СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 91(075.8)

МОДЕЛИ АНАЛИЗА И ПРОГНОЗА ЭВОЛЮЦИИ АТМОСФЕРНЫХ ФРОНТОВ

Кузнецов А.Д., Сероухова О.С., Симакина Т.Е.
Российский государственный гидрометеорологический университет,
г. Санкт-Петербург

Поступила в редакцию 17.03.2015, после переработки 27.03.2015.

В настоящей статье рассматриваются математические модели анализа и текущего прогноза эволюции атмосферных фронтов. Математические модели используют временную экстраполяцию равноотстоящих вдоль линии фронта «общих» точек, задающих положение фронта в различные моменты времени.

Ключевые слова: атмосферные фронты, текущий прогноз, метод наименьших квадратов, адаптивная калмановская фильтрация, неопределенные множители Лагранжа.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 1. С. 67–81.

Введение

Сверхкраткосрочный прогноз (СКП) погоды с заблаговременностью до 12 часов и, особенно, текущее прогнозирование на ближайшие 2 часа являются важным элементом представления данных при оперативном обеспечении потребителя метеорологической информацией о состоянии атмосферы во многих отраслях хозяйственной деятельности – воздушном и наземном транспорте, сельскохозяйственном производстве, строительстве, гидроэнергетике, связи и др. Эффективность предупреждения о наступлении опасных явлений погоды во многом зависит от точности и оперативности определения положения фронтальных разделов, а также анализа и прогноза скорости и направления их перемещения. Эти задачи требуют для своего решения разработки специализированных алгоритмов и программ, которые призваны максимально облегчить анализ синоптической ситуации непосредственно на рабочем месте синоптика и обеспечить расчет объективных количественных оценок параметров, характеризующих пространственно-временную эволюцию атмосферных фронтов на различных стадиях их развития.

В работе рассматриваются математические модели анализа и текущего прогноза эволюции атмосферных фронтов по спутниковым или радиолокационным данным, основанные на временной экстраполяции равноотстоящих вдоль линии фронта «общих» точек, задающих положение фронта в различные моменты времени t. Используется параметрического задания зависимости координат «общих» точек от времени t: $x_i(t)$ и $y_i(t)$, где i – порядковый номер ($i = 1, 2, \ldots, N$) [4, с. 221-123].

Рассматриваемые математические модели базируются на использовании следующих методов:

- метода адаптивной фильтрации временных рядов на основе фильтров Калмана-Бьюси;
- «классического» метода наименьших квадратов;
- «классического» метода наименьших квадратов с заданием дополнительных условий на основе неопределенных множителей Лагранжа (в качестве дополнительных условий задавалось время «останова» движения фронта, а также использовалось уравнение неразрывности);
- метода наименьших квадратов с совместной минимизацией суммы квадратов отклонений координат «общих» точек от их аппроксимационных значений и суммы квадратов скоростей движения «общих» точек фронта;
- метода наименьших квадратов с совместной минимизацией суммы квадратов отклонений координат «общих» точек от их аппроксимационных значений и суммы квадратов значений кривизны траекторий «общих» точек фронта.

1. Адаптивные фильтры Калмана

Адаптивные фильтры Калмана сформированы в процессе синтеза идей Калмана и Бьюси с методами адаптивной фильтрации. В основе фильтров Калмана-Бьюси лежат оптимальные алгоритмы фильтрации случайных процессов при полностью известных параметрах динамической системы и ковариационной матрицы случайного воздействия на ее входе. Алгоритмы имеют форму итерационных вычислительных процедур и учитывают только последнее значение измеренной величины на каждом шаге работы. Адаптивные или самонастраивающиеся алгоритмы оценивают параметры физической системы с использованием результатов адаптации (подстройки) к параметрам физического процесса, формирующего физическую величину.

Рассмотрим работу адаптивного фильтра Калмана для случая эквидистантных (равноотстоящих) случайных величин [1, с. 249-251].

Пусть случайный метеорологический параметр представляет собой авторегрессионный процесс, описываемый уравнением:

$$y_t = Y_{t-1}^T \Theta_t + \varepsilon_t,$$

где

$$\Theta_{\mathrm{t}}^{\mathrm{T}} = (a_{1}^{\mathrm{t}},\ldots,a_{\mathrm{p}}^{\mathrm{t}},b_{1}^{\mathrm{t}},\ldots,b_{\mathrm{q}}^{\mathrm{t}}) -$$

вектор параметров модели,

$$Y_{\mathrm{t\text{-}1}}^{\mathrm{T}} = (-y_{\mathrm{t\text{-}1}},\ldots,-y_{\mathrm{t\text{-}p}},\varepsilon_{\mathrm{t\text{-}1}},\ldots,\varepsilon_{\mathrm{t\text{-}q}}) -$$

вектор данных наблюдений (y_i, $i = t-1$, ..., $t-p$) и ошибок модели (ε_i, $i = t-1$, ..., $t-q$). p и q – являются порядками авторегрессионного оператора и оператора скользящего среднего.

Отметим, что порядок авторегрессионного оператора p является, по существу, порядком линейного дифференциального уравнения, описывающего динамическую систему, формирующую наблюдаемый случайный процесс из белого шума. Например, для простейшей интегрирующей системы, переходные процессы в которой имеют вид экспоненты, $p = 1$. Порядок оператора скользящего среднего q определяет производные от наблюдаемого процесса, на которые осуществляется возмущающее воздействие белым шумом. В механических системах, где воздействующая сила определяет только ускорение, $q = 1$.

Чтобы обеспечить возможность обработки нестационарных процессов, параметры модели предполагают изменяющимися во времени случайным образом.

$$\Theta_{\mathrm{t}} = \Theta_{\mathrm{t\text{-}1}} + \Omega_{\mathrm{t}},$$

где Ω_t – многомерный белый шум с неизвестной ковариационной матрицей Σ_t.

Вектор параметров модели оценивается в реальном времени по мере поступления текущих измерений в соответствии со следующим алгоритмом:

$$\widehat{\Theta}_{\mathrm{t}} = \widehat{\Theta}_{\mathrm{t\text{-}1}} + K_{\mathrm{t}}(\mathrm{y}_{\mathrm{t}} - Y_{\mathrm{t\text{-}1}}^{\mathrm{T}}\widehat{\Theta}_{\mathrm{t\text{-}1}}).$$

Этот алгоритм использует значение вектора Калмановского фильтра [1. с. 251-252]

$$K_{\mathrm{t}} = \Delta_{\mathrm{t\text{-}1}} Y_{\mathrm{t\text{-}1}} \left[Y_{\mathrm{t\text{-}1}}^{\mathrm{T}} \Delta_{\mathrm{t\text{-}1}} Y_{\mathrm{t\text{-}1}} + \widehat{\sigma}_{\mathrm{t\text{-}1}}^{2} \right]$$

и обратной ковариационной матрицы

$$\Delta_{\mathrm{t}} = \left[I\text{-}K_{\mathrm{t}} Y_{\mathrm{t\text{-}1}}^{\mathrm{T}} \right] \Delta_{t-1} + \Sigma_{\mathrm{t}}. \tag{1}$$

Здесь I – единичная матрица размерности $(p+q)$ $(p+q)$.

Дисперсия белого шума в модели оценивается с помощью рекурсивного алгоритма

$$\widehat{\sigma}_t^2 = \widehat{\sigma}_{t-1}^2 + \frac{1}{(t+1)} \left[\left(y_t - \widehat{\Theta}_{t-1}^{T} \mathrm{Y}_{t-1} \right)^2 - \widehat{\sigma}_{t-1}^2 \right].$$

Данный алгоритм требует знания ковариационной матрицы Σ_t в (1). Однако, на практике эта матрица чаще всего бывает неизвестна. Для того чтобы алгоритм мог корректно работать и в этих условиях можно либо заранее оценить эту матрицу в предыдущих опытах, либо оценивать ее в процессе работы алгоритма. Именно последний подход и был предложен в работе [1, с. 254-256]. Суть его состоит в сравнении выборочного значения дисперсии ошибки оценки с допустимым по критерию χ^2. Как только выборочное значение дисперсии ошибки оценки превысит допустимый уровень, так автоматически начинается увеличение дисперсии в матрице Σ_t. Для исключения слишком быстрых реакций на изменение параметров системы увеличение диагональных элементов матрицы Σ_t производилось достаточно медленно, не более 1-2% от текущего значения диагонального элемента на каждом шаге. Процесс увеличения дисперсии заканчивается при соблюдении критерия χ^2.

Размерность модели (p и q) в адаптивном фильтре является единственным параметром, который необходимо задать. На практике величина p не превосходит 2-3, а q – 0,1. Хотя реальные системы могут описываться уравнениями более высокой степени, ошибки, возникающие вследствие неточности знания параметров модели, при больших размерностях p могут превзойти тот выигрыш, который мы попытаемся получить за счет увеличения размерности модели.

2. «Классический» МНК

Для всех фронтов серии формируются две матрицы координат «общих» точек фронта $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ для моментов времени $t(j)$ $(j = 1, 2, \ldots, nf)$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{X} : \{x(i, j)\},\ i = 1, 2, \ldots, nn;\ j = 1, 2, \ldots, nf, \\ &\mathbf{Y} : \{y(i, j)\},\ i = 1, 2, \ldots, nn;\ j = 1, 2, \ldots, nf, \end{aligned} \tag{2}$$

где nf – число фронтов в данной серии, nn – число «общих» (равноотстоящих друг от друга) точек, а также вектор $\boldsymbol{L}$, элементами которого является длина фронта в те же моменты времени: $\{L(j)\}$ $(j = 1,\ 2,\ .\ .\ .\ ,\ nf)$.

Траектории перемещения каждой «общей» точки фронта рассматриваются независимо, то есть предполагается, что движение фронта описывается nn траекториями «общих» точек.

Для каждой из функций $x(t)$ и $y(t)$, заданных в параметрическом виде, где параметром является время t, строится свой полином степени np:

$$\begin{aligned} x\,(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 +\ \ldots\ + a_{np} t^{np}, \\ y\,(t) &= b_0 + b_1 t + b_2 t^2 +\ \ldots\ + b_{np} t^{np}, \end{aligned} \tag{3}$$

коэффициенты в котором определяются по данным наблюдений.

При использовании метода наименьших квадратов для определения коэффициентов система линейных уравнений определяется из условия

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{nf} \left[x\,(t_j) - x_j\right]^2 = \min \ \text{для функции } x(t), \\ &\sum_{j=1}^{nf} \left[y\,(t_j) - y_j\right]^2 = \min \ \text{для функции } y(t), \end{aligned} \tag{4}$$

где (t_j) и $y(t_j)$ – значения функций $x(t)$ и $y(t)$ в моменты времени $t(j)$; x_j и y_j – координаты «общей» точки в момент времени t_j. Здесь и в дальнейшем x_j и y_j – координаты векторов $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ в формуле (2) при фиксированном значении i для момента времени t_j.

Поскольку алгоритмы определения коэффициентов аппроксимирующих функций $x(t)$ и $y(t)$ не отличаются друг от друга, в дальнейшем будем рассматривать лишь функцию $x(t)$. По тем же причинам ограничимся рассмотрением лишь одной «общей» точки. Условие минимума выражения (4) определяется уравнениями:

$$\frac{\partial}{\partial\,\mathrm{a_k}} \sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{nf}} \left[\mathrm{x}\left(\mathrm{t_j}\right) - \mathrm{x_j}\right]^2 = 0,\ k = 0, 1, 2, ..., np. \tag{5}$$

Так, например, при np=2 для определения коэффициентов a_0, a_1 и a_2 получаем

$$\begin{cases} nf \cdot a_0 + a_1 \sum t_j + a_2 \sum t_j^2 = \sum x_j, \\ a_0 \sum t_j + a_1 \sum t_j^2 + a_2 \sum t_j^3 = \sum x_j\, t_j, \\ a_0 \sum t_j^2 + a_1 \sum t_j^3 + a_2 \sum t_j^4 = \sum x_j\, t_j^2. \end{cases} \tag{6}$$

Или в матричной форме

$$\mathbf{C}\ \vec{a} = \vec{b},$$

где $\vec{a} = \begin{vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{vmatrix}$, $\vec{b} = \begin{vmatrix} \sum x_j \\ \sum x_j\, t_j \\ \sum x_j\, t_j^2 \end{vmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{vmatrix} nf & \sum t_j & \sum t_j^2 \\ \sum t_j & \sum t_j^2 & \sum t_j^3 \\ \sum t_j^2 & \sum t_j^3 & \sum t_j^4 \end{vmatrix}$.

Решение системы (6) определяет коэффициенты функции $x(t)$: a_0, a_1 и a_2.

Однако, более удобно записать систему линейных уравнений в матричной форме. Введем матрицу размерности $[nf*(np+1)]$ для полинома степени *np*

$$\mathrm{D}_t = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \ldots & t_1^{np} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \ldots & t_2^{np} \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ 1 & t_{nf} & t_{nf}^2 & \ldots & t_{nf}^{np} \end{vmatrix}$$

с известными из данных наблюдений значениями $t_1, t_2, \ \ldots\ , t_{nf}$ и вектора размерности [nf*1] и [(np+1)*1] соответственно:

$$\vec{V}_x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_{nf} \end{vmatrix} \text{ и } \vec{B}_x = \begin{vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \ldots \\ a_{np} \end{vmatrix}.$$

Здесь x_1, x_2, ..., x_{nf} – известные координаты одной из «общих» точек фронта, а a_0, a_1, ..., a_{np} – искомые коэффициенты. Тогда из условия минимума выражения (4) получаем следующее матричное уравнение для определения вектора $\vec{B}_x$, содержащего коэффициенты аппроксимирующего полинома:

$$\vec{B}_x = \left[\mathrm{D}_t^T \cdot \mathrm{D}_t\right]^{-1} \mathrm{D}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{T}}\, \vec{V}_x, \tag{7}$$

где значок (T) означает транспонирование, а (-1) – обратную матрицу.

В данной работе для расчета обратной матрицы использовался модифицированный метод Гаусса-Жордано [2, с. 68-69].

Теперь для любого момента времени t значение функции $x(t)$ может быть вычислено по формуле

$$x(t) = \vec{B}_x \cdot \vec{V}_t,$$

где вектор $\vec{V}_t$ размерности [1*(np+1)] имеет следующий вид

$$\vec{V}_t = \left|\, 1,\ t,\ t^2,\ \ldots, t^{np} \right|.$$

Полученные выше соотношения соответствуют случаю независимых и равноточных измерений.

Для случая неравноточных измерений вектор $\vec{B}_x$ определяется следующим выражением:

$$\vec{B}_x = \left[\mathrm{D}_t^T \cdot \Sigma_x^{-1} \cdot \mathrm{D}_t\right]^{-1} \mathrm{D}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{T}} \cdot \Sigma_x^{-1} \cdot \vec{V}_x,$$

где Σ_x – корреляционная матрица ошибок измерения вектора$\vec{V}_x$. Последнее уравнение переходит в уравнение (4), если $\Sigma_x = \mathrm{I}$, где I – единичная матрица.

Построение аппроксимационного полинома в форме (2) может быть расширено введением дополнительных критериев при поиске оптимальной аппроксимационной функции.

3. МНК с дополнительными условиями минимизации значений кривизны траекторий и скоростей движения «общих» точек фронта

В качестве дополнительных условий в данной работе были рассмотрены минимизация суммы квадратов скоростей перемещения «общих» точек и минимизация суммы квадратов кривизны аппроксимационной функции.

В первом случае вместо минимизации функционала вида (4) минимизируются следующие функционалы от функций $x(t)$ и $y(t)$:

$$\sum_{j=1}^{nf}\left[x\left(t_j\right)-x_j\right]^2 + \ p\sum_{j=1}^{nf}\left[\frac{dx\ (t)}{dt}\bigg|_{t=t_j}\right]^2 \ = \ \min,$$

$$\sum_{j=1}^{nf}\left[y\ \left(t_j\right)-y_j\right]^2 + \ p\sum_{j=1}^{nf}\left[\frac{dy\ (t)}{dt}\bigg|_{t=t_j}\right]^2 \ = \ \min, \qquad (8)$$

где p – нормировочный коэффициент.

Или, подставляя в явном виде аппроксимационный полином для случая $np = 2$, получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений из условия аналогичного (5)

$$\begin{cases} nf \cdot a_0 + a_1 \sum\limits_{j=1}^{nf} t_j + a_2 \sum\limits_{j=1}^{nf} t_j^2 = \sum\limits_{j=1}^{nf} x_j, \\ a_0 \sum\limits_{j=1}^{nf} t_j + a_1\,(p \cdot\ nf\ + \sum\limits_{j=1}^{nf} t_j^2) + a_2\,(2p \sum\limits_{j=1}^{nf} t_j\ + \sum\limits_{j=1}^{nf} t_j^3)\ =\ \sum\limits_{j=1}^{nf} x_j t_j, \\ a_0 \sum\limits_{j=1}^{nf} t_j^2 + a_1\,(2p \sum\limits_{j=1}^{nf} t_j + \sum\limits_{j=1}^{nf} t_j^3) + a_2\,(4p \sum\limits_{j=1}^{nf} t_j^2 + \sum\limits_{j=1}^{nf} t_j^4) = \sum\limits_{j=1}^{nf} x_j t_j^2. \end{cases}$$

Во втором случае совместно минимизируются сумма квадратов отклонений аппроксимационной функции от табличных данных и сумма квадратов кривизны траектории движения «общих» точек с учетом ее параметрического задания:

$$\sum_{j=1}^{nf}\left[x\left(t_j\right)-x_j\right]^2+\ \sum_{j=1}^{nf}\left[y\ \left(t_j\right)-y_j\right]^2+\ q\ \sum_{j=1}^{nf}\left[K\left(t_j\right)\right]^2=\ \min,$$

где q – нормировочный коэффициент; $K(t_j)$ – кривизна траектории в момент времени t_j [4]:

$$K\left(t_j\right)\ =\frac{\left[\left.\frac{dx\ (t)}{dt}\right|_{t=t_j}\cdot\left.\frac{d^2y\ (t)}{dt^2}\right|_{t=t_j}-\left.\frac{dy\ (t)}{dt}\right|_{t=t_j}\cdot\left.\frac{d^2x\ (t)}{dt^2}\right|_{t=t_j}\right]}{\left[\left(\left.\frac{dx\ (t)}{dt}\right|_{t=t_j}\right)^2+\left(\left.\frac{dy\ (t)}{dt}\right|_{t=t_j}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

В этом случае нахождение коэффициентов аппроксимационных полиномов сводится к решению системы нелинейных уравнений, которое можно получить одним из известных численных методов [2, с. 91-93].

4. МНК с дополнительным условием (время «останова» фронта), задаваемого с помощью неопределенных множителей Лагранжа

Полиномиальная аппроксимация табличных данных в классической постановке не всегда обеспечивает возможность ее применения для экстраполяции результатов наблюдений, особенно при использовании полиномов высоких порядков. Ситуация может быть улучшена заданием дополнительных условий, определяющих значения данных для моментов времени $t > t_{nf}$.

Одним из возможных математических подходов к заданию таких условий является метод неопределенных множителей Лагранжа [3, с. 377-379]. В этом случае для определения коэффициентов аппроксимирующей функции решается задача не на безусловный, а условный экстремум. Тогда задача нахождения коэффициентов аппроксимационного полинома формулируется следующим образом: найти минимум основной функции:

$$\sum_{j=1}^{nf}\left[x\left(t_j\right)-x_j\right]^2=\min,$$

при наличии дополнительного условия $g(t) = 0$, где $g(t)$ – известная функция, а для функции $x(t)$ по-прежнему используется соотношение (3).

Задача определения коэффициентов функции $x(t)$ сводится к нахождению минимума функции

$$E=\sum_{j=1}^{nf}\left[x\left(t_j\right)-x_j\right]^2+\lambda\cdot g(t)=\min, \tag{9}$$

где параметр λ – неопределенный множитель Лагранжа. Коэффициенты функции $x(t)$ и значение λ находятся из решения следующей системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial a_i}=0, \quad i=0,1,\ldots,np, \\ g(t)=0. \end{cases} \tag{10}$$

Рассмотрим использование этого подхода для случая, когда в качестве дополнительного условия используется предположение о равенстве нулю скорости перемещения «общей» точки в момент времени $t_0 > t_{nf}$. Физический смысл такого дополнительного условия заключается в том, что скорость движения «общей» точки уменьшается с ростом t до нулевого значения при $t = t_0$.

Математически это условие можно записать в следующем виде:

$$\left.\frac{\partial\, x(t)}{\partial\, t}\right|_{t=t_0} = 0.$$

Или, подставляя в явном виде функцию $x(t)$ из (3), как

$$a_1 + 2\, a_2 t_0 + 3a_3 t_0^3 + \ \ldots + \ np \cdot a_{np} t_0^{np-1} = 0.$$

Тогда систему (10) можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\, a} \sum\limits_{j=1}^{nf} \left[x\left(t_j\right) - x_j\right]^2 + \lambda \left[a_1 + 2\, a_2 t_0 + \ldots + \ np \cdot a_{np} t_0^{np-1}\right] = 0, \ i = 0,\, 1,\ \ldots, np, \\ a_1 + 2\, a_2 t_0 + \ldots + np \cdot a_{np} t_0^{np-1} = 0. \end{cases}$$

Запишем в явном виде полученную систему для случая $np = 2$. После взятия соответствующих производных получаем:

$$\begin{cases} 2 \sum\limits_{j=1}^{nf} \left[a_0 + \ a_1 t_j + a_2 t_j^2 - x_j\right] = 0, \\ 2 \sum\limits_{j=1}^{nf} \left[a_0 + \ a_1 t_j + a_2 t_j^2 - x_j\right] \cdot t_j + \lambda = 0, \\ 2 \sum\limits_{j=1}^{nf} \left[a_0 + \ a_1 t_j + a_2 t_j^2 - x_j\right] \cdot t_j^2 + 2\, \lambda\, t_0 = 0, \\ a_1 + \ 2\, a_2 t_0 = 0. \end{cases}$$

Данную систему четырех линейных уравнений для четырех неизвестных $a_0, a_1, a_2\,, \lambda$ после элементарных преобразований можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} a_0 \cdot nf + a_1 \sum t_j + a_2 \sum t_j^2 = \sum x_j, \\ a_0 \sum t_j + a_1 \sum t_j^2 + a_2 \sum t_j^3 + {}^{\lambda}\!/_2 = \sum x_j t_j, \\ a_0 \sum t_j^2 + a_1 \sum t_j^3 + a_2 \sum t_j^4 + \lambda t_0 = \sum x_j t_j^2, \\ a_0 \cdot 0 + a_1 + \ 2\, a_2 t_0 = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Или, в матричной форме:

$$\mathbf{C}\ \vec{a} = \vec{b}\ ,$$

где

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \lambda \end{vmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{vmatrix} \sum x_j \\ \\ \sum x_j\, t_j \\ \\ \sum x_j\, t_j^2 \\ 0 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} nf & \sum t_j & \sum t_j^2 & 0 \\ \sum t_j & \sum t_j^2 & \sum t_j^3 & {}^1\!/_2 \\ \sum t_j^2 & \sum t_j^3 & \sum t_j^4 & t_0 \\ 0 & 1 & 2t_0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение системы (11) так же, как и (6) запишется в следующем виде:

$$\vec{a} = \mathrm{C}^{-1}\,\vec{b}.$$

В общем случае, то есть для полинома степени np, матрицу $\boldsymbol{C}$ можно записать в следующем виде, обозначив элементы матрицы $\mathrm{D}_t^T\,\mathrm{D}_\mathrm{t}$ как d_{ij}:

$$\begin{gathered} C_{ij} = d_{ij}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots, np+1,\ \ j = 1,\ 2,\ \ldots, np+1, \\ C_{i,\ np+1} = {}^1\!/\!_2\,(i-1)\cdot t_0^{i-2},\ i = 1,\ 2,\ \ldots, np, \\ C_{np+1,j} = (j-1)\cdot t_0^{j-2},\ j = 1,\ 2,\ \ldots, np+1, \\ C_{np+1,np+1} = 0. \end{gathered}$$

Для векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, соответственно, имеем

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \ldots \\ a_{np} \\ \lambda \end{vmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{vmatrix} \sum x_j \\ \sum x_j\, t_j \\ \ldots \\ \sum x_j\, t_j^{np} \\ 0 \end{vmatrix}.$$

В качестве другого дополнительного условия рассмотрим уравнение неразрывности [5, с. 556] :

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

где ρ – плотность воздуха, p – давление; u,v и w – компоненты скорости ветра вдоль осей x, y и z.

Перепишем это уравнение в форме

$$\frac{\partial u\,(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial v\,(x,y,z)}{\partial y} = f\,(t,x,y,z)\,,$$

где

$$f\,(t,x,y,z) = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt} - \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Полагая в первом приближении, что уровень z соответствует высоте верхней границы облачности и что скорость перемещения «общих» точек фронта равна скорости ветра на этом уровне, а также предполагая, что за рассматриваемый промежуток времени

$$f\,(t,x,y,z) \approx f_0 = const,$$

получим для каждой «общей» точки дополнительное условие

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = f_0. \tag{12}$$

Учтем, что из (3) следует

$$u = \frac{\partial x(t)}{\partial t} \text{ и } v = \frac{\partial y(t)}{\partial t}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^{-1} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^{-1},\\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^{-1} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^{-1}.\end{aligned} \tag{13}$$

При использовании полиномиальной аппроксимации для функций $x(t)$ и $y(t)$ соотношения (9) примут вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^{-1} &= \left[2\,a_2 + 6\,a_3 t + \ldots + (np-1)\cdot np\cdot a_{np}t^{np-2}\right] *\\ &* \left[a_1 + 2\,a_2 t + \ldots + np\cdot a_{np}t^{np-1}\right]^{-1},\\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^{-1} &= \left[2\,b_2 + 6\,b_3 t + \ldots + (np-1)\cdot np\cdot b_{np}t^{np-2}\right] *\\ &* \left[b_1 + 2\,b_2 t + \ldots + np\cdot b_{np}t^{np-1}\right]^{-1}.\end{aligned}$$

Тогда уравнение (8) может быть записано в следующем виде:

$$\frac{2\,a_2 + 6\,a_3 t + \ldots + (np-1)\cdot np\cdot a_{np}t^{np-2}}{a_1 + 2\,a_2 t + \ldots + np\cdot a_{np}t^{np-1}} + $$

$$+\frac{2\,b_2 + 6\,b_3 t + \ldots + (np-1)\cdot np\cdot b_{np}t^{np-2}}{b_1 + 2\,b_2 t + \ldots + np\cdot b_{np}t^{np-1}} = f_0.$$

Запишем, как мы делали это раньше, рассматриваемое дополнительное условие для случая $np = 2$:

$$\frac{2\,a_2}{a_1 + 2\,a_2 t_n} + \frac{2\,b_2}{b_1 + 2\,b_2 t_n} = f_0, \tag{14}$$

где t_n – время, на которое в дальнейшем будет производиться СКП (оно отличается от t_0). В дополнительное условие наряду с подлежащими определению коэффициентами a_1, a_2, b_1 и b_2 входит параметр f_0, для вычисления которого (для каждой «общей» точки) можно воспользоваться расчетом его среднего значения по имеющимся nf табличным данным

$$f_0 = \frac{1}{nf}\sum_{j=1}^{nf}\left[\frac{2\,a_2}{a_1 + 2\,a_2 t_j} + \frac{2\,b_2}{b_1 + 2\,b_2 t_j}\right].$$

Для задания f_0 можно также воспользоваться последним значением ($t = t(nf)$), то есть

$$f_0 = \frac{2\,a_2}{a_1 + 2\,a_2 t_{nf}} + \frac{2\,b_2}{b_1 + 2\,b_2 t_{nf}}.$$

Учитывая тот факт, что в дополнительное условие теперь входят одновременно коэффициенты для функций $x(t)$ и $y(t)$, уравнение (5) теперь должно быть записано в следующем виде:

$$E = \sum_{j=1}^{nf}\left[x\left(t_j\right) - x_j\right]^2 + \sum_{j=1}^{nf}\left[y\left(t_j\right) - y_j\right]^2 + \lambda\cdot g\left(a_1, a_2, b_1, b_2\right) = 0,$$

где

$$g\left(a_1, a_2, b_1, b_2\right) = \frac{2\,a_2}{a_1 + 2\,a_2 t_n} + \frac{2\,b_2}{b_1 + 2\,b_2 t_n} - \frac{1}{nf}\sum_{j=1}^{nf}\left[\frac{2\,a_2}{a_1 + 2\,a_2 t_j} + \frac{2\,b_2}{b_1 + 2\,b_2 t_j}\right].$$

По аналогии с системой (10) для определения коэффициентов аппроксимационного полинома получаем:

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial a_i} = 0, \quad i = 0, 1, \ \ldots, np, \\ \frac{\partial E}{\partial b_i} = 0, \quad i = 0, 1, \ \ldots, np, \\ g_\lambda (a_1, a_2, b_1, b_2) = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Полученная система содержит $2(np+1)+1$ уравнение с $2(np+1)+1$ неизвестными $a(i)$, $b(i)$, $(i = 0, 1, \ldots, np)$ и λ, однако уже не является линейной относительно неизвестных (из-за наличия нелинейной функции g).

Рассмотрим возможности решения полученной системы для случая $np = 2$ более подробно. Для этого перепишем систему (15) при задании f_0 в форме (14) при $np = 2$:

$$\begin{cases} 2\sum\limits_{j=1}^{nf} \left[a_0 + a_1 t_j + a_2 t_j^2 - x_j\right] = 0, \\ 2\sum\limits_{j=1}^{nf} \left[a_0 + a_1 t_j + a_2 t_j^2 - x_j\right] \cdot t_j + \lambda \cdot a_2 \left[\frac{1}{(a_1+2a_2 t_{nf})^2} - \frac{1}{(a_1+2a_2 t_n)^2}\right] = 0, \\ \quad 2\sum\limits_{j=1}^{nf} \left[a_0 + a_1 t_j + a_2 t_j^2 - x_j\right] \cdot t_j^2 + \lambda \left[\frac{1}{a_1+2a_2 t_n} - \frac{1}{a_1+2a_2 t_{nf}}\right] + \\ \qquad +2\,\lambda \cdot a_2 \left[\frac{t_{nf}}{(a_1+2a_2 t_{nf})^2} - \frac{t_n}{(a_1+2a_2 t_n)^2}\right] = 0, \\ 2\sum\limits_{j=1}^{nf} \left[b_0 + b_1 t_j + b_2 t_j^2 - y_j\right] = 0, \\ 2\sum\limits_{j=1}^{nf} \left[b_0 + b_1 t_j + b_2 t_j^2 - y_j\right] \cdot t_j + \lambda \cdot b_2 \left[\frac{1}{(b_1+2b_2 t_{nf})^2} - \frac{1}{(b_1+2b_2 t_n)^2}\right] = 0, \\ \quad 2\sum\limits_{j=1}^{nf} \left[b_0 + b_1 t_j + b_2 t_j^2 - y_j\right] \cdot t_j^2 + \lambda \left[\frac{1}{b_1+2b_2 t_n} - \frac{1}{b_1+2b_2 t_{nf}}\right] + \\ \qquad +2\,\lambda \cdot b_2 \left[\frac{t_{nf}}{(b_1+2b_2 t_{nf})^2} - \frac{t_n}{(b_1+2b_2 t_n)^2}\right] = 0, \\ a_2 \left[\frac{1}{a_1+2a_2 t_n} - \frac{1}{a_1+2a_2 t_{nf}}\right] + b_2 \left[\frac{1}{b_1+2b_2 t_n} - \frac{1}{b_1+2b_2 t_{nf}}\right] = 0. \end{cases}$$

Или, раскрывая суммы, получаем

$$\begin{cases} a_0 \cdot nf + a_1 \sum\limits_{j=1}^{nf} t_j + a_2 \sum\limits_{j=1}^{nf} t_j^2 = \sum\limits_{j=1}^{nf} x_j, \\ 2\,a_0 \sum\limits_{j=1}^{nf} t_j + 2\,a_1 \sum\limits_{j=1}^{nf} t_j^2 + 2a_2 \sum\limits_{j=1}^{nf} t_j^3 + \lambda \left[\frac{a_2}{(a_1+2a_2 t_{nf})^2} - \frac{a_2}{(a_1+2a_2 t_n)^2}\right] = 2\sum\limits_{j=1}^{nf} x_j t_j, \\ \quad 2a_0 \sum\limits_{j=1}^{nf} t_j^2 + 2\,a_1 \sum\limits_{j=1}^{nf} t_j^3 + 2a_2 \sum\limits_{j=1}^{nf} t_j^4 + \\ \qquad +\lambda \left[\frac{1}{a_1+2a_2 t_n} - \frac{1}{a_1+2a_2 t_{nf}} + \frac{2a_2 t_{nf}}{(a_1+2a_2 t_{nf})^2} - \frac{2a_2 t_n}{(a_1+2a_2 t_n)^2}\right] = 2\sum\limits_{j=1}^{nf} x_j t_j^2, \\ b_0 \cdot nf + b_1 \sum\limits_{j=1}^{nf} t_j + b_2 \sum\limits_{j=1}^{nf} t_j^2 = \sum\limits_{j=1}^{nf} y_j, \\ 2\,b_0 \sum\limits_{j=1}^{nf} t_j + 2\,b_1 \sum\limits_{j=1}^{nf} t_j^2 + 2b_2 \sum\limits_{j=1}^{nf} t_j^3 + \lambda \left[\frac{b_2}{(b_1+2b_2 t_{nf})^2} - \frac{b_2}{(b_1+2b_2 t_n)^2}\right] = 2\sum\limits_{j=1}^{nf} y_j t_j, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b_0\sum\limits_{j=1}^{nf} t_j^2 + 2\,b_1\sum\limits_{j=1}^{nf} t_j^3 + 2b_2\sum\limits_{j=1}^{nf} t_j^4 + \\ \quad +\lambda\left[\frac{1}{b_1+2b_2t_n} - \frac{1}{b_1+2b_2t_{nf}} + \frac{2b_2t_{nf}}{(b_1+2b_2t_{nf})^2} - \frac{2b_2t_n}{(b_1+2b_2t_n)^2}\right] = 2\sum\limits_{j=1}^{nf} y_j t_j^2, \\ \frac{a_2}{a_1+2a_2t_n} - \frac{a_2}{a_1+2a_2t_{nf}} + \frac{b_2}{b_1+2b_2t_n} - \frac{b_2}{b_1+2b_2t_{nf}} = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Решение полученной системы нелинейных уравнений можно найти с помощью одного из стандартных численных методов, например методом Ньютона-Рафсона [2, с. 92].

Для его рассмотрения запишем систему (16) в общем виде

$$F_j\left(x_i\right) = 0,\ i, j = 1,\ 2, \ldots, 7, \quad (17)$$

где под x_i подразумеваются неизвестные коэффициенты аппроксимационных полиномов и λ.

Метод Ньютона-Рафсона реализуется следующим алгоритмом:

1) Задаем абсолютную или относительную погрешность ε, число уравнений N, максимальное число итераций M и вектор начальных приближений x_i^0 (с компонентами $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_N^0$).

2) Используя разложение $F_j\left(x_i\right)$ в ряд Тейлора, формируем матрицу Якоби $\left[dF_j/dx_i\right]$, необходимую для расчета приращений $F_i\left(x_i\right)$ при малом изменении переменных. Матрица Якоби в развернутом виде записывается следующим образом:

$$\begin{vmatrix} \partial F_1/\partial x_1 & \partial F_1/\partial x_2 & ... & \partial F_1/\partial x_N \\ \partial F_2/\partial x_1 & \partial F_2/\partial x_2 & ... & \partial F_2/\partial x_N \\ ... & ... & ... & ... \\ \partial F_N/\partial x_1 & \partial F_N/\partial x_2 & ... & \partial F_N/\partial x_N \end{vmatrix}.$$

Поскольку аналитическое дифференцирование $F_j\left(x_i\right)$ в общем случае может быть затруднено, то заменяем частные производные в матрице Якоби их приближенными конечно-разностными значениями

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{F_i\left(x_i + H_i\right) - F_i\left(x_i\right)}{H_i},$$

где H_i – малое приращение x_i, например $H_i = \varepsilon \cdot x_i$.

3) Составляем и решаем систему линейных уравнений для малых приращений x_i:

$$\begin{vmatrix} \partial F_1/\partial x_1 & \partial F_1/\partial x_2 & ... & \partial F_1/\partial x_N \\ \partial F_2/\partial x_1 & \partial F_2/\partial x_2 & ... & \partial F_2/\partial x_N \\ ... & ... & ... & ... \\ \partial F_N/\partial x_1 & \partial F_N/\partial x_2 & ... & \partial F_N/\partial x_N \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ ... \\ \Delta x_N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -F_1 \\ -F_2 \\ ... \\ -F_N \end{vmatrix}.$$

Решение этой системы дает $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_N$, то есть Δx_i.

4) Вычисляем уточненные значения

$$\begin{aligned} &x_1^{(n+1)} = x_1^{(n)} + \Delta x_1, \\ &... \\ &x_N^{(n+1)} = x_N^{(n)} + \Delta x_N \end{aligned}$$

или в общем виде

$$x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} + \Delta x_i.$$

5) Для всех Δx_i проверяем одно из условий: $|\Delta x_i| > \varepsilon$, $|\Delta x_i / x_i| > \varepsilon$. Если оно выполняется, идем к п. 2, то есть выполняем новую итерацию. Иначе считаем $x_i^{(n+1)}$ найденным решением.

Отметим, что решение системы нелинейных уравнений (13) можно представить и в виде

$$x_i^{(n+1)} = x_i^{(n)} - \left(W^{(n)}\right)^{-1} \cdot F_j \left(x_i^{(n)}\right),$$

где $\left(W^{(n)}\right)^{-1}$ – обращенная матрица Якоби.

Обращение матрицы Якоби осуществляется в ходе решения системы линейных уравнений для приращения Δx_i методом Гаусса [2, с. 68-69].

Заключение

Предложенные в данной работе модели предполагается использовать для аппроксимации и временной экстраполяции «общих» точек, равноотстоящих вдоль линии атмосферного фронта. Предварительная локализация таких точек может проводиться по серии последовательных во времени метеорологических снимков геостационарного спутника на основе знания характерных свойств облачного покрова на различных этапах развития циклонической деятельности. Причем число таких «общих» точек должно быть одинаковым для каждого фронта серии.

Дальнейшее исследование предполагает проведение численных экспериментов на основе серий последовательных снимков геостационарного европейского спутника Meteosat в инфракрасном и видимом диапазонах длин волн с дискретизацией по времени 30 минут. Для оценки точности СКП целесообразно набор данных разделить на две части – зависимый и независимый ансамбли. По первой части рассчитать параметры математической модели СКП, по второй – оценивать точность того или иного метода СКП путем вычисления статистических характеристик отклонения координат прогностического фронта от фактического.

Список литературы

[1] Belotsercovsky A.V., Uyeda H., Kikuchi K. Radar imagery nowcasting using adaptive stochastic models // Atmospheric Research. 1994. Vol. 34, № 1-2. Pp. 249–257.

[2] Дьяконов В.П. Справочник по алгоритмам и программам на языке Бейсик для персональных ЭВМ. М.: Наука, 1987. 240 с.

[3] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 831 с.

[4] Кузнецов А.Д. Текущее прогнозирование на основе цифровой обработки изображений. СПб.: Изд-во РГГМИ, 1997. 167 с.

[5] Матвеев Л.Т. Основы общей метеорологии: Физика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1965. 876 с.

Библиографическая ссылка

Кузнецов А.Д., Сероухова О.С., Симакина Т.Е. Модели анализа и прогноза эволюции атмосферных фронтов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 1. С. 67–81.

Сведения об авторах

1. **Кузнецов Анатолий Дмитриевич**
профессор кафедры экспериментальной физики атмосферы Российского государственного гидрометеорологического университета.

Россия, 195196, г. Санкт-Петербург, Малоохтинский проспект, д. 98, РГГМУ. E-mail: kuznetsov1946@inbox.ru.

2. **Сероухова Ольга Станиславовна**
доцент кафедры экспериментальной физики атмосферы Российского государственного гидрометеорологического университета.

Россия, 195196, г. Санкт-Петербург, Малоохтинский проспект, д. 98, РГГМУ. E-mail: serouhova@inbox.ru.

3. **Симакина Татьяна Евгеньевна**
доцент кафедры экспериментальной физики атмосферы Российского государственного гидрометеорологического университета.

Россия, 195196, г. Санкт-Петербург, Малоохтинский проспект, д. 98, РГГМУ. E-mail: tatiana.simakina@gmail.com.

MODELS FOR ANALYSIS AND FORECASTING OF EVOLUTION ATMOSPHERIC FRONTS

Kuznetsov Anatoly
Head of Experimental Physics of the Atmosphere department,
Russian State Hydrometeorological University
Russia, 195196, Saint-Petersburg, Malookhtinsky avenue, 98, RSHU.
E-mail: kuznetsov1946@inbox.ru

Serouhova Olga
Associate Professor of Experimental Physics of the Atmosphere department,
Russian State Hydrometeorological University
Russia, 195196, Saint-Petersburg, Malookhtinsky avenue, 98, RSHU.
E-mail: serouhova@inbox.ru

Simakina Tatiana
Associate Professor of Experimental Physics of the Atmosphere department,
Russian State Hydrometeorological University
Russia, 195196, Saint-Petersburg, Malookhtinsky avenue, 98, RSHU.
E-mail: tatiana.simakina@gmail.com

Received 17.03.2015, revised 27.03.2015.

This article discusses the mathematical models of analysis and forecast of the current evolution of atmospheric fronts. Mathematical models are used to extrapolate the time equally spaced along the front lines of «common» points defining the position of the front at different times.

Keywords: atmospheric fronts, the current forecast, the least squares method, adaptive Kalman filtering, undetermined Lagrange multipliers.

Bibliographic citation

Kuznetsov A.D., Serouhova O.S., Simakina T.E. Models for analysis and forecasting of evolution atmospheric fronts. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2015, no. 1, pp. 67–81. (in Russian)