УДК 519.2

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ОБРАТНЫХ МОМЕНТОВ НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН[1]

Бенинг В.Е.
МГУ им. М.В. Ломоносова, Институт проблем информатики РАН, г. Москва

Поступила в редакцию 09.06.2015, после переработки 12.06.2015.

В работе рассматривается асимптотическое поведение обратных моментов некоторых дискретных случайных величин. Доказаны общие теоремы, позволяющие получать асимптотические дефекты статистических процедур, основанных на выборках случайного объема. Рассмотрена задача оценивания заданной параметрической функции на основе оценок, основанных на выборках случайного и неслучайного объема.

Ключевые слова: обратный момент, оценка, асимптотический дефект, выборка случайного объема, распределение Пуассона, биномиальное распределение.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 2. С. 47–65.

1. Введение

В работе развивается подход, предложенный в работе [1]. Используются понятия и обозначения, введенные в этой работе. Напомним кратко постановку задачи.

Предположим, что даны две статистические процедуры (например, статистические оценки или статистические критерии, см. книгу [5]), качество которых характеризуется, соответственно, величинами π_n и π_n^*. Здесь n – число наблюдений. В этом случае необходимое число наблюдений $m(n)$ для первой процедуры (чтобы сравняться по качеству со второй) определяется из равенства (считая $m(n)$ непрерывной переменной)

$$\pi_{m(n)} \;=\; \pi_n^*, \tag{1.1}$$

а предел вида (в случае его существования)

$$d \;=\; \lim_{n\to\infty} \,(m(n) \;-\; n) \tag{1.2}$$

называется асимптотическим дефектом первой процедуры относительно второй. Предположим, что для функций π_n^* и π_n справедливы асимптотические разложения вида

$$\pi_n^* \;=\; \frac{a}{n^r} \;+\; \frac{b}{n^{r+s}} \;+\; o\big(n^{-r-s}\big), \tag{1.3}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №15-07-02652).

$$\pi_n \;=\; \frac{a}{n^r} \;+\; \frac{c}{n^{r+s}} \;+\; o\big(n^{-r-s}\big), \tag{1.4}$$

где a, b и c – некоторые постоянные, не зависящие от n, а $r \;>\; 0$, $s \;>\; 0$ – некоторые константы, определяющие порядок убывания по n этих мер качества. Первый член в этих асимптотических разложениях одинаков и это отражает тот факт, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{m(n)} \;=\; 1.$$

Из соотношений (1.1) – (1.4) легко получить, что (см. работу [2] или книгу [4], стр. 310)

$$d_n \;\equiv\; \frac{c \,-\, b}{r\; a}\, n^{1-s} \;+\; o\big(n^{1-s}\big). \tag{1.5}$$

Таким образом, асимптотический дефект имеет вид

$$d \;=\; \begin{cases} \pm\infty, & 0 \,<\, s \,<\, 1, \\ \dfrac{c \,-\, b}{r\; a}, & s \,=\, 1, \\ 0, & s \,>\, 1. \end{cases} \tag{1.6}$$

В настоящей работе приведены асимптотические формулы для обратных моментов некоторых дискретных случайных величин. С помощью этих формул вычисляются асимптотические дефекты некоторых статистических оценок, основанных на выборках случайного объема. Используя понятие асимптотического дефекта, проведено асимптотическое сравнение качества оценок, основанных на выборках случайного и неслучайного объемов.

2. Оценки, основанные на выборках случайного объема

Рассмотрим случайные величины (с.в.) $N_1, N_2, \ldots$ и $X_1, X_2, \ldots$, заданные на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega,\, \mathcal{A},\, \mathsf{P})$. При этом случайные величины $X_1, X_2, \ldots X_n$ имеют смысл статистических наблюдений, а случайная величина N_n трактуется как случайный объем выборки, зависящий от натурального параметра $n \in \mathbb{N}$. Типичным образом мы будем предполагать, что

$$\mathsf{E}\, N_n \;=\; n,$$

то есть в среднем объем случайной выборки равен размеру выборки неслучайного размера. При нахождении дефектов статистических процедур, основанных на выборках случайного объема $N_{m(n)}$, и соответствующей процедуры, основанной на выборке неслучайного объема n, мы фактически сравниваем средний объем случайной выборки $m(n)$ и n с помощью величины $d_n \;=\; m(n) \;-\; n$ и ее предела.

Предположим, что для каждого $n \geq 1$ с.в. N_n принимает только натуральные значения (то есть, $N_n \;\in \mathbb{N}$) и не зависит от последовательности с.в. $X_1, X_2, \ldots$. Всюду далее предполагается, что случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ независимы, одинаково распределены и имеют распределение, зависящее от неизвестного параметра $\theta \;\in\; \Theta$, при этом, в принципе, множество Θ может иметь произвольную природу.

Для каждого $n \geq 1$ обозначим через $T_n = T_n(X_1, \dots, X_n)$ некоторую статистику, то есть действительную измеримую функцию, зависящую от наблюдений $X_1, \dots, X_n$. Для каждого $n \geq 1$ определим статистику T_{N_n}, зависящую от выборки случайного объема как

$$T_{N_n}(\omega) \ \equiv \ T_{N_n(\omega)}(X_1(\omega), \dots, X_{N_n(\omega)}(\omega)), \ \ \omega \ \in \ \Omega.$$

Далее, под статистикой в этом разделе будем понимать оценку действительной известной функции $g(\theta)$, зависящей от неизвестного параметра $\theta \ \in \ \Theta$, и будем обозначать ее символами типа $\delta_n(X_1, \dots, X_n)$.

Для удобства ссылок приведем без доказательства некоторые утверждения из работы [1].

Теорема 2.1([1]).

1. Если $\delta_n \ = \ \delta_n(X_1, \dots, X_n)$ любая несмещенная оценка функции $g(\theta)$, то есть справедливо тождество

$$\mathsf{E}_\theta \ \delta_n \ \equiv \ g(\theta), \ \ \theta \ \in \ \Theta$$

и $\delta_{N_n} \ \equiv \ \delta_{N_n}(X_1, \dots, X_{N_n})$ – оценка, построенная по выборке случайного объема, то она также является несмещенной оценкой функции $g(\theta)$, то есть

$$\mathsf{E}_\theta \ \delta_{N_n} \ \equiv \ g(\theta), \ \ \theta \ \in \ \Theta.$$

2. Предположим, что существуют числа $a(\theta)$, $b(\theta)$ и $C(\theta) \ > \ 0$, $\alpha \ > \ 0$, $r \ > \ 0$, $s \ > \ 0$ такие, что для функции риска оценки $\delta_n(X_1, \dots, X_n)$ справедливо соотношение

$$\left| R_n^*(\theta) \ - \ \frac{a(\theta)}{n^r} \ - \ \frac{b(\theta)}{n^{r+s}} \right| \ \leqslant \ \frac{C(\theta)}{n^{r+s+\alpha}},$$

где

$$R_n^*(\theta) \ = \ \mathsf{E}_\theta \big(\delta_n(X_1, \dots, X_n) \ - \ g(\theta) \big)^2,$$

тогда для функции риска оценки, построенной по выборке случайного объема, выполнено неравенство

$$\left| R_n(\theta) \ - \ a(\theta) \ \mathsf{E} \ N_n^{-r} \ - \ b(\theta) \ \mathsf{E} \ N_n^{-r-s} \right| \ \leqslant \ C(\theta) \ \mathsf{E} \ N_n^{-r-s-\alpha},$$

где

$$R_n(\theta) \ = \ \mathsf{E}_\theta \big(\delta_{N_n}(X_1, \dots, X_{N_n}) \ - \ g(\theta) \big)^2.$$

Следствие 2.1([1]). *Пусть существуют числа $a(\theta)$, $b(\theta)$ and $r \ > \ 0$, $s \ > \ 0$ такие, что*

$$R_n^*(\theta) \ = \ \frac{a(\theta)}{n^r} \ + \ \frac{b(\theta)}{n^{r+s}},$$

тогда

$$R_n(\theta) \ = \ a(\theta) \ \mathsf{E} \ N_n^{-r} \ + \ b(\theta) \ \mathsf{E} \ N_n^{-r-s}.$$

Теорема 3.1([1]). *Пусть существуют числа $a(\theta)$, $b(\theta)$ и k_1, k_2 такие, что справедливы соотношения*

$$R_n^*(\theta) \;=\; \mathsf{E}_\theta\big(\delta_n(X_1,\ldots,X_n) \;-\; g(\theta)\big)^2 \;=$$

$$=\; \frac{a(\theta)}{n} \;+\; \frac{b(\theta)}{n^2} \;+\; o\big(n^{-2}\big)$$

и

$$\mathsf{E}\; N_n^{-1} \;=\; \frac{1}{n} \;+\; \frac{k_1}{n^2} \;+\; o\big(n^{-2}\big),$$

$$\mathsf{E}\; N_n^{-2} \;=\; \frac{k_2}{n^2} \;+\; o\big(n^{-2}\big),$$

$$\mathsf{E}\; N_n^{-3} \;=\; o\big(n^{-2}\big),$$

тогда для асимптотического дефекта оценки $\delta_{N_n}(X_1,\ldots,X_{N_n})$ относительно оценки $\delta_n(X_1,\ldots,X_n)$ справедливо равенство

$$d(\theta) \;=\; \frac{k_1\; a(\theta) \;+\; b(\theta)\; (k_2 \;-\; 1)}{a(\theta)}.$$

Следствие 3.1([1]). *Пусть в условиях Теоремы 3.1 $k_2 = 1$, тогда асимптотический дефект оценки $\delta_{N_n}(X_1,\ldots,X_{N_n})$ относительно оценки $\delta_n(X_1,\ldots,X_n)$ равен k_1, то есть он не зависит от вида оценки и имеет вид*

$$d(\theta) \;=\; k_1.$$

Типичным образом, но не всегда (см. Следствие 3.2), $k_1 \;=\; 1$ и поэтому в регулярных случаях, вне зависимости от вида оценки $\delta_n(X_1,\ldots,X_n)$, имеем

$$d(\theta) \;=\; 1.$$

Теорема 3.2([1]). *Пусть существуют числа $a(\theta)$, $b(\theta)$ такие, что для функции риска оценки $\delta_n(X_1,\ldots,X_n)$ справедливо соотношение*

$$R_n^*(\theta) \;=\; \mathsf{E}_\theta\big(\delta_n(X_1,\ldots,X_n) \;-\; g(\theta)\big)^2 \;=$$

$$=\; \frac{a(\theta)}{n} \;+\; \frac{b(\theta)}{n^2}.$$

Пусть случайные величины N_{ni}, $\;i \;=\; 1,2$ принимают натуральные значения и не зависят от наблюдений $X_1,\; X_2,\ldots$ Предположим, что для некоторых чисел $k_{1i},\; k_{2i},\; i \;=\; 1,2$ справедливы равенства

$$\mathsf{E}\; N_{ni}^{-1} \;=\; \frac{1}{n} \;+\; \frac{k_{1i}}{n^2} \;+\; o\big(n^{-2}\big),$$

$$\mathsf{E}\; N_{ni}^{-2} \;=\; \frac{k_{2i}}{n^2} \;+\; o\big(n^{-2}\big), \quad i \;=\; 1,2.$$

Тогда для асимптотического дефекта оценки $\delta_n^{(2)} \equiv \delta_{N_{n2}}(X_1, \ldots, X_{N_{n2}})$ *относительно оценки* $\delta_n^{(1)} \equiv \delta_{N_{n1}}(X_1, \ldots, X_{N_{n1}})$ *справедливо равенство*

$$d_{21}(\theta) = \frac{a(\theta)(k_{12} - k_{11}) + b(\theta)\,(k_{22} - k_{21})}{a(\theta)}.$$

3. Асимптотическое поведение обратных моментов некоторых дискретных распределений

В этом разделе будет исследовано асимптотическое поведение по n моментов, которые мы назовем обратными, вида

$$\mathsf{E}\, N_n^{-1}, \qquad \mathsf{E}\, N_n^{-2}$$

некоторых дискретных случайных величин N_n, принимающих натуральные значения и удовлетворяющих условию

$$\mathsf{E}\, N_n = n.$$

Некоторое представление о порядке моментов случайных величин такого рода дает неравенство Иенсена вида

$$\mathsf{E}\, N_n^{-k} \geqslant \frac{1}{(\mathsf{E}\, N_n)^k} = \frac{1}{n^k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Лемма 3.1. *Пусть неотрицательная целочисленная случайная величина N имеет производящую функцию*

$$\Psi(s) = \mathsf{E}\, s^N, \qquad |s| \leqslant 1,$$

тогда

$$\mathsf{E}\, N^{-k} = \int\limits_0^1 \frac{ds_1}{s_1} \int\limits_0^{s_1} \frac{ds_2}{s_2} \ldots \int\limits_0^{s_{k-1}} \frac{\Psi(s_k)}{s_k}\, ds_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. По теореме Фубини имеем

$$\mathsf{E}\, N^{-k} = \mathsf{E} \int\limits_0^1 \frac{s_1^{N-1}}{N^{k-1}}\, ds_1 = \int\limits_0^1 \mathsf{E}\, \frac{s_1^{N-1}}{N^{k-1}}\, ds_1 =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{ds_1}{s_1}\, \mathsf{E}\, \frac{s_1^N}{N^{k-1}} = \int\limits_0^1 \frac{ds_1}{s_1}\, \mathsf{E} \int\limits_0^{s_1} \frac{s_2^{N-1}}{N^{k-2}}\, ds_2 =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{ds_1}{s_1} \int\limits_0^{s_1} \mathsf{E}\, \frac{s_2^N}{N^{k-2}}\, \frac{ds_2}{s_2} = \ldots$$

$$\ldots = \int\limits_0^1 \frac{ds_1}{s_1} \int\limits_0^{s_1} \frac{ds_2}{s_2} \ldots \int\limits_0^{s_{k-1}} \mathsf{E}\, s_k^N \, \frac{ds_k}{s_k} =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{ds_1}{s_1} \int\limits_0^{s_1} \frac{ds_2}{s_2} \ldots \int\limits_0^{s_{k-1}} \frac{\Psi(s_k)}{s_k}\, ds_k, \qquad |s| \leqslant 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 3.2. *Пусть неотрицательная целочисленная случайная величина N имеет вид $N = M + 1$, где случайная величина M имеет биномиальное распределение вида*

$$\mathsf{P}\Big(M = k\Big) = \binom{n}{k} p^k\, q^{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n, \quad p \in (0,1), \quad q = 1 - p.$$

Тогда

$$\mathsf{E}\, N^{-1} = \frac{1 - q^{n+1}}{p(n+1)}, \quad \mathsf{E}\, N^{-2} = \frac{1}{p(n+1)} \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} p^i\, q^{n+1-i}\, \frac{1}{i}.$$

Доказательство. Производящая функция случайной величины N получается умножением производящей функции случайной величины M на s, поэтому имеем

$$\Psi_N(s) = \mathsf{E}\, s^N = s\,(ps + q)^n.$$

Далее применяем предыдущую Лемму 3.1, получим

$$\mathsf{E}\, N^{-1} = \int\limits_0^1 (ps + q)^n\, ds = \frac{1 - q^{n+1}}{p(n+1)}.$$

Далее, аналогично

$$\mathsf{E}\, N^{-2} = \int\limits_0^1 \frac{ds_1}{s_1} \int\limits_0^{s_1} (ps_2 + q)^n\, ds_2 =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{ds_1}{s_1}\, \frac{(ps_1 + q)^{n+1} - q^{n+1}}{p(n+1)} =$$

$$= \frac{1}{p(n+1)} \int\limits_0^1 \frac{ds_1}{s_1} \left(\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (ps_1)^i\, q^{n+1-i} - q^{n+1} \right) =$$

$$= \frac{1}{p(n+1)} \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} p^i\, q^{n+1-i} \int\limits_0^1 s_1^{i-1}\, ds_1 =$$

$$= \frac{1}{p(n+1)} \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n+1}{i} p^i\, q^{n+1-i}\, \frac{1}{i}.$$

Лемма доказана. □

Следствие 3.1. *В условиях предыдущей Леммы 3.2 при фиксированном* $p \in (0,1)$ *справедлива также формула*

$$\mathsf{E}\, N^{-2} = \frac{1}{p(n+1)} \sum_{i=0}^{n} \frac{q^{n-i} - q^{n+1}}{i+1} =$$

$$= \frac{1}{p^2 n^2} + O(n^{-3}), \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Доказательство следует из соотношения

$$\mathsf{E}\, N^{-2} = \int\limits_0^1 \frac{ds_1}{s_1} \frac{(ps_1 + q)^{n+1} - q^{n+1}}{p(n+1)} =$$

$$= \frac{q^{n+1}}{p(n+1)} \int\limits_0^{p/q} \sum_{i=0}^{n} (x + 1)^i \, dx = \frac{q^{n+1}}{p(n+1)} \sum_{i=0}^{n} \frac{q^{-i-1} - 1}{i+1} =$$

$$= \frac{1}{p(n+1)} \sum_{i=0}^{n} \frac{q^{n-i} - q^{n+1}}{i+1} = \frac{1}{p(n+1)} \sum_{i=0}^{n} \frac{q^{n-i}}{i+1} + O(n^{-3}) =$$

$$= \frac{1}{p(n+1)} \sum_{k=0}^{n} \frac{q^k}{1 + n - k} + O(n^{-3}) = \frac{1}{p(n+1)^2} \sum_{k=0}^{n} \frac{q^k}{1 - \frac{k}{n+1}} + O(n^{-3}) =$$

$$= \frac{1}{p(n+1)^2} \sum_{k=0}^{n} q^k \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{k}{n+1}\right)^l + O(n^{-3}) =$$

$$= \frac{1}{p(n+1)^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^l} \sum_{k=0}^{n} q^k k^l + O(n^{-3}) =$$

$$= \frac{1}{pn^2} \sum_{k=0}^{n} q^k + O(n^{-3}), \quad n \to \infty,$$

поскольку при любом натуральном l ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k k^l$$

сходится. Теперь утверждение Следствия следует из равенства

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{p} + O(n^{-3}), \quad n \to \infty.$$

□

Замечание 3.1. *Нетрудно видеть, что в условиях Леммы 3.2 справедлива формула*

$$\mathsf{E}\, N^{-2} \;=\; \frac{1}{p^2n^2} \;+\; \frac{1\;-\;3p}{p^3n^3} \;+\; O(n^{-4}), \quad n \;\to\; \infty.$$

Следствие 3.2. *Пусть случайная величина M_n имеет биномиальное распределение с параметрами $m(n-1)$, $n \;\geqslant\; 2$ и $p \;=\; 1/m$, где $m \;\geqslant\; 2$ – фиксированное натуральное число, тогда для случайной величины*

$$N_n \;=\; M_n \;+\; 1$$

справедливы равенства

$$\mathsf{E}\, N_n \;=\; n, \quad \mathsf{E}\, N_n^{-1} \;=\; \frac{m\big(1\;-\;(1\;-\;\frac{1}{m})^{m(n-1)+1}\big)}{m(n\;-\;1)\;+\;1} \;=\; \frac{1}{n} \;+\; \frac{m\;-\;1}{mn^2} \;+\; O(n^{-3}),$$

$$\mathsf{E}\, N_n^{-2} \;=\; \frac{1}{n^2} \;+ O(n^{-3}), \quad n \;\to\; \infty.$$

Замечание 3.2. *Нетрудно видеть, что в условиях Леммы 3.2 справедливы формулы (см. Замечание 3.1)*

$$\mathsf{E}\, N_n^{-2} \;=\; \frac{1}{n^2} \;+\; \frac{3(m\;-\;1)}{mn^3} \;+\; O(n^{-4}),$$

$$\mathsf{E}\left(\frac{n}{N_n} \;-\; 1\right) \;=\; \frac{m\;-\;1}{mn} \;+\; O(n^{-2}),$$

$$\mathsf{E}\left(\frac{n}{N_n} \;-\; 1\right)^2 \;=\; \frac{m\;-\;1}{mn} \;+\; O(n^{-2}), \quad n \;\to\; \infty.$$

Учитывая Следствие 3.2, Теорему 3.1 и Следствие 3.1, получаем следующий результат

Следствие 3.3. *Пусть случайная величина M_n имеет биномиальное распределение с параметрами $m(n-1)$, $n \;\geqslant\; 2$ и $p \;=\; 1/m$, где $m \;\geqslant\; 2$ – фиксированное натуральное число и*

$$N_n \;=\; M_n \;+\; 1.$$

Предположим также, что существуют числа $a(\theta)$, $b(\theta)$ такие, что справедливо соотношение

$$R_n^*(\theta) \;=\; \mathsf{E}_\theta\big(\delta_n(X_1,\ldots,X_n) \;-\; g(\theta)\big)^2 \;= \;\frac{a(\theta)}{n} \;+\; \frac{b(\theta)}{n^2},$$

тогда для асимптотического дефекта оценки $\delta_{N_n}(X_1,\ldots,X_{N_n})$ относительно оценки $\delta_n(X_1,\ldots,X_n)$ справедливо равенство

$$d(\theta) \;=\; \frac{m\;-\;1}{m}.$$

Лемма 3.3. *Пусть неотрицательная целочисленная случайная величина N имеет геометрическое распределение вида*

$$\mathsf{P}\Big(N \;=\; k\Big) \;=\; p\; q^{k-1}\;, \quad k \;=\; 1,2,\ldots\;, \quad p \;\in\; (0,1), \quad q \;=\; 1 \;-\; p,$$

тогда

$$\mathsf{E}\, N^{-1} \;=\; -\,\frac{p}{q}\;\log\;p, \qquad \mathsf{E}\, N^{-2} \;=\; \frac{p}{q}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{q^i}{i^2} \;=$$

$$=\;\frac{\pi^2 p}{6}\;+\;p^2\left(\frac{\pi^2}{6}\;-\;1\right)+p^2\log p\;+\;O(p^3\log p), \quad p\;\to\;0.$$

Доказательство. Производящая функция случайной величины N, как известно, равна

$$\Psi_N(s)\;=\;\mathsf{E}\, s^N\;=\;\frac{ps}{1\;-\;sq}.$$

Теперь, используя Лемму 3.1, имеем

$$\mathsf{E}\, N^{-1}\;=\;\int\limits_0^1\frac{p}{1-sq}\,ds\;=\;-\,\frac{p}{q}\;\log\;p.$$

Аналогично

$$\mathsf{E}\, N^{-2}\;=\;\int\limits_0^1\frac{ds_1}{s_1}\int\limits_0^{s_1}\frac{p\,ds_2}{1-s_2 q}\;=$$

$$=\;-\,\frac{p}{q}\int\limits_0^1\frac{\log\,(1\;-\;qs_1)}{s_1}\,ds_1.$$

Раскладывая логарифм в ряд, получим

$$\mathsf{E}\, N^{-2}\;=\;\frac{p}{q}\int\limits_0^1\sum_{i=1}^{\infty}\frac{s^{i-1}\,q^i}{i}\,ds\;=\;\frac{p}{q}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{q^i}{i^2}.$$

Далее, используя полученное выше равенство

$$\mathsf{E}\, N^{-2}\;=\;-\,\frac{p}{q}\int\limits_0^1\frac{\log\,(1\;-\;qs_1)}{s_1}\,ds_1,$$

имеем

$$\mathsf{E}\, N^{-2}\;=\;-\,\frac{p}{q}\int\limits_p^1\frac{\log\;t}{1\;-\;t}\,dt\;=\;-\frac{p}{q}\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_p^1 t^k\log\;t\;dt\;=$$

$$=-\,\frac{p}{q}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\int\limits_p^1\log\;t\;dt^{k+1}\;=\;\frac{p}{q}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}\left(p^{k+1}\log p\;+\;\frac{1}{k+1}\;-\;\frac{p^{k+1}}{k+1}\right)\;=$$

$$=\;\frac{p}{q}\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\;+\;p\log p\;-\;p\Big)\;+\;O(p^3\log p)\;=\;\frac{p}{q}\Big(\frac{\pi^2}{6}+\;p\log p\;-\;p\Big)\;+$$

$$+\;O(p^3\log p)\;=\;\frac{\pi^2 p}{6}\;+\;p^2\left(\frac{\pi^2}{6}\;-\;1\right)+p^2\log p\;+\;O(p^3\log p), \quad p\;\to\;0.$$

Лемма доказана. □

Следствие 3.4. *Пусть случайная величина N_n имеет геометрическое распределение с параметром $p = 1/n$, $n \geqslant 2$, $n \in \mathbb{N}$, тогда справедливы равенства*

$$\mathsf{E}\, N_n = n, \quad \mathsf{E}\, N_n^{-1} = \frac{\log n}{n-1} = \frac{\log n}{n} + \frac{\log n}{n^2} + O\Big(\frac{\log n}{n^3}\Big),$$

$$\mathsf{E}\, N_n^{-2} = \frac{\pi^2}{6n} - \frac{\log n}{n^2} + \frac{1}{n^2}\Big(\frac{\pi^2}{6} - 1\Big) + O\Big(\frac{\log n}{n^3}\Big), \quad n \to \infty.$$

Замечание 3.3. *Следствие 3.3 показывает, что возможны случаи, когда при условии*

$$\mathsf{E}\, N_n = n$$

нарушаются естественные соотношения

$$\mathsf{E}\, N_n^{-1} \sim \frac{1}{n}, \quad \mathsf{E}\, N_n^{-2} \sim \frac{1}{n^2}, \quad n \to \infty.$$

Лемма 3.4. *Пусть неотрицательная целочисленная случайная величина N имеет вид $N = M + 1$, где случайная величина M имеет пуассоновское распределение вида*

$$\mathsf{P}\Big(M = k\Big) = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

тогда для любого $\gamma > 0$ справедливы равенства

$$\mathsf{E}\, N^{-1} = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} + O(\lambda^{-\gamma}), \quad \lambda \to \infty,$$

$$\mathsf{E}\, N^{-2} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \int\limits_0^{\lambda} \frac{e^s - 1}{s}\, ds = e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i \cdot i!} =$$

$$= \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k k} \int_0^{\lambda} e^{-x}\, x^k\, dx = \frac{1}{\lambda^2} + O(\lambda^{-3}), \quad \lambda \to \infty.$$

Доказательство. Производящая функция случайной величины N получается умножением производящей функции случайной величины M на s. Поэтому имеем

$$\Psi_N(s) = s\, e^{\lambda\,(s-1)}.$$

Аналогично предыдущему, применяя Лемму 3.1, получаем

$$\mathsf{E}\, N^{-1} = \int\limits_0^1 e^{\lambda\,(s-1)}\, ds = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

$$\mathsf{E}\, N^{-2} = \int\limits_0^1 \frac{ds_1}{s_1} \int\limits_0^{s_1} e^{\lambda(s_2 - 1)} ds_2 = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \int\limits_0^{\lambda} \frac{e^s - 1}{s}\, ds =$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i \cdot i!}.$$

Далее, делая замену переменной в определенном интеграле и раскладывая подынтегральную функцию в ряд, получим

$$\mathsf{E}\, N^{-2} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \int\limits_0^{\lambda} \frac{e^s - 1}{s}\, ds = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \int\limits_0^{1} \frac{e^{\lambda t} - 1}{t}\, dt =$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_0^{1} \Big(e^{\lambda t} - 1\Big)(1 - t)^k\, dt.$$

Теперь, интегрируя по частям, последнее выражение можно записать в виде

$$\mathsf{E}\, N^{-2} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \int\limits_0^{1} e^{\lambda t}\, (1 - t)^{k+1}\, dt = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\, \lambda^k} \int\limits_0^{\lambda} e^{-x}\, x^k\, dx.$$

Теперь утверждение Леммы следует из соотношений

$$\int_0^{\lambda} e^{-x} x\, dx = 1 - e^{-\lambda} - \lambda\, e^{-\lambda} = 1 + O(\lambda^{-1}),$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\, \lambda^{k-2}} \int\limits_0^{\lambda} e^{-x}\, x^k\, dx = O(1), \quad \lambda \to \infty.$$

Последнее соотношение следует из равенства

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\, \lambda^{k-2}} \int\limits_0^{\lambda} e^{-x}\, x^k\, dx = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+2)\, \lambda^m} \int\limits_0^{\lambda} e^{-x}\, x^{m+2}\, dx =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+2)(m+3)\, \lambda^m} \Big(e^{-\lambda}\lambda^{m+3} + \int\limits_0^{\lambda} e^{-x}\, x^{m+3}\, dx\Big) =$$

$$= \lambda^3\, e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+2)(m+3)} +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+2)(m+3)} \int\limits_0^{\lambda} e^{-x} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^m x^3\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \lambda^3\, e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + 1)^2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + 1)^2} \cdot \int\limits_0^{\infty} e^{-x}\, x^3\, dx = O(1), \quad \lambda \to \infty.$$

Лемма доказана. □

Замечание 3.4. *Нетрудно видеть, что в условиях Леммы 3.4 справедлива формула*

$$\mathsf{E}\, N^{-2} \;=\; \frac{1}{\lambda^2} \;+\; \frac{1}{\lambda^3} \;+\; O(\lambda^{-4}), \quad \lambda \;\to\; \infty.$$

Следствие 3.5. *Пусть случайная величина M_n имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda \;=\; n \;-\; 1, \quad n \;\geqslant\; 2, \quad n \;\in\; \mathbb{N}$, и*

$$N_n \;=\; M_n \;+\; 1.$$

Тогда справедливы равенства

$$\mathsf{E}\, N_n \;=\; n, \quad \mathsf{E}\, N_n^{-1} \;=\; \frac{1}{n} \;+\; \frac{1}{n^2} \;+\; O\Big(\frac{1}{n^3}\Big),$$

$$\mathsf{E}\, N_n^{-2} \;=\; \frac{1}{n^2} \;+\; O\Big(\frac{1}{n^3}\Big), \quad n \;\to\; \infty.$$

Замечание 3.5. *Нетрудно видеть, что в условиях Леммы 3.4 справедливы формулы (см. Замечание 3.4)*

$$\mathsf{E}\, N_n^{-2} \;=\; \frac{1}{n^2} \;+\; \frac{3}{n^3} \;+\; O(n^{-4}),$$

$$\mathsf{E}\,\Big(\frac{n}{N_n} \;-\; 1\Big) \;=\; \frac{1}{n} \;+\; O(n^{-2}),$$

$$\mathsf{E}\,\Big(\frac{n}{N_n} \;-\; 1\Big)^2 \;=\; \frac{1}{n} \;+\; O(n^{-2}), \quad n \;\to\; \infty.$$

Следствие 3.6. *Пусть случайная величина M_n имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda \;=\; n-1, \quad n \;\geqslant\; 2$ и*

$$N_n \;=\; M_n \;+\; 1.$$

Предположим также, что существуют числа $a(\theta),\ b(\theta)$ такие, что справедливо соотношение

$$R_n^*(\theta) \;=\; \mathsf{E}_\theta\big(\delta_n(X_1,\ldots,X_n) \;-\; g(\theta)\big)^2 \;=$$

$$=\; \frac{a(\theta)}{n} \;+\; \frac{b(\theta)}{n^2},$$

тогда для асимптотического дефекта оценки $\delta_{N_n}(X_1,\ldots,X_{N_n})$ относительно оценки $\delta_n(X_1,\ldots,X_n)$ справедливо равенство

$$d(\theta) \;=\; 1.$$

Следствие 3.7. *Пусть случайная величина N_n имеет геометрическое распределение с параметром $p \;=\; 1/n, \quad n \;\geqslant\; 2$. Предположим также, что существуют числа $a(\theta),\ b(\theta)$ такие, что для функции риска оценки $\delta_n(X_1,\ldots,X_n)$ справедливо соотношение*

$$R_n^*(\theta) \;=\; \mathsf{E}_\theta\big(\delta_n(X_1,\ldots,X_n) \;-\; g(\theta)\big)^2 \;=$$

$$= \frac{a(\theta)}{n} + \frac{b(\theta)}{n^2},$$

тогда для функции риска оценки $\delta_{N_n}(X_1, \ldots, X_{N_n})$ *справедливо равенство*

$$R_n(\theta) = \mathsf{E}_\theta\big(\delta_{N_n}(X_1, \ldots, X_{N_n}) - g(\theta)\big)^2 =$$

$$= a(\theta)\ \mathsf{E}\ N_n^{-1} + b(\theta)\ \mathsf{E}\ N_n^{-2} =$$

$$= \frac{a(\theta)\ \log n}{n} + \frac{\pi^2\ b(\theta)}{6n} + \frac{(a(\theta) - b(\theta))\ \log n}{n^2} +$$

$$+ \frac{b(\theta)}{n^2}\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) + O\Big(\frac{\log n}{n^3}\Big), \quad n \to \infty.$$

Доказательство Следствия 3.7 непосредственно следует из утверждений Следствия 2.1 и Следствия 3.4.

4. Случай нормальной выборки

В этом разделе иллюстрируются Следствия 3.3, 3.6, 3.7 и Теорема 3.2 из работы [1] рассмотрением случая, когда исходная выборка $X_1, \ldots, X_n$ представляет собой независимые одинаково нормально распределенные с параметрами $(\theta,\ \sigma^2)$ случайные величины. В этом разделе рассмотрена также байесовская постановка задачи оценивания. Предположим сначала, что требуется оценить функцию

$$g(\theta) = \theta^2$$

в присутствии мешающего параметра σ^2. Оценка максимального правдоподобия в этом случае имеет вид (см. книгу [3])

$$\delta_{0n}(X_1, \ldots, X_n) = (\bar{X}_n)^2,$$

где

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Если σ^2 известно, то несмещенная оценка с минимальной дисперсией для функции $g(\theta)$, основанная на n наблюдениях, есть

$$\delta_{1n}(X_1, \ldots, X_n) = (\bar{X}_n)^2 - \frac{\sigma^2}{n}.$$

Обе эти оценки являются частными ($c = 0,\ \ c = 1$) случаями оценок вида

$$\delta_{cn}(X_1, \ldots, X_n) = (\bar{X}_n)^2 - \frac{c\ \sigma^2}{n}, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Функция риска этих оценок имеет вид (см. [4], стр. 302)

$$R^*_{cn}(\theta) = \mathsf{E}_\theta\ (\delta_{cn}(X_1, \ldots, X_n) - \theta^2)^2 = \frac{4\ \sigma^2\theta^2}{n} + \frac{(c^2 - 2c + 3)\ \sigma^4}{n^2}. \tag{4.2}$$

Если неизвестно, то несмещенная оценка с минимальной дисперсией для функции $g(\theta)$, основанная на n наблюдениях, есть

$$\delta_n(X_1, \ldots, X_n) \;=\; (\bar{X}_n)^2 \;-\; \frac{S_n^2}{n}, \tag{4.3}$$

где

$$S_n^2 \;=\; \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i \;-\; \bar{X}_n)^2.$$

Используя независимость $\bar{X}_n$ и S_n^2 нетрудно получить, что функция риска оценки δ_n имеет вид

$$R_n^*(\theta) \;=\; \mathsf{E}_\theta \, (\delta_n(X_1, \ldots, X_n) \;-\; \theta^2)^2 \;=\; \mathsf{D}_\theta \, \bar{X}_n^2 + \frac{1}{n^2}\, \mathsf{D}_\theta \, S_n^2 \;=\; \frac{4\sigma^2\theta^2}{n} + \frac{4\sigma^4}{n^2}. \tag{4.4}$$

Рассмотрим теперь оценки $\delta_{cn}(X_1, \ldots, X_n)$, $\delta_n(X_1, \ldots, X_n)$ основанные на выборке случайного объема N_n. Согласно Следствию 2.1 из работы [1] имеем

$$R_{cn}(\theta) \;=\; \mathsf{E}_\theta \, (\delta_{cN_n}(X_1, \ldots, X_{N_n}) \;-\; \theta^2)^2 \;=$$

$$=\; 4\sigma^2\theta^2 \, \mathsf{E} \, N_n^{-1} \;+\; \big(c^2 \;-\; 2c \;+\; 3\big)\, \sigma^4 \, \mathsf{E} \, N_n^{-2}, \tag{4.5}$$

$$R_n(\theta) \;=\; \mathsf{E}_\theta \, (\delta_{N_n}(X_1, \ldots, X_{N_n}) \;-\; \theta^2)^2 \;=\; 4\sigma^2\theta^2 \, \mathsf{E} \, N_n^{-1} \;+\; 4\sigma^4 \, \mathsf{E} \, N_n^{-2}. \tag{4.6}$$

Лемма 4.1. *Пусть случайная величина M_n имеет биномиальное распределение с параметрами $m(n-1)$, $n \geqslant 2$ и $p = 1/m$, где $m \geqslant 2$ – фиксированное натуральное число,*

$$N_n \;=\; M_n \;+\; 1.$$

Тогда асимптотические дефекты оценок $\delta_{cN_n}(X_1, \ldots, X_{N_n})$, $\delta_{N_n}(X_1, \ldots, X_{N_n})$ относительно оценок $\delta_{cn}(X_1, \ldots, X_n)$, $\delta_n(X_1, \ldots, X_n)$ соответственно равны

$$d_c(\theta) \;=\; \frac{m \;-\; 1}{m}, \quad d(\theta) \;=\; \frac{m \;-\; 1}{m}.$$

Асимптотический дефект оценки $\delta_{cn}(X_1, \ldots, X_n)$ относительно оценки $\delta_n(X_1, \ldots, X_n)$ равен

$$d(c,\ \theta) \;=\; \frac{(c^2 \;-\; 2c \;-\; 1)\sigma^2}{4\theta^2}.$$

Асимптотический дефект оценки $\delta_{cN_n}(X_1, \ldots, X_{N_n})$ относительно оценки $\delta_{N_n}(X_1, \ldots, X_{N_n})$ также равен

$$d(c,\ \theta) \;=\; \frac{(c^2 \;-\; 2c \;-\; 1)\sigma^2}{4\theta^2}.$$

Доказательство непосредственно следует из Следствия 3.3, Теоремы 3.1 и Следствия 4.2 из работы [1].

Лемма 4.2. *Пусть случайная величина M_n имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = n - 1$, $n \geqslant 2$, $n \in \mathbb{N}$,*

$$N_n \;=\; M_n \;+\; 1.$$

Тогда асимптотические дефекты оценок $\delta_{cN_n}(X_1, \ldots, X_{N_n})$, $\delta_{N_n}(X_1, \ldots, X_{N_n})$ *относительно оценок* $\delta_{cn}(X_1, \ldots, X_n)$, $\delta_n(X_1, \ldots, X_n)$ *соответственно равны*

$$d_c(\theta) = 1, \quad d(\theta) = 1.$$

Асимптотический дефект оценки $\delta_{cN_n}(X_1, \ldots, X_{N_n})$ *относительно оценки* $\delta_{N_n}(X_1, \ldots, X_{N_n})$ *равен*

$$d(c, \theta) = \frac{(c^2 - 2c - 1)\sigma^2}{4\theta^2}.$$

Доказательство непосредственно следует из Следствия 4.6, Теоремы 3.1, Следствия 3.1 и Следствия 4.4 из работы [1]. Непосредственным следствием Теоремы 3.2 и Следствий 4.2., 4.5 ([1]) является следующая Теорема.

Теорема 4.1. *Пусть случайная величина* M_{n1} *имеет биномиальное распределение с параметрами* $m(n-1)$, $n \geqslant 2$ *и* $p = 1/m$, *где* $m \geqslant 2$ *– фиксированное натуральное число и*

$$N_{n1} = M_{n1} + 1.$$

Пусть также случайная величина M_{n2} *имеет распределение Пуассона с параметром* $\lambda = n - 1$, $n \geqslant 2$, $n \in \mathbb{N}$, *и*

$$N_{n2} = M_{n2} + 1.$$

Предположим, что случайные величины N_{ni}, $i = 1, 2$ *не зависят от наблюдений* $X_1, X_2, \ldots$. *Тогда для асимптотического дефекта оценки* $\delta_{cn}^{(2)} \equiv \delta_{cN_{n2}}(X_1, \ldots, X_{N_{n2}})$ *относительно оценки* $\delta_{cn}^{(1)} \equiv \delta_{cN_{n1}}(X_1, \ldots, X_{N_{n1}})$ *справедливо равенство*

$$d_{21}(\theta) = -\frac{1}{m}.$$

Теорема 4.2. *Пусть случайная величина* N_n *имеет геометрическое распределение с параметром* $p = 1/n$, $n \geqslant 2$. *Тогда для функции риска оценки* $\delta_{cN_n}(X_1, \ldots, X_{N_n})$ *справедливо равенство*

$$R_{cn}(\theta) = \mathsf{E}_\theta\big(\delta_{cN_n}(X_1, \ldots, X_{N_n}) - \theta^2\big)^2 =$$

$$= \frac{4\sigma^2\theta^2 \log n}{n} + \frac{\pi^2 (c^2 - 2c + 3)\sigma^4}{6n} + \frac{(4\sigma^2\theta^2 - (c^2 - 2c + 3)\sigma^4) \log n}{n^2} +$$

$$+ \frac{(c^2 - 2c + 3)\sigma^4}{n^2}\Big(\frac{\pi^2}{6} - 1\Big) + O\Big(\frac{\log n}{n^3}\Big), \quad n \to \infty.$$

Доказательство Теоремы 4.2 следует из Следствия 4.7 ([1]).

Замечание 4.1. *Рассмотрим теперь байесовскую постановку. Пусть исходная выборка* $X_1, \ldots, X_n$ *представляет собой независимые одинаково нормально распределенные случайные величины с параметрами*

$$\mathsf{E}_\theta\, X_1 = \theta, \quad \mathsf{D}_\theta\, X_1 = \sigma^2.$$

Предположим, что дисперсия σ^2 *известна и рассмотрим оптимальную несмещенную оценку*

$$\bar{X}_n \;=\; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

функции

$$g(\theta) \;=\; \theta.$$

Ее функция риска имеет вид

$$R_n^*(\theta) \;=\; \mathsf{E}_\theta\,(\bar{X}_n \;-\; \theta)^2 \;=\; \mathsf{D}_\theta\,\bar{X}_n \;=\; \frac{\sigma^2}{n}.$$

Предположим теперь, что параметр θ *имеет априорное нормальное распределение с параметрами* $\mu \in \mathbb{R}$ *и* $b^2 > 0$. *Тогда смещенная байесовская оценка параметра* θ *имеет вид (см. [4], стр. 222)*

$$\theta_n \;=\; \frac{nb^2\bar{X}_n \;+\; \sigma^2\mu}{nb^2 \;+\; \sigma^2}.$$

Нетрудно видеть, что функция риска этой оценки может быть записана в виде (см. [4], формулы (6.2) и (6.3))

$$R_n(\theta) \;=\; \mathsf{E}_\theta\,(\theta_n \;-\; \theta)^2 \;=\; \frac{\sigma^2}{(nb^2 \;+\; \sigma^2)^2}\,\big(nb^4 \;+\; \sigma^2(\theta \;-\; \mu)^2\big) \;=$$

$$=\; \frac{\sigma^2}{n} \;+\; \frac{\sigma^4}{n^2b^4}\,\big((\theta \;-\; \mu)^2 \;-\; 2b^2\big) \;+\; O(n^{-3}).$$

Таким образом, при естественных условиях на случайный объем выборки N_n *асимптотический дефект оценки* θ_{N_n} *относительно наилучшей оценки* $\bar{X}_n$ *при неслучайном объеме выборки, например, в пуассоновском случае, равен*

$$d \;=\; \frac{\sigma^2}{b^4}\,\big((\theta \;-\; \mu)^2 \;-\; 2b^2\big) \;+\; 1.$$

Для биномиального случая, соответственно, имеем

$$d \;=\; \frac{\sigma^2}{b^4}\,\big((\theta \;-\; \mu)^2 \;-\; 2b^2\big) \;+\; \frac{m \;-\; 1}{m}.$$

В геометрическом случае для функции риска оценки $\bar{X}_{N_n}$ *справедливо представление*

$$R_{N_n}^*(\theta) \;=\; \mathsf{E}_\theta\,(\bar{X}_{N_n} \;-\; \theta)^2 \;=\; \frac{\sigma^2\log n}{n} \;+\; \frac{\sigma^2\log n}{n^2} \;+\; O\Big(\frac{\log n}{n^3}\Big).$$

Замечание 4.2. *Рассмотрим теперь байесовскую постановку для биномиального распределения. Пусть исходная выборка* $X_1,\ldots,X_n$ *представляет собой независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения* 0

и 1 *с вероятностями* $\theta \in (0,1)$ *и* $1 - \theta$ *соответственно. Оптимальная несмещенная оценка для параметра* θ *есть*

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Ее функция риска имеет вид

$$R_n^*(\theta) = \mathsf{E}_\theta\, (\bar{X}_n - \theta)^2 = \mathsf{D}_\theta\, \bar{X}_n = \frac{\theta(1 - \theta)}{n}.$$

Предположим теперь, что параметр θ *имеет априорное бета-распределение с параметрами* (a,b), $a > 0$, $b > 0$. *Тогда байесовская оценка параметра* θ *имеет вид (см. [4], стр. 221)*

$$\hat{\theta}_n = \frac{a + n\bar{X}_n}{a + b + n}.$$

Нетрудно видеть, что функция риска этой оценки может быть записана в виде

$$R_n(\hat{\theta}) = \mathsf{E}_\theta\, (\hat{\theta}_n - \theta)^2 = \frac{1}{(a + b + n)^2} \Big(n\theta(1 - \theta) + \big(a(1 - \theta) - \theta b\big)^2 \Big) =$$

$$= \frac{\theta(1 - \theta)}{n} + \frac{\Big(\big(a(1 - \theta) - \theta b\big)^2 - \theta(1 - \theta)2(a + b)\Big)}{n^2} + O(n^{-3}).$$

Таким образом, при естественных условиях на случайный объем выборки N_n *асимптотический дефект оценки* θ_{N_n} *относительно наилучшей оценки* $\bar{X}_n$ *при неслучайном объеме выборки, например, в пуассоновском случае равен*

$$d(\theta) = \frac{\Big(\big(a(1 - \theta) - \theta b\big)^2 - \theta(1 - \theta)2(a + b)\Big)}{\theta(1 - \theta)} + 1.$$

Если $a = b$ *и* $\theta = 1/2$, *то эта формула упрощается и*

$$d(1/2) = 1 - 4a.$$

Если случайный объем выборки N_n *имеет биномиальное распределение, то соответствующий асимптотический дефект равен*

$$d(\theta) = \frac{\Big(\big(a(1 - \theta) - \theta b\big)^2 - \theta(1 - \theta)2(a + b)\Big)}{\theta(1 - \theta)} + \frac{m - 1}{m}.$$

В случае $a = b$ *и* $\theta = 1/2$, *имеем*

$$d(1/2) = \frac{m - 1}{m} - 4a.$$

В геометрическом случае для функции риска оценки $\bar{X}_{N_n}$ *справедливо представление*

$$R_{N_n}^*(\theta) = \mathsf{E}_\theta\, (\bar{X}_{N_n} - \theta)^2 = \frac{\theta(1 - \theta)\log n}{n} + \frac{\theta(1 - \theta)\log n}{n^2} + O\Big(\frac{\log n}{n^3}\Big).$$

Заключение

В работе получены асимптотические формулы для обратных моментов биномиальной, Пуассоновской и геометрической случайных величин. Рассмотрены случаи точечного оценивания неизвестного параметра, основанные на статистиках, построенных по выборкам случайного объема. С помощью понятия дефекта проведено асимптотическое сравнение качества таких процедур. Получены явные формулы для асимптотического дефекта, имеющего смысл необходимого добавочного числа наблюдений. Подробно рассмотрены случаи, когда случайный объем выборки имеет распределение Пуассона, биномиальное и геометрическое распределения. Рассмотрен случай нормальной выборки и байесовской постановки задачи точечного оценивания.

Список литературы

[1] Бенинг В.Е. О дефекте некоторых оценок, основанных на выборках случайного объема // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 1. С. 5–14.

[2] Hodges J.L., Lehmann E.L. Deficiency // Annals of Mathematical Statistics. 1970. Vol. 41, № 5. Pp. 783–801.

[3] Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1976. 648 с.

[4] Леман Э. Теория точечного оценивания // М.: Наука, ФИЗМАТЛИТ, 1991. 444 с.

[5] Bening V.E. Asymptotic theory of testing statistical hypotheses: efficient statistics, optimality, power loss, and deficiency. VSP, Utrecht, 2000. 277 p.

Библиографическая ссылка

Бенинг В.Е. Об асимптотическом поведении обратных моментов некоторых случайных величин // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 2. С. 47–65.

Сведения об авторах

1. **Бенинг Владимир Евгеньевич**
профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, старший научный сотрудник ИПИ РАН.

Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ им. М.В. Ломоносова. E-mail: bening@yandex.ru.

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF INVERSE MOMENTS OF SOME DISCRETE RANDOM VARIABLES

Bening Vladimir Evgenyevich
Professor of Mathematical Statistics department,
Lomonosov Moscow State University
Russia, 119992, Moscow, GSP-1, Vorobyovi gory, Lomonosov MSU.
E-mail: bening@yandex.ru

Received 09.06.2015, revised 12.06.2015.

In the paper asymptotic behavior of inverse moments of some discrete random variables are considered. General theorems concerning the asymptotic deficiencies of statistical procedures based on the sample of random size are proved. Examples concerning point estimation of given parametric function based on the samples with random and nonrandom sizes are presented.

Keywords: inverse moment, point estimator, asymptotic deficiency, sample with random size, Poisson distribution, binomial distribution.

Bibliographic citation

Bening V.E. Asymptotic behavior of inverse moments of some discrete random variables. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2015, no. 2, pp. 47–65. (in Russian)