

УДК 519.6

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧЕЧНОГО ДЕМПФЕРА ДЛЯ ЗАДАЧИ ГАШЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ

Атамуратов А.Ж.

МАТИ – Российский государственный технологический университет имени  
К.Э. Циолковского, г. Москва

---

*Поступила в редакцию 05.05.2015, после переработки 15.05.2015.*

---

Рассматривается задача гашения колебаний балки при шарнирном закреплении границ. Для гашения предлагается использовать точечный стационарный демпфер и численные методы: метод редукции и метод координатного спуска. Для поиска оптимальных параметров функции управления предлагается минимизировать интеграл энергии балки. Исследуется зависимость времени гашения от ограничений на импульс управляющего воздействия, а также исследуется влияние расположения демпфера на весь процесс гашения.

**Ключевые слова:** гашение колебаний, балка, модель демпфера, точечный стационарный демпфер, функция управления, численный метод, метод редукции, метод координатного спуска, интеграл энергии балки, зависимость времени от ограничений, зависимость от расположения.

*Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 2. С. 35–46.*

### Введение

Задачи гашения колебаний, и, в частности, колебаний балок актуальны в силу многочисленных технических приложений. Большинство механических конструкций имеют каркасную конструкцию, по частям которой могут распространяться механические возмущения, возникшие под воздействием внешних факторов. Это приводит к возникновению вынужденных упругих колебаний всей конструкции, что, в свою очередь, влияет на пространственную устойчивость конструкции и отрицательно сказывается на работе приборов, установленных на ней. Поэтому гашение таких колебаний представляет собой важную прикладную задачу.

Колебания балок, стержней, описываются гиперболическим уравнением четвертого порядка [1]

$$u_{tt} = -a^2 u_{xxxx} + g(t, x), \quad 0 < t, 0 < x \leq l, a = \text{const} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u(0, x) = h_0(x), \quad u_t(0, x) = h_1(x). \quad (2)$$

На концах балки наложим условия нежесткого (шарнирного) закрепления

$$u(t, 0) = u_{xx}(t, 0) = 0, \quad u(t, l) = u_{xx}(t, l) = 0. \quad (3)$$

Задача гашения колебаний балки: требуется найти управляющую функцию  $g(t, x)$  из класса  $L_2(0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq l)$ , которая за минимальное время  $T$  переводит балку из возмущенного состояния (2) в успокоенное состояние

$$u(T, x) = 0, \quad u_t(T, x) = 0. \quad (4)$$

Аналитическое решение задачи гашения колебаний на основе классических подходов [2-5] приводит к исследованию проблемы моментов, которая не отвечает на вопрос, как должно выглядеть управление, а дает лишь понимание существования решения.

В данной работе для решения задачи гашения колебаний балки предлагается использовать численные методы на основе методов редукции и координатного спуска, демпфер будет моделироваться как точечный стационарный в соответствии с работами [6-10]

$$g(t, x) = w(t) \delta(x - x_0), \quad (5)$$

с ограничением на управляющее воздействие  $|w(t)| \leq W$ , где  $x_0$  – место расположения демпфера. В работе будет исследоваться зависимость времени гашения от ограничения на функцию  $w(t)$  и от места расположения демпфера  $x_0$ .

## 1. Численное решение задачи

Уравнение (1) можно свести к системе двух уравнений второго порядка

$$\begin{cases} u_t = av_{xx}, \\ v_t = -au_{xx} + f(t, x), \end{cases} \quad (6)$$

где из (1), (7) и (5) получается, что функция

$$f(t, x) = \begin{cases} -\frac{x}{al} w(t) (l - x_0), & x < x_0, \\ \frac{1}{a} (x - x_0) w(t) - \frac{x}{al} (l - x_0) w(t), & x \geq x_0. \end{cases} \quad (7)$$

В качестве начальных условий система (7) будет иметь

$$u(0, x) = h_0(x), \quad v(0, x) = \frac{1}{a} \int_0^x \left[ \int_0^\xi h_1(\eta) d\eta \right] d\xi - \frac{x}{al} \int_0^l \left[ \int_0^\xi h_1(\eta) d\eta \right] d\xi. \quad (8)$$

Граничные условия примут следующий вид

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, l) = 0, \quad v(t, 0) = 0, \quad (9)$$

$$v(t, l) = \int_0^t f(t, l) dt + \frac{1}{a} \int_0^l \int_0^x h_1(\eta) d\eta dx - \frac{1}{a} \int_0^l \int_0^\xi h_1(\eta) d\eta d\xi. \quad (10)$$

Для численного решения задачи гашения необходимо сделать два шага. Во-первых, аппроксимируем систему (7). Зададим натуральные числа  $N_X$  и  $N_T$ , и разобьем рассматриваемую область  $\{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq l\}$  на прямоугольные ячейки параллельными прямыми  $x_m = m \cdot h_x$ ,  $m = 0, \dots, N_X$ ,  $t_n = n \cdot h_t$ ,  $n = 0, \dots, N_T$ , где  $h_x = l/N_X$  и  $h_t = T/N_T$ . В результате этих операций мы можем записать следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{h_t} = \frac{a}{2} \left[ \frac{v_{m-1}^n - 2v_m^n + v_{m+1}^n}{h_x^2} + \frac{v_{m-1}^{n+1} - 2v_m^{n+1} + v_{m+1}^{n+1}}{h_x^2} \right], \\ \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{h_t} = -\frac{a}{2} \left[ \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h_x^2} + \frac{u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^{n+1}}{h_x^2} \right] + \frac{f_m^n + f_m^{n+1}}{2}. \end{cases} \quad (11)$$

Сделаем в системе (11) следующие подстановки:

$$y_m^n = \begin{pmatrix} u_m^n \\ v_m^n \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{2h_x^2}{a \cdot h_t}, \quad \beta = \frac{h_x^2}{a}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} -f_m^n - f_m^{n+1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

и выполним элементарные преобразования. В результате можно получить уравнение следующего вида:

$$y_{m-1}^{n+1} - [2E + \alpha B] y_m^{n+1} + y_{m+1}^{n+1} = -(y_{m-1}^n - [2E - \alpha B] y_m^n + y_{m+1}^n + \beta V), \quad (12)$$

где  $E$  – единичная матрица. Пусть в (12)  $C = 2E + \alpha B$ ,  $\tilde{C} = 2E - \alpha B$  и  $F_m^n = y_{m-1}^n - \tilde{C} y_m^n + y_{m+1}^n + \beta V$ . Тогда наша система запишется следующим образом

$$y_{m-1}^{n+1} - C y_m^{n+1} + y_{m+1}^{n+1} = -F_m^n. \quad (13)$$

Записанное таким образом уравнение будем решать методом редукции [8, 11].

С помощью метода Неймана [11] можно показать, что схема (11) является безусловно устойчивой.

Во-вторых, нужно построить процесс минимизации для поиска оптимального значения управляющей функции. Стоит отметить, что условие (4) эквивалентно обращению в ноль интеграла энергии балки [12] в момент времени  $T$

$$E(T) = \int_0^l (u_t^2 + a^2 u_{xx}^2) dx = 0. \quad (14)$$

Поскольку решение уравнения (1) и значение (4) определяется не только исходя из начальных условий, которые известны, но также и управляющего воздействия (5), то (14) является, в конечном счете, функционалом от функции  $w(t)$ . Аппроксимируя  $w(t)$  кусочно-постоянными функциями  $w(t_n) = w_n$ , можно получить

$$E(T) = L(w_0, w_1, \dots, w_{N_T-1}). \quad (15)$$

Оптимальные значения управляющего воздействия  $w_0, w_1 \dots w_{N_T-1}$ , минимизирующие (15) за минимальное время  $T$  с заданной точностью  $\varepsilon$ , и будут искомым решением задачи гашения. В работе [13] исследовалась задача гашения колебаний прямоугольной мембраны демпфером конечного размера, было показано существование решения и приведены численные расчеты. Также в [13] было показано, что для задачи гашения более эффективным является метод координатного спуска, а не градиентного. Поэтому оптимальные значения управляющей функции

будем искать методом координатного спуска. При реализации численного алгоритма был создан комплекс программ с применением технологий параллельного программирования и вычислений [14].

При расчетах использовались следующие параметры в уравнении:  $a = 1$ ,  $l = 1$ . В силу безусловной устойчивости схемы (11) можно положить  $h_t = h_x/2$ . В методе редукции количество интервалов равнялось  $M = 5$ , поэтому  $h_x = 0.03125$  и  $h_t = 0.015625$ . Условием гашения колебаний считалась минимизация (15) до  $\varepsilon \leq 10^{-3}$ .

Вычислительный эксперимент №1. Рассмотрим начальные условия в виде  $h_0(x) = 0.5 * \sin(\pi x/l)$ ,  $h_1(x) = 0$ . Демпфер размещался в точке  $x_0 = 0.5$ . Задача решается за время  $T = 0.1406$ . На Рис. 1 изображен процесс гашения колебаний  $u(t, x)$ . На Рис. 2 изображена управляющая функция  $w(t)$ .

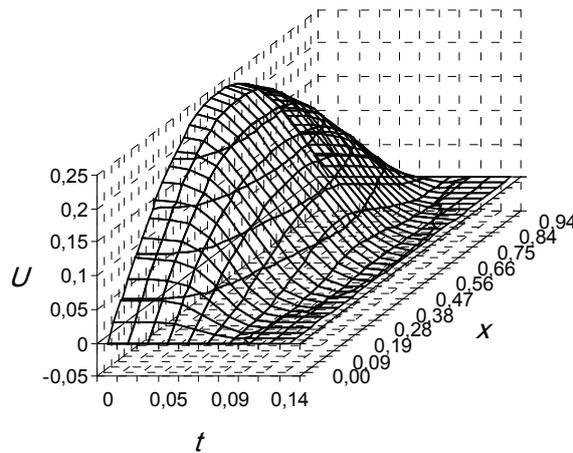


Рис. 1: Процесс гашения колебаний

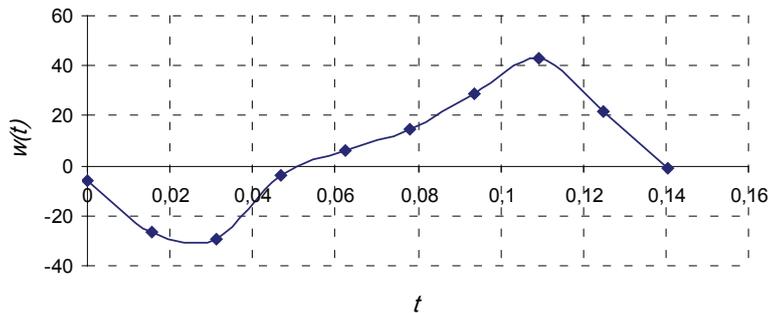


Рис. 2: Управляющая функция  $w(t)$

Вычислительный эксперимент №2. Рассмотрим начальные условия в виде  $h_0(x) = 0.2(1 - \cos(\pi x)) \sin(\pi x)$ ,  $h_1(x) = 0$ . Демпфер размещался в точке  $x_0 =$

0.6875. Задача решается за время  $T = 0.2187$ . На Рис. 3 изображен процесс гашения колебаний  $u(t, x)$ . На Рис. 4 изображена управляющая функция  $w(t)$ .

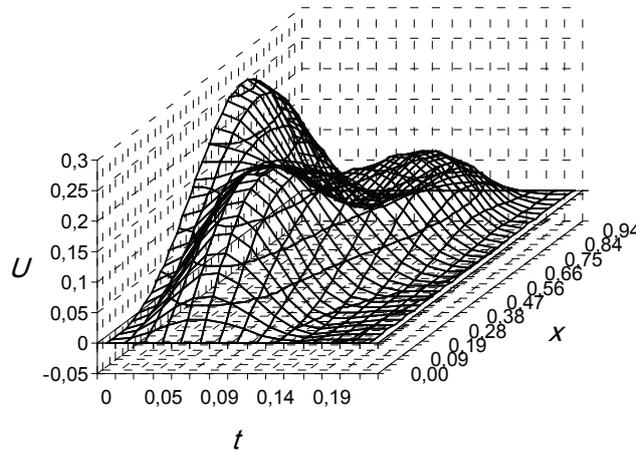


Рис. 3: Процесс гашения колебаний

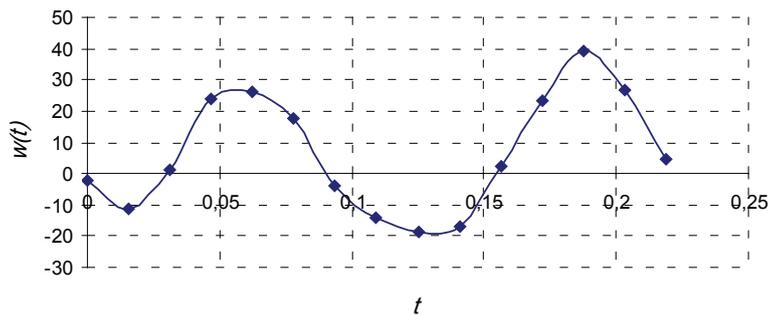


Рис. 4: Управляющая функция  $w(t)$

Вычислительный эксперимент №3. Рассмотрим начальные условия в виде  $h_0(x) = 0.25 * \sin(2\pi x)$ ,  $h_1(x) = 0$ . Демпфер размещался в точке  $x_0 = 0.25$ . Задача решается за время  $T = 0.203125$ . На Рис. 5 изображен процесс гашения колебаний  $u(t, x)$ . На Рис. 6 изображена управляющая функция  $w(t)$ .

## 2. Влияние ограничения импульса

Управляющая функция (5) представляет собой демпфер-устройство, которое будучи установленным в конкретное место на балке позволяет с помощью импульса погасить возникшее в механическом элементе возмущение. При создании такого

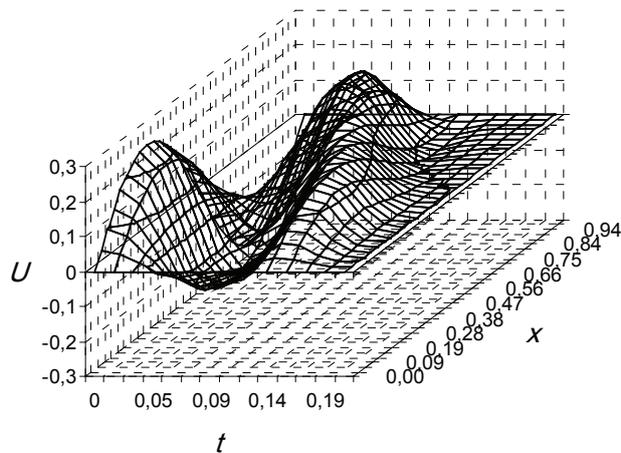


Рис. 5: Процесс гашения колебаний

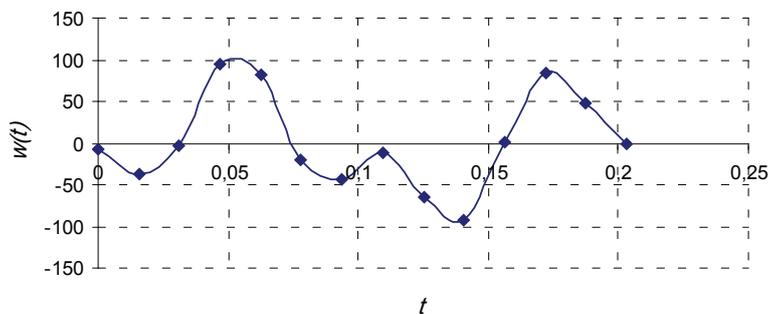


Рис. 6: Управляющая функция  $w(t)$

устройства может возникнуть необходимость использования небольшого импульсного воздействия, значения которого ограничены из-за небольшого физического размера устройства. Отсюда возникает вопрос как будет изменяться требуемое для гашения минимальное время  $T$ , если наложить ограничение на максимально допустимое значение импульса  $|\max w(t)| \leq W$ .

Вычислительный эксперимент №4. Рассмотрим начальные условия в виде  $h_0(x) = 0.5 * \sin(\pi x/l)$ ,  $h_1(x) = 0$ . Демпфер размещался в точке  $x_0 = 0.5$ . Будем последовательно менять ограничение  $W = 43...0.5$ . В результате получим следующую взаимосвязь между временем гашения и ограничением на управляющее воздействие – Рис. 7.

Вычислительный эксперимент №5. Рассмотрим начальные условия в виде  $h_0(x) = 0.2(1 - \cos(\pi x)) \sin(\pi x)$ ,  $h_1(x) = 0$ . Демпфер размещался в точке  $x_0 = 0.6875$ . Будем последовательно менять ограничение  $W = 43...0.5$ . В результате получим следующую взаимосвязь между временем гашения и ограничением на

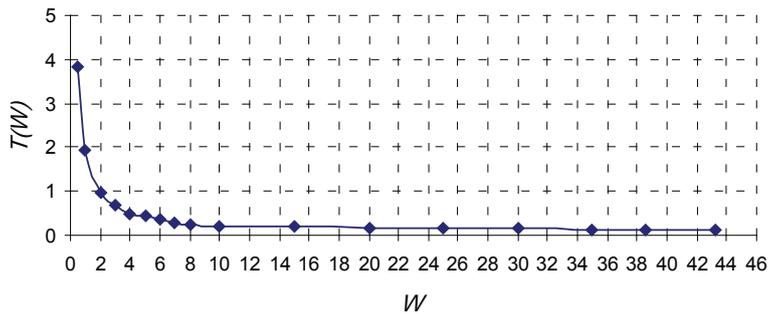


Рис. 7: Взаимосвязь  $T(W)$

управляющее воздействие – Рис. 8

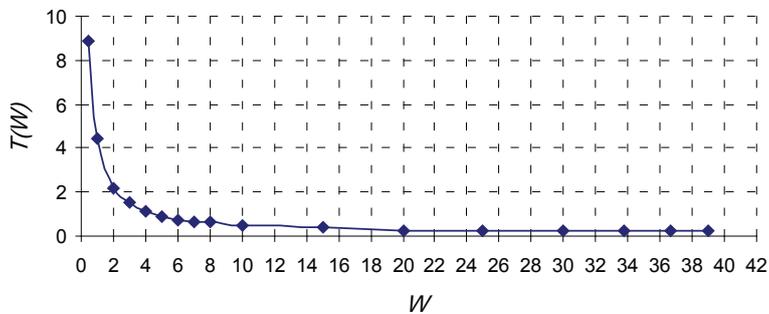


Рис. 8: Взаимосвязь  $T(W)$

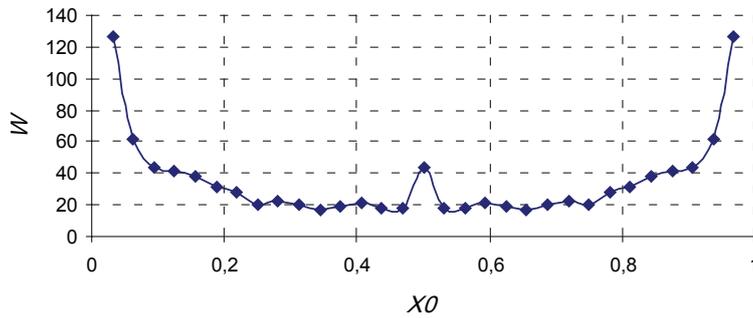
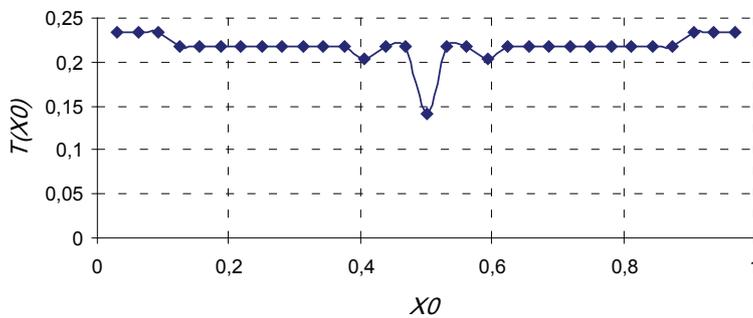
Основываясь на результатах примеров №4 и №5, можно сделать важный для практики вывод.

**Лемма 1.** При стремлении ограничения  $\max |w(t)| = W$  к максимуму амплитуды начального возмущения системы минимальное время  $T$ , требуемое для гашения колебаний, возрастает экспоненциально.

### 3. Влияние расположения демпфера

Второй вопрос, который возникает при реализации демпфера-устройства, влияет ли расположение демпфирующего устройства на балке на время гашения и амплитуду воздействующего импульса.

Пример №6. Рассмотрим начальные условия в виде  $h_0(x) = 0.5 * \sin(\pi x/l)$ ,  $h_1(x) = 0$ . Будем последовательно изменять положение демпфера на балке  $X_0 =$

Рис. 9: Взаимосвязь  $W(X_0)$ Рис. 10: Взаимосвязь  $T(X_0)$ 

$-h_x \dots 0.5 \dots N_x - h_x$ . В результате получим следующие взаимосвязи максимума импульса  $W$  (Рис. 9) и минимального времени гашения  $T$  (Рис. 10) от положения демпфера на балке  $X_0$

Вычислительный эксперимент №7. Рассмотрим начальные условия в виде  $h_0(x) = 0.25 * \sin(2\pi x)$ ,  $h_1(x) = 0$ . Будем последовательно изменять положение демпфера на балке  $X_0 = -h_x \dots 0.5 \dots N_x - h_x$ . В результате получим следующие взаимосвязи максимума импульса  $W$  (Рис. 11) и минимального времени гашения  $T$  (Рис. 12) от положения демпфера на балке  $X_0$

Основываясь на результатах вычислительных экспериментов можно сделать важные для практики выводы:

1. Наибольшая эффективность в гашении с точки зрения времени  $T$  и амплитуды воздействия  $W$  достигается в том случае, если установить демпфер в точку максимума амплитуды начального возмущения (2).
2. Зависимость максимального значения воздействующего импульса  $W$  от расположения демпфера на балке обратна виду начального возмущения.
3. Максимально возможное минимальное время гашения при прочих равных

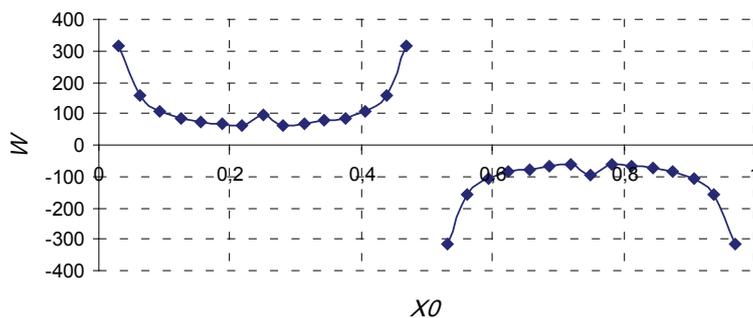


Рис. 11: Взаимосвязь  $W(X_0)$

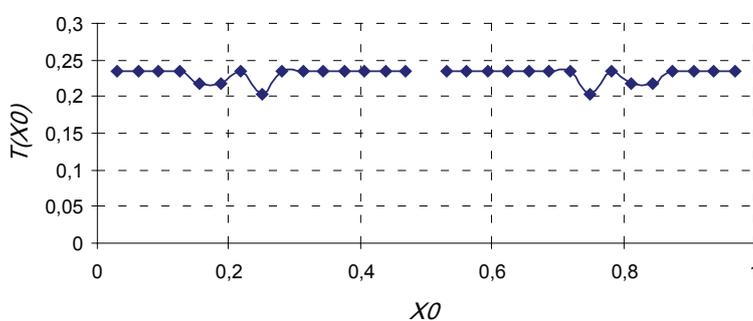


Рис. 12: Взаимосвязь  $T(X_0)$

условиях будет достигаться в крайних точках.

### Заключение

Стоит отметить, что численные методы на основе метода редукции и координатного спуска позволяют эффективно решать задачу гашения колебаний при различных граничных и начальных условиях уравнения (1), а также при различном виде управляющей функции  $g(t, x)$  находить вид управляющего импульса  $w(t)$  и минимальное время, которые позволят погасить колебания балки с заданной точностью. Анализ и выводы относительно ограничений воздействующего импульса и места расположения демпфера позволяют в дальнейшем корректно планировать установку демпфирующего устройства и его настройку.

### Список литературы

- [1] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.

- 
- [2] Lions J.L. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed system // *SIAM Review*. 1988. Vol. 30, № 1. Pp. 1–68.
- [3] Lagness J. Control of wave process with distributed controls supported on a subregion // *SIAM Journal on Control and Optimization*. 1983. Vol. 1, № 1. Pp. 68–85.
- [4] Russel D. Controllability and stabilization theory for linear partial differential equations // *SIAM Review*. 1978. Vol. 20, № 5. Pp. 639–739.
- [5] Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
- [6] Асланов С.Ж., Михайлов И.Е., Муравей Л.А. Аналитические и численные методы в задаче гашения колебаний струны точечным демпфером // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2006. № 7. С. 28–35.
- [7] Aslanov S., Atamuratov A., Mikhailov I., Muravey L. The damping of vibrations for mechanical systems // *Proc. of II International Conference «Optimization and applications» (OPTIMA-2011)*. Petovac, Montenegro, 2011. P. 34.
- [8] Атамуратов А.Ж., Михайлов И.Е., Муравей Л.А. О гашении колебаний балки // *Труды Института системного анализа Российской академии наук*. 2010. Т. 50, № 1. С. 53–58.
- [9] Muravey L., Mikhailov I., Atamuratov A. The damping problem of vibrations for large mechanical systems // *Proc. of ICIAM2011*. Vancouver, Canada, 2011. P. 87.
- [10] Атамуратов А.Ж., Михайлов И.Е., Муравей Л.А. О гашении колебаний сложных механических структур // *Авиакосмическая техника и технология*. 2012. № 4. С. 54–59.
- [11] Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.
- [12] Атамуратов А.Ж. Получение интегралов энергии для прямоугольной мембраны, балки и прямоугольной пластины // *Молодой ученый*. 2013. № 11. С. 10–15. URL: <http://www.moluch.ru/archive/58/8112/>
- [13] Атамуратов А.Ж. О гашении колебаний прямоугольной мембраны // *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*. 2013. № 2 (29). С. 49–59.
- [14] Атамуратов А.Ж. Использование методик параллельного программирования при численном решении задач оптимизации методами координатного и градиентного спусков на примере задач гашения колебаний // *Молодой ученый*. 2014. № 1. С. 13–18. URL: <http://www.moluch.ru/archive/60/8692/>

### Библиографическая ссылка

Атамуратов А.Ж. Численное исследование точечного демпфера для задачи гашения колебаний балки // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 2. С. 35–46.

### Сведения об авторах

1. **Атамуратов Андрей Жиенбаевич**

соискатель кафедры прикладной математики и информатики Российского государственного технологического университета им. К.Э. Циолковского (МАТИ).

*Россия, 121552, г. Москва, ул. Оршанская, д. 3, МАТИ.*

*E-mail: gooffydog@mail.ru.*

## NUMERICAL STUDYING OF POINT DAMPER FOR PROBLEM OF DAMPING OF VIBRATIONS OF BEAM

**Atamuratov Andrey Zhienbayevich**

Postgraduate of Applied Mathematics and Computer Science department,  
MATI – Russian State Technological University of K.E. Tsiolkovsky  
*Russia, 121552, Moscow, 3 Orshanskaya str., MATI.*  
*E-mail: gooffydogg@mail.ru*

---

*Received 05.05.2015, revised 15.05.2015.*

---

The work is dedicated to the problem of damping of vibrations of beam with a hinge fixed boundary. The model of point stationary damper is proposed for damping of vibrations with use of numerical methods such as reduction method and coordinate descent method. For search of optimal values of control function it is proposed to minimize energy integral of beam. The dependence of time for damping from restrictions on impulse of control influence and the influence of damper location on whole process are investigated.

**Keywords:** damping of vibrations, beam, model of damper, a point stationary damper, control function, numerical method, reduction method, method of coordinated descent, energy integral of beam, the dependence of time for damping from restrictions, the dependence from location.

### Bibliographic citation

Atamuratov A.Zh. Numerical studying of point damper for problem of damping of vibrations of beam. *Vestnik TsvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2015, no. 2, pp. 35–46. (in Russian)