УДК 519.216.8,519.216.22

УСЛОВИЯ КОМПАКТНОСТИ СЕМЕЙСТВА МЕР ГИЛЬБЕРТОВОЗНАЧНЫХ МАРТИНГАЛОВ

Лаврентьев В.В., Назаров Л.В.
МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва

Поступила в редакцию 04.03.2015, после переработки 20.03.2015.

В данной работе получены условия относительной компактности семейства мер локально квадратично интегрируемых мартингалов со значениями в гильбертовом пространстве, а также некоторые условия плотности семейства распределений в банаховом пространстве.

Ключевые слова: мартингалы, компактность мер, гильбертово пространство, банахово пространство, плотные семейства распределений.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 2. С. 67–73.

Введение

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – полное вероятностное пространство и $(\mathbb{E}, \mathcal{B}(\mathbb{E}))$ – сепарабельное банахово пространство с σ-алгеброй борелевских множеств (относительно сильной топологии, порожденной нормой $\|\cdot\|$). Через $\mathbb{H}$ обозначим действительное сепарабельное гильбертово пространство. Далее будем предполагать, что все вероятностные меры определены на $(\mathbb{E}, \mathcal{B}(\mathbb{E}))$ (или $(\mathbb{H}, \mathcal{B}(\mathbb{H}))$.

Напомним (см. [1], [2]), что семейство вероятностных мер называется *относительно компактным,* если любая последовательность мер из этого семейства содержит подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторой вероятностной мере (хотя может и не принадлежащей исходному семейству).

Проверка относительной компактности не совсем простое дело, поэтому напомним еще одно определение. Семейство мер $\mathcal{P} = \{P_\alpha; \alpha \in \mathcal{U}\}$ называется *плотным,* если для каждого $\varepsilon > 0$ существует компакт $K \subseteq \mathbb{E}$ такой, что

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{U}} P_\alpha(\mathbb{E} \setminus K) \le \varepsilon.$$

Напомним также теорему Прохорова о том, что семейство мер на полном сепарабельном метрическом пространстве (в частности на сепарабельном банаховом пространстве) относительно компактно тогда и только тогда, когда оно является плотным [1].

1. Обозначения

Будем предполагать, что на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ выделено семейство $F = (\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$ σ-алгебр, удовлетворяющих стандартным условиям, т.е. $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, s \le t, \quad \mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$ и $\mathcal{F}_0$ пополнена P-нулевыми множествами из $\mathcal{F}$.

Через $(D(E), \mathcal{D})$ будем обозначать измеримое пространство непрерывных справа и имеющих пределы слева Е-значных функций с топологией Скорохода. Запись $X = (X_t, \mathcal{F}_t; \mathbb{E})$ используется для обозначения F-согласованного случайного процесса $(X_t)_{t\geq 0}$ с траекториями из пространства $D(E)$. Для некоторых множеств случайных процессов $X = (X_t, \mathcal{F}_t; \mathbb{H}), X_0 = 0$ введем следующие обозначения:

$\mathcal{M}(\mathbb{E})$ – равномерно интегрируемые мартингалы, т.е. такие процессы X, что семейство величин $\{\|X_t\| : t \in \mathbb{R}_+\}$ равномерно интегрируемо и $E(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ при $s \leq t$ ($\int_A X_t dP = \int_A X_s dP$ для любого $A \in \mathcal{F}_s$);

$\mathcal{M}^2(\mathbb{E}) \equiv \{X \in \mathcal{M}(\mathbb{E}) : \sup_t E\|X_t\|^2 < \infty\}$ – квадратично интегрируемые мартингалы;

$\mathcal{V}(\mathbb{E})$ – процессы ограниченной вариации, т.е. P-п.н.

$$\int_0^\infty \|dX_s\| \equiv \sup_n \{\sum_{i=1}^n \|X_{t_i} - X_{t_{i-1}}\| : 0 = t_0 < t_1 < ... < t_n\} < \infty;$$

$\mathcal{A}(\mathbb{E}) \equiv \{X \in \mathcal{V}(\mathbb{H}) : E\int_0^\infty \|dX_s\| < \infty\}$ – процессы интегрируемой вариации;

$\mathcal{V}^+(\mathbb{R})$ – множество неубывающих (по t) процессов X таких, что $X_t < \infty$ (P-п.н.), $t > 0$;

$\mathcal{A}^+(\mathbb{R}) \equiv \{X \in \mathcal{V}^+(\mathbb{R}) : EX_\infty < \infty\}$, где $X_\infty \equiv \lim_{t\to\infty} X_t$.

Если $\mathcal{K}(\mathbb{E})$ – некоторый класс случайных процессов, то через $\mathcal{K}_{loc}(\mathbb{E})$ будем обозначать множество процессов $X = (X_t, \mathcal{F}; \mathbb{E})$, для каждого из которых существует (локализующая) неубывающая последовательность моментов остановки $\tau_n \uparrow \infty$ (P-п.н.) таких, что остановленный процесс $X^{\tau_n} = (X_{t\wedge\tau_n}, \mathcal{F}_t; \mathbb{E}) \in \mathcal{K}(\mathbb{E})$ для любого $n \geq 1$.

Пусть $M \in \mathcal{M}^2_{loc}(\mathbb{H})$, тогда через $< M >$ будем обозначать действительный предсказуемый возрастающий процесс такой, что $\|M\|^2 - < M >$ – локальный мартингал, т.е. $< M >$ – компенсатор $\|M\|^2$. Определим также набор предсказуемых действительных процессов локально интегрируемой вариации $(< m_i, m_j >)_{i,j\geq 1}$ таких, что $m_i m_j - < m_i, m_j >$ – локальный мартингал, где $m_i = (e_i, M), \{e_i\}$ – ортонормированный базис в $\mathbb{H}$.

2. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть $\xi^n, n \geq 1$ – последовательность случайных величин со значениями в сепарабельном банаховом пространстве $\mathbb{E}$ и выполнены следующие условия:*

а) для любого $\eta > 0$ существует такое $a > 0$, что $\sup_n P\{\|\xi^n\| > a\} < \eta$,

в) для любых $\eta > 0, \delta > 0$ существует такое конечномерное подпространство $\mathbb{G} \subset \mathbb{E}$, что $\sup_n P\{\inf(\|\xi^n - g\| : g \in \mathbb{G}) > \delta\} < \eta$.

Тогда семейство распределений $\mathcal{L}(\xi^n)$ случайных величин $\xi^n, n \geq 1$ плотно в $(\mathbb{E}, \mathcal{B}(\mathbb{E}))$.

Теорема 2. *Пусть $M^n \in \mathcal{M}^2_{loc}(\mathbb{H}), n \geq 1$ и для всякого $t > 0$*

$$< M^n >_t \xrightarrow{P} f(t), \tag{1}$$

$$< m_i^n >_t \xrightarrow{P} f_i(t), \quad i \geq 1, \tag{2}$$

где $f(t), f_i(t), i \geq 1$ – действительные непрерывные детерминированные неотрицательные функции такие, что $f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(t)$.

Тогда семейство мер процессов $M^n, n \geq 1$ относительно компактно в $(D(H), \mathcal{D})$.

3. Вспомогательные факты

Неравенство Ленгляра. *Пусть неотрицательный процесс $X = (X_t, \mathcal{F}_t; \mathbb{R})$ доминируется процессом $Y \in \mathcal{A}_{loc}^{+}(\mathbb{R})$, т.е. $EX_\tau \leq EY_\tau$ для любого конечного момента остановки τ.*

a) Если Y – предсказуемый процесс, то для любых $a > 0$, $b > 0$ и всякого конечного момента остановки τ

$$P(\sup_{t \leq \tau} X_t > a) \leq \frac{1}{a} E(Y_\tau \wedge b) + P(Y_\tau \geq b). \tag{3}$$

b) Если $\sup_t \Delta Y_t \leq c$ P-п.н. для некоторого $c > 0$, то для любых $a > 0, b > 0$

$$P(\sup_{t \leq \tau} X_t > a) \leq \frac{1}{a} E(Y_\tau \wedge (b + c)) + P(Y_\tau \geq b). \tag{4}$$

Следствие из неравенства Ленгляра. *Пусть для последовательности процессов (X^n, Y^n), $n \geq 1$, выполнены перечисленные выше условия, причем $Y^n, n \geq 1$ – предсказуемые процессы или для любого конечного момента остановки (относительно $\bigcap_{n \geq 1} F^n$) семейство случайных величин*

$$(\sup_{0 < s \leq t} |\Delta Y_s^n|)_{n \geq 1}$$

равномерно интегрируемо.

Тогда для любого конечного момента остановки τ

$$Y_\tau^n \xrightarrow{P} 0 \Rightarrow \sup_{0 < t \leq \tau} X_t^n \xrightarrow{P} 0. \tag{5}$$

Доказательства неравенства и следствия содержатся в работе [3].

4. Доказательство теорем

4.1 Доказательство теоремы 1

Согласно замечанию на с. 49 в [4] семейство распределений $\mathcal{L}(\xi^n), n \geq 1$, плотно в $(\mathbb{E}, \mathcal{B}(\mathbb{E}))$ тогда и только тогда, когда для любых $\varepsilon > 0, \delta > 0$ существует такое множество $S_{\varepsilon,\delta}$, состоящее из конечного числа шаров радиуса δ, что

$$P(\xi^n \in S_{\varepsilon,\delta}) > 1 - \varepsilon, \quad n \geq 1.$$

Таким образом, достаточно положить $\eta = \varepsilon/2$ и

$$S_{\varepsilon,2\delta} = \{x \in \mathbb{E} : \|x\| \leq a, \inf(\|x - g\| : g \in \mathbb{G}) \leq \delta\}.$$

4.2 Доказательство теоремы 2

В силу теоремы 3 в [5] и теоремы 1 в [6] достаточно проверить выполнение следующих условий:

a) для любых $T < \infty, k \geq 1$ и $0 \leq t_1 < ... < t_k \leq T$ семейство распределений случайных векторов $(M^n_{t_1}, ..., M^n_{t_k})$ плотно в $(\mathbb{H}^k, \mathcal{B}(\mathbb{H}^k))$, где $\mathbb{H}^k \equiv \mathbb{H} \ltimes ... \ltimes \mathbb{H}$.

b) для любых $T < \infty$ и $\varepsilon > 0, \eta > 0$ существуют такие n_0 и $\delta > 0$, что для любых моментов остановки (относительно F^n) $\tau^n \leq T$ (P-п.н.)

$$\sup_{n \geq n_0} P(\sup_{0 \leq s \leq \delta} \|M^n_{\tau^n + s} - M^n_{\tau^n}\| > \varepsilon) < \eta.$$

Условие a) достаточно проверить для $k = 1$, т.е. фиксируем $t = T$. Согласно теореме 1 достаточно показать, что для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ существует $a > 0$ и конечномерное пространство $\mathbb{G} \subset \mathbb{H}$ такие, что

$$P(\|M^n_T\| > a) < \varepsilon, \tag{6}$$

$$P(\inf_{g \in G} \|M^n_T - g\|. > \delta) < \varepsilon. \tag{7}$$

Соотношение (6) следует из условия (2) и неравенства Ленгляра (см. доказательство леммы 6 в [7]).

Для доказательства соотношения (7) введем следующие обозначения ($k \geq 1$):

$$\bar{X}^k \equiv X - \sum_{i=1}^{n} (X, e_i) e_i, \quad X \in \mathbb{H}.$$

$\mathbb{G}_k$ – k-мерное пространство, порожденное первыми k векторами из ортонормированного базиса $\{e_i\}$ в $\mathbb{H}$.

Так как $\inf(\|M^n_T - g\| : g \in G_k) = \|\bar{M}^{nk}\|$, то соотношение (7) можно переписать в следующем виде

$$P(\|\bar{M}^{nk}_T\| > \delta) < \varepsilon.$$

В силу неравенства Ленгляра (4), для любых $b > 0$

$$\delta^2 P(\|\bar{M}^{nk}_T\| > \delta) \leq E(< \bar{M}^{nk} >_T \wedge b) + P(< \bar{M}^{nk} >_T \geq b).$$

Так как $< M^n >_T = \sum_{i=1}^{k} < m^n_i >_T + < \bar{M}^{nk} >_T$, то из условий (1) и (2) следует, что

$$< \bar{M}^{nk} >_T \xrightarrow{P} \sum_{i=k+1}^{\infty} f_i(T) = r_k.$$

Заметим, что для любых $k \geq k_1 > 0$

$$P(< \bar{M}^{nk} >_T \geq b) \leq P(< \bar{M}^{nk_1} >_T \geq b) \leq$$

$$\le P(r_{k_1} \ge \frac{b}{2}) + P(| < \bar{M}^{nk_1} >_T - r_{k_1}| \ge \frac{b}{2}).$$

Выберем $b < \delta^2\varepsilon/4$ и (при фиксированном b) $(k_1 = k_1(\varepsilon))$ из условия $r_{k_1} < b/2$. Далее, выберем n_ε такое, что

$$\sup_{n \ge n_k} P(|\bar{M}^{nk_1} >_T - r_{k_1}| \ge \frac{b}{2}) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Таким образом, достаточно выбрать $k_\varepsilon \ge k_1$ из условия

$$\sum_{m=1}^{n_\varepsilon - 1} P(\|\bar{M}_T^{mk_\varepsilon}\| > \delta) < \frac{\varepsilon}{4}$$

и положить $\mathbb{G} = \mathbb{G}_{k_\varepsilon}$.

Так как для $M^n \in \mathcal{M}^2_{loc}(\mathbb{H}), s > 0$ и любого конечного момента остановки τ

$$E\|M^n_{\tau+s} - M^n_\tau\|^2 \le E(< M^n >_{\tau+s} - < M^n >_\tau),$$

то условие b) следует из (2) и неравенства Ленгляра (см. доказательство леммы 6 в [7]).

Заключение

Доказанные в данной работе условия плотности семейства распределений в сепарабельном банаховом пространстве и условия относительной компактности семейства мер локально квадратично интегрируемых мартингалов со значениями в гильбертовом пространстве используются в функциональной центральной предельной теореме для гильбертовозначных семимартингалов.

Список литературы

[1] Прохоров Ю.В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей // В сб. Прохоров Ю.В. Избранные труды. М.: ТОРУС ПРЕСС, 2012. С. 148–232.

[2] Ширяев А.Н. Вероятность. М.: МЦНМО, 2004. Т. 1. 520 с.

[3] Lenglart E. Relation de domination entre deux pricessus // Annales de l'Institut Henri Poincare. Section B: Probabilites et Statistiques. 1977. Vol. 13, № 2. Pp. 171–179.

[4] Parthasarathy K.R. Probability measures on metric spaces. New York, London: Acad. Press, 1967. 276 p.

[5] Григелионис Б., Микулявичюс Р. О слабой сходимости полумартингалов // Литовский математический сборник. 1981. Т. 21, № 3. С. 9–24.

[6] Aldous D.J. A characterisatian of Hilbert space using the central limit theorem // Journal of the London Mathematical Society. 1976. Vol. 14, № 2. Pp. 376–380.

[7] Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Функциональная центральная предельная теорема для семимартингалов // Теория вероятностей и ее применения. 1980. Т. 25, № 4. С. 683–703.

Библиографическая ссылка

Лаврентьев В.В., Назаров Л.В. Условия компактности семейства мер гильбертовозначных мартингалов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 2. С. 67–73.

Сведения об авторах

1. **Лаврентьев Виктор Владимирович**
научный сотрудник лаборатории статистического анализа факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова.

Россия, 119991 ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК. E-mail: lavrent@cs.msu.ru.

2. **Назаров Леонид Владимирович**
старший научный сотрудник лаборатории статистического анализа факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова.

Россия, 119991 ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК. E-mail: nazarov@cs.msu.ru.

CONDITIONS OF THE COMPACTNESS FOR FAMILY OF MEASURES OF HILBERT-VALUED MARTINGALES

Lavrentyev Victor Vladimirovich
Researcher at Laboratory of Statistical Analysis, Computational Mathematics and Cybernetics faculty, Lomonosov Moscow State University.
Russia, 119991 GSP-1, Moscow, Leninskiye gory, Lomonosov MSU.
E-mail: lavrent@cs.msu.ru

Nazarov Leonid Vladimirovich
Senior researcher at Laboratory of Statistical Analysis, Computational Mathematics and Cybernetics faculty, Lomonosov Moscow State University.
Russia, 119991 GSP-1, Moscow, Leninskiye gory, Lomonosov MSU.
E-mail: nazarov@cs.msu.ru

Received 04.03.2015, revised 20.03.2015.

In this paper conditions of relative compactness of the family of measures for locally square integrable martingales with values in Hilbert space as well as certain conditions of density of family of distributions in Banach space are obtained.

Keywords: martingales, compactness of measures, Hilbert space, Banach space, dense family of distributions.

Bibliographic citation

Lavrentyev V.V., Nazarov L.V. Conditions of the compactness for family of measures of Hilbert-valued martingales. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2015, no. 2, pp. 67–73. (in Russian)