i$ и свойств сходимости по вероятности следует, что при $T \to \infty$

$$\frac{\bar{A}_i}{b^{(r)}(\lambda T)} \xrightarrow{P} 0, \quad i = 2, 3, 4. \tag{23}$$

Проанализируем асимптотическое поведение с.в. $\bar{A}_1$. Воспользуемся следующим представлением

$$\begin{aligned}
A_1^{(m)} &- \lambda^{(m)}\mu_{on}^{(m)}T = \sum_{k=1}^{P_1^{(m)}} \left(j_{k,i}^{(m)} - Ej_1^{(m)}\right) + Ej_1^{(m)}\left(P_1^{(m)} - EP_1^{(m)}\right) + \\
&+ \left(EA_1^{(m)} - \lambda^{(m)}\mu_{on}^{(m)}T\right) = A_{11}^{(m)} + A_{12}^{(m)} + A_{13}^{(m)} \quad \Rightarrow \\
\bar{A}_1 &= \sum_{m=1}^{r} A_{11}^{(m)} + \sum_{m=1}^{r} A_{12}^{(m)} + \sum_{m=1}^{r} A_{13}^{(m)} = \bar{A}_{11} + \bar{A}_{12} + \bar{A}_{13}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Вычислим моменты $E\left(j_1^{(m)}\right)^l$, $l \geqslant 1$ для с.в. $j_1^{(m)}$. Имеем

$$\begin{aligned}
E\left(j_1^{(m)}\right)^l &= \int_{s=0}^{T} \int_{y=0}^{T-s} y^l \, \frac{\mathrm{L}(ds) \times F_{on}^{(m)}(dy)}{m_1^{(m)}} \sim \frac{1}{T} \int_{s=0}^{T} \int_{y=0}^{T-s} y^l \, F_{on}^{(m)}(dy)\, ds = \\
&= \frac{1}{T} \int_{s=0}^{T} \left(\int_{y=0}^{s} y^l \, F_{on}^{(m)}(dy) \right) ds.
\end{aligned} \tag{25}$$

Поскольку $\int\limits_{y=0}^{s} y^l \, F_{on}^{(m)}(dy) \to \mu_{on}^{(m)}$, из (25) следует, что

$$Ej_1^{(m)} \to \mu_{on}^{(m)}. \tag{26}$$

При $l > \alpha^{(m)}$ по теореме Карамата имеем

$$\begin{aligned}
\frac{E\left(j_1^{(m)}\right)^l}{T^l \bar{F}_{on}^{(m)}(T)} &\sim \int_{s=0}^{T} \int_{y=0}^{s} \left(\frac{y}{T}\right)^l \frac{F_{on}^{(m)}(dy)}{\bar{F}_{on}^{(m)}(T)}\, d\left(\frac{s}{T}\right) = \\
&= \int_{z=0}^{1} \int_{u=0}^{z} u^l \, \frac{F_{on}^{(m)}(T du)}{\bar{F}_{on}^{(m)}(T)}\, dz \sim \int_{z=0}^{1} \int_{u=0}^{z} u^l \alpha^{(m)} u^{-1-\alpha^{(m)}}\, du\, dz = \\
&= \frac{\alpha^{(m)}}{(l - \alpha^{(m)})(l - \alpha^{(m)} + 1)},
\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\frac{Dj_1^{(m)}}{T^2\bar{F}_{on}^{(m)}(T)} \sim \int\limits_{z=0}^{1}\int\limits_{u=0}^{z} u^2\alpha^{(m)}u^{-1-\alpha^{(m)}}\,du\,dz = \frac{\alpha^{(m)}}{(2-\alpha^{(m)})(3-\alpha^{(m)})}, \tag{27}$$

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{|E\big(j_1^{(m)}-Ej_1^{(m)}\big)|^3}{T^3\bar{F}_{on}^{(m)}(T)} \leqslant \limsup_{T\to\infty}\frac{4\Big(E\big(j_1^{(m)}\big)^3+\big(Ej_1^{(m)}\big)^3\Big)}{T^3\bar{F}_{on}^{(m)}(T)} \leqslant const.$$

Случайная величина $P_1^{(m)}$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda^{(m)}m_1^{(m)}$, тогда, в силу центральной предельной теоремы,

$$\frac{P_1^{(m)}-EP_1^{(m)}}{\sqrt{\lambda^{(m)}m_1^{(m)}}} \sim \frac{P_1^{(m)}-EP_1^{(m)}}{\sqrt{\lambda^{(m)}T}} \xrightarrow{d} N(0,1), \quad T\to\infty,$$

где $\xrightarrow{d}$ означает сходимость по распределению.

Поскольку $\sqrt{\lambda^{(m)}T}=o\big(b^{(r)}\big(\lambda T\big)\big)$, для с.в. $A_{12}^{(m)}$ справедливо

$$\frac{A_{12}^{(m)}}{b^{(r)}(\lambda T)} \xrightarrow{P} 0, \quad T\to\infty.$$

В силу (25) и теоремы Карамата имеем

$$\begin{aligned} A_{13}^{(m)} &= Ej_1^{(m)}EP_1^{(m)}-\lambda^{(m)}\mu_{on}^{(m)}T = \\ &= \lambda^{(m)}\int\limits_{s=0}^{T}\Big(\int\limits_{y=0}^{s} y\,F_{on}^{(m)}(dy)-\mu_{on}^{(m)}\Big)\,ds = -\lambda^{(m)}\int\limits_{s=0}^{T}\int\limits_{y=s}^{\infty} y\,F_{on}^{(m)}(dy)\,ds \sim \\ &\sim -\bar{c}_1^{(m)}\,\lambda^{(m)}T^2\bar{F}_{on}^{(m)}(T)=o\big(b^{(r)}(\lambda T)\big), \end{aligned}$$

где $\bar{c}_1^{(m)}$ есть некоторая константа.

Из определения с.в. $\bar{A}_{12}$ и $\bar{A}_{13}$ и свойств сходимости по вероятности следует, что

$$\frac{\bar{A}_{12}}{b^{(r)}\big(\lambda T\big)},\ \frac{\bar{A}_{13}}{b^{(r)}\big(\lambda T\big)} \xrightarrow{P} 0, \quad T\to\infty. \tag{28}$$

Таким образом, осталось рассмотреть только с.в. $\bar{A}_{11}$.

При фиксированном m величина $A_{11}^{(m)}$ является суммой приблизительно $\lambda^{(m)}m_1^{(m)}\sim\lambda^{(m)}T$ независимых одинаково распределенных с.в. При условии SGC

$$\frac{b^{(r)}(\lambda T)}{T}\to 0 \ \Rightarrow\ T-b^{(r)}(\lambda T)x>0, \quad \forall x>0.$$

Таким образом, при любом m и фиксированном $x > 0$

$$P\Big(j_1^{(m)} > b^{(r)}(\lambda T)x\Big) = \int\limits_{s=0}^{T-b^{(r)}(\lambda T)x} \int\limits_{y=b^{(r)}(\lambda T)x}^{T-s} \frac{F_{on}^{(m)}(dy)}{m_1^{(m)}}\, ds =$$

$$= \frac{1}{m_1^{(m)}} \bar{F}_{on}^{(m)}\big(b^{(r)}(\lambda T)x\big)\big(T - b^{(r)}(\lambda T)x\big) - \frac{1}{m_1^{(m)}} \int\limits_0^{T-b^{(r)}(\lambda T)x} \bar{F}_{on}^{(m)}(T-s)\, ds =$$

$$= \left(1 - \frac{b^{(r)}(\lambda T)x}{T}\right) \bar{F}_{on}^{(m)}\big(b^{(r)}(\lambda T)x\big) - \frac{b^{(r)}(\lambda T)}{T} \int\limits_0^{T/b^{(r)}(\lambda T)} \bar{F}_{on}^{(m)}\big(b^{(r)}(\lambda T)s\big)\, ds \sim$$

$$\sim \bar{F}_{on}^{(m)}\big(b^{(r)}(\lambda T)x\big) \sim (\lambda T)^{-\alpha^{(m)}/\alpha^{(r)}} x^{-\alpha^{(m)}} \frac{L^{(m)}\big(b^{(r)}(\lambda T)\big)}{\big[L_0^{(r)}(\lambda T)\big]^{\alpha^{(m)}}}, \quad T \to \infty,$$

откуда с учетом (16) следует, что

$$\begin{array}{rcl} \lambda^{(m)} T P\Big(j_1^{(m)} > b^{(r)}(\lambda T)x\Big) & \sim & x^{-\alpha^{(m)}}, \quad m = \overline{1, r-1}; \\ \lambda^{(r)} T P\Big(j_1^{(r)} > b^{(r)}(\lambda T)x\Big) & \sim & x^{-\alpha^{(r)}} L^*(\lambda T), \end{array}$$

где $L^*(\lambda T)$ есть некоторая медленно меняющаяся на бесконечности функция.

Опираясь на [9] (Предложение 3.4), получаем для $t \geqslant 0$

$$Y_T^{(m)}(t) := \big(b^{(r)}(\lambda T)\big)^{-1} \sum_{k=1}^{\left[\lambda^{(m)} T t\right]} \big(j_{k,1}^{(m)} - E j_1^{(m)}\big) \xrightarrow{d} Y_{\alpha^{(m)},1,1}(t), \tag{29}$$

где $[\cdot]$ означает целую часть числа.

Поскольку $P_1^{(m)}$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda^{(m)} m_1^{(m)} \sim \lambda^{(m)} T$ для характеристической функции с.в. $(\lambda^{(m)} T)^{-1} P_1^{(m)}$ при $T \to \infty$ будет справедливо

$$\varphi_{P_1^{(m)}}\left(\frac{t}{\lambda^{(m)} T}\right) \sim exp\left\{\lambda^{(m)} T \left[1 + \frac{it}{\lambda^{(m)} T} + o\left(\frac{t}{\lambda^{(m)} T}\right) - 1\right]\right\} \to e^{it},$$

откуда следует, что

$$\frac{P_1^{(m)}}{\lambda^{(m)} T} \xrightarrow{d} 1. \tag{30}$$

В силу независимости $j_{k,1}^{(m)}$ и $P_1^{(m)}$ объединяем два последних соотношения и получаем, что

$$\frac{A_{11}^{(m)}}{b^{(r)}(\lambda T)} = Y_T^{(m)}\left(\frac{P_1^{(m)}}{\lambda^{(m)} T}\right) = \sum_{k=1}^{P_1^{(m)}} \big(j_{k,1}^{(m)} - E j_1^{(m)}\big) \xrightarrow{d} Y_{\alpha^{(m)},1,1}(1), \tag{31}$$

где с.в. $Y_{\alpha^{(m)},1,1}(1)$ имеет асимметричное устойчивое распределение с показателем $\alpha^{(m)}$.

В силу независимости с.в. $A_{11}^{(m)}$ при разных m, имеем

$$\frac{\bar{A}_{11}}{b^{(r)}(\lambda T)} = \sum_{m=1}^{r} \frac{A_{11}^{(m)}}{b^{(r)}(\lambda T)} \xrightarrow{d} Y_{\alpha^{(1)}+\ldots+\alpha^{(r)},1,1}(1). \tag{32}$$

Объединяя соотношения (23), (28) и (32), получаем, что с.в. $\bar{A}(T)$ имеет в пределе устойчивое распределение с показателем $\alpha^{(1)} + \ldots + \alpha^{(r)}$. *Таким образом, сходимость одномерных распределений при $t = 1$ процесса $\bar{A}(Tt)$ доказана.*

3. Сходимость конечномерных распределений.

Теперь необходимо доказать сходимость конечномерных распределений. Будем рассматривать только 2–мерный случай, поскольку в общей ситуации рассуждения аналогичны.

Фиксируем числа $t_1 < t_2 < \infty$. Случайная величина $A_1^{(m)}(Tt_2)$ допускает следующее представление:

$$\begin{aligned}
A_1^{(m)}(Tt_2) &= A_1^{(m)}(Tt_1) + \sum_{Tt_1 < \Gamma_k^{(m)} \leqslant Tt_2} X_k^{(m)} I_{[\Gamma_k^{(m)} + X_k^{(m)} \leqslant Tt_2]} + \\
&+ \sum_{\Gamma_k^{(m)} < Tt_1} X_k^{(m)} I_{[Tt_1 < \Gamma_k^{(m)} + X_k^{(m)} \leqslant Tt_2]} = \\
&= A_1^{(m)}(Tt_1) + A_{21}^{(m)}\big(T(t_2 - t_1)\big) + A_{22}^{(m)} \quad \Rightarrow \\
\bar{A}_1(Tt_2) &= \sum_{m=1}^{r} A_1^{(m)}(Tt_1) + \sum_{m=1}^{r} A_{21}^{(m)}\big(T(t_2 - t_1)\big) + \sum_{m=1}^{r} A_{22}^{(m)} = \\
&= \bar{A}_1(Tt_1) + \bar{A}_{21}\big(T(t_2 - t_1)\big) + \bar{A}_{22}.
\end{aligned}$$

Случайная величина $A_1^{(m)}(Tt_1)$ и $A_{21}^{(m)}\big(T(t_2 - t_1)\big)$ являются независимыми и, поскольку,

$$A_{21}^{(m)}\big(T(t_2 - t_1)\big) \stackrel{d}{=} A_1^{(m)}\big(T(t_2 - t_1)\big),$$

то при соответствующей нормировке они имеют асимптотически устойчивое распределение с показателем $\alpha^{(m)}$. Следовательно, с.в. $A_1^{(m)}(Tt_1) + A_1^{(m)}\big(T(t_2 - t_1)\big)$ при $T \to \infty$ также имеет устойчивое распределение с показателем $\alpha^{(m)}$.

Покажем, что

$$\frac{A_{22}^{(m)}}{b^{(r)}(\lambda T)} \xrightarrow{P} 0, \quad T \to \infty.$$

Обозначим $B = \big\{(s, y) : \ 0 \leqslant s \leqslant Tt_1, \, Tt_1 < s + y \leqslant Tt_2\big\}$.

Тогда при $l \geqslant 1$ и $T \to \infty$

$$\begin{aligned}
E\big(A_{22}^{(m)}\big)^l &= E\left(\iint\limits_B y\,\nu^{(m)}(ds,dy)\right) = \lambda^{(m)} \int\limits_{s=0}^{Tt_1} \int\limits_{y=Tt_1-s}^{Tt_2-s} y^l\, F_{on}^{(m)}(dy)\,ds = \\
&\sim \lambda^{(m)} T^{l+1} \bar F_{on}^{(m)}(T) \int\limits_{z=0}^{t_1} \int\limits_{u=t_1-z}^{t_2-z} u^l\, \frac{F_{on}^{(m)}(T du)}{\bar F_{on}^{(m)}(T)}\, dz \sim \\
&\sim \lambda^{(m)} T^{l+1} \bar F_{on}^{(m)}(T) \underbrace{\int\limits_{z=0}^{t_1} \int\limits_{u=t_1-z}^{t_2-z} u^l\, \alpha^{(m)}\, u^{-1-\alpha^{(m)}}\, du\, dz}_{c_l^{(m)}(t_1,t_2)} = \\
&= \lambda^{(m)} T^{l+1} \bar F_{on}^{(m)}(T)\, c_l^{(m)}(t_1,t_2),
\end{aligned}$$

где $c_l^{(m)}(t_1,t_2)$ есть некоторая явно вычисляемая функция, зависящая от t_1 и t_2, но независящая от T.

Таким образом, в силу (10) и (11) имеем

$$\begin{aligned}
EA_{22}^{(m)} &\sim \lambda^{(m)} T^2 \bar F_{on}^{(m)}(T)\, c_1^{(m)}(t_1,t_2) = o\big(b^{(r)}(\lambda T)\big), \\
DA_{22}^{(m)} &\sim E\big(A_{22}^{(m)}\big)^2 \sim \lambda^{(m)} T^3 \bar F_{on}^{(m)}(T)\, c_2^{(m)}(t_1,t_2) = o\Big(\big(b^{(r)}(\lambda T)\big)^2\Big).
\end{aligned}$$

Применяя неравенство Чебышева, получаем

$$\frac{A_{22}^{(m)}}{b^{(r)}(\lambda T)} \xrightarrow{P} \frac{EA_{22}^{(m)}}{b^{(r)}(\lambda T)} \to 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\bar A_{22}}{b^{(r)}(\lambda T)} \xrightarrow{P} 0.$$

Опираясь на вышеизложенное, мы видим, что при соответствующей нормировке при $T \to \infty$ для каждого $m = \overline{1,r}$ случайные процессы $A_1^{(m)}(Tt)$ сходятся (в смысле сходимости конечномерных распределений) к устойчивому движению Леви с показателем $\alpha^{(m)}$. Следовательно, предельный процесс для

$$\bar A_1(Tt) = \sum_{m=1}^{r} A_1^{(m)}(Tt)$$

есть устойчивое движение Леви с показателем $\alpha = \alpha^{(1)} + \ldots + \alpha^{(r)}$, как сумма r независимых устойчивых движений Леви с параметрами $\alpha^{(m)}$. $\square$

Замечание 2. В отличие от рассмотренной выше ситуации предположим, что интенсивности $\lambda^{(m)}$ появления источников любого типа удовлетворяют условию

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\lambda^{(m)}(T)}{\lambda(T)} = c^{(m)} \in (0,1), \quad m = \overline{1,r}; \quad \sum_{m=1}^{r} c^{(m)} = 1.$$

Это означает, что источники разных типов в определенном смысле равноправны.

Поскольку

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(m)}}=\frac{c^{(1)}}{c^{(m)}}\quad\Rightarrow\quad \lambda^{(1)}\sim\lambda^{(m)}\frac{c^{(1)}}{c^{(m)}},\quad m=\overline{2,r},$$

мы получаем, что при $T\to\infty$

$$\frac{b^{(m)}\big(\lambda^{(m)}T\big)}{b^{(1)}\big(\lambda^{(1)}T\big)}\sim\frac{\big(\lambda^{(m)}T\big)^{1/\alpha^{(m)}}L^{(m)}\big(\lambda^{(m)}T\big)}{\big(\lambda^{(1)}T\big)^{1/\alpha^{(1)}}L^{(1)}\big(\lambda^{(1)}T\big)}\sim$$

$$\sim\left(\frac{c^{(m)}}{c^{(1)}}\right)^{1/\alpha^{(1)}}\big(\lambda^{(m)}T\big)^{\frac{\alpha^{(1)}-\alpha^{(m)}}{\alpha^{(1)}\alpha^{(m)}}}\tilde{L}\big(\lambda^{(m)}T\big)\to 0,\quad m=\overline{2,r}.$$

В этой ситуации для обеспечения сходимости в качестве нормирующей функции необходимо использовать $b^{(1)}(\lambda^{(1)}T)$. Вследствие этого предельным процессом для $\bar{A}(Tt)$ будет $\alpha^{(1)}$–устойчивое движение Леви. Иными словами, в трафике будут доминировать источники первого типа с самым «долгим» активным периодом.

Заключение

В данной статье исследовалось асимптотическое поведение агрегированной нагрузки в модели трафика, порождаемого бесконечным числом неоднородных Пуассоновких источников, распределения длин активных периодов которых имеют распределения с правильно меняющимися хвостами. Было показано, что при соответствующем выборе частот появления источников различных типов предельный процесс для агрегированной нагрузки на крупных временных шкалах существует и является суммой независимых α–устойчивых движений Леви с показателями $1<\alpha^{(1)}<\ldots<\alpha^{(r)}<2$. Это соответствует ситуации, когда источник любого типа влияет нетривиальным образом на производительность телекоммуникационной системы.

Список литературы

[1] Сидорова О.И. Верхняя и нижняя границы для вероятности потери пакета и вероятности переполнения буфера в модели с неоднородными источниками // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2008. № 11. С. 53–61.

[2] Хохлов Ю.С., Сидорова О.И. Аппроксимация вероятности переполнения буфера для случая различных распределений длины активных периодов // Сложные системы: Обработка информации, моделирование и оптимизация: Сб. науч. тр., вып. 2. Тверь: ТвГУ, 2004. С. 68–77.

[3] D'Apice C., Gargiulo G., Sidorova O., Khokhlov Yu. Convergence of superpositions of scaled renewal processes with finite number of different distributions // Journal of Mathematical Sciences. 2006. Vol. 132, № 5. Pp. 602–609.

[4] Crovella M., Bestavros A. Self–similarity in world wide web traffic: evidence and possible cases // Proceedings of the 1996 ACM SIGMETRICS International Conference on Measurement and Modelling of Computer Systems. 1996. Vol. 4. Pp. 160–169.

[5] Crovella M., Kim G., Park K. On the relationship between file sizes, transport protocols, and self–similar network traffic // Proceedings of the Fourth International Conference on Network Protocols (ICNP'96). 1996. Pp. 171–180.

[6] Feldmann A., Gilbert A.C., Willinger W. Data networks as cascades: Investigating the multifractal nature of Internet WAN traffic // Proceedings of ACM SIGCOMM T98. 1998. Pp. 42–55.

[7] Leland W.E., Taqqu M.S., Willinger W., Willson D.V. On the self–similar nature of Ethernet traffic (Extended version) // IEEE/ACM Transactions on Networking. 1994. Vol. 2. Pp. 1–15.

[8] Mikosch Th., Resnick S., Rootzen H., Stegeman A. Is network traffic approximated by stable Levy motion or fractional Brownian motion? // Annals of Applied Probability. 2002. Vol. 12, № 1. Pp. 23–68.

[9] Resnick S.I. Point processes, regular variation and weak convergence // Advances in Applied Probability. 1986. Vol. 18. Pp. 66–138.

[10] Taqqu M.S., Willinger W., Sherman R. Proof of a fundamental result in self–similar traffic modeling // ACM SIGCOMM Computer Communication Review. 1997. Vol. 27, № 2. Pp. 5–23.

[11] Taqqu M.S., Teverovsky V., Willinger W. Is network traffic self–similar or multifractal? // Fractals. 1997. Vol. 5, № 1. Pp. 63–73.

Библиографическая ссылка

Сидорова О.И. Пуассоновская модель трафика с бесконечным числом неоднородных источников // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 1. С. 47–66.

Сведения об авторах

1. **Сидорова Оксана Игоревна**
доцент кафедры математической статистики и системного анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

ON INFINITE SOURCE POISSON MODEL WITH HETEROGENEOUS SOURCES

Sidorova Oksana Igorevna
Associate professor of Mathematical Statistics and System Analysis department,
Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU.

Received 05.02.2015, revised 15.02.2015.

Numerous traffic measurements in modern telecommunication systems highlighted two fundamentally new properties inherent in such systems: long–term dependence and self–similarity, which cannot be captured in a parsimonious way by traditional Markovian models. Strong irregularity and variability of packet traffic coupled with the presence of long–term dependence have a deep impact on the network performance. Markovian theory in this case lead to a substantial underestimation of the network load and highly non–accurate estimation of different performance measures. Hence, the development of an adequate traffic models and investigation their properties, is an important task of network engineering. Of particular interest is to study non homogenous traffic and its influence on system performance. In this paper we consider the Poisson model with infinite number of heterogenous sources and specify conditions under which the source of any type can affect the performance of telecommunication system.

Keywords: long and short–range dependency, heavy–tailed distributions, infinite source Poisson model, α–stable Levy motion.

Bibliographic citation

Sidorova O.I. On infinite source Poisson model with heterogeneous sources. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2015, no. 1, pp. 47–66. (in Russian)