УДК 519.216

ON/OFF–МОДЕЛЬ ТРАФИКА С НЕОДНОРОДНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ В РЕЖИМЕ «БЫСТРОГО РОСТА ЧИСЛА СОЕДИНЕНИЙ»

Сидорова О.И.
Кафедра математической статистики и системного анализа

Поступила в редакцию 04.02.2015, после переработки 24.02.2015.

Современные высокоскоростные системы связи позволяют одновременно передавать интегральную информацию (голосовую почту, файлы мультимедиа, текстовую информацию и т.п.), предъявляющую различные требования рабочим характеристикам сети. Обеспечение гарантированного качества обслуживания для каждого конкретного приложения и пользователя в этой ситуации часто приводит к серьезным проблемам в перераспределении ограниченных сетевых ресурсов. Поэтому при создании сети с интегральными услугами необходимо учитывать свойства трафика, проходящего через сеть и их влияние на производительность системы. В настоящей работе рассматривается асимптотическое поведение агрегированной нагрузки в *ON/OFF*–модели с неоднородными длинами активных периодов в режиме «быстрого роста числа соединений» и указываются условия, при которых источник каждого типа нетривиальным образом влияет на производительность системы.

Ключевые слова: долговременная зависимость, распределения с тяжелыми хвостами, *ON/OFF*–модель, дробное броуновское движение, показатель Херста.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 2. С. 75–94.

Введение

До недавнего времени теоретическую основу для проектирования и модернизации различных телекоммуникационных систем обеспечивала теория телетрафика, созданная стараниями Эрланга, Энгсетта, Пальма, Линдли, Полачека, Хинчина, Гнеденко, Кенделла и многих других. Данная теория с достаточной степенью точности описывает процессы, происходящие в «голосовых» системах связи, например, в телефонных или телеграфных сетях. Наиболее часто в качестве модели входящего потока в таких системах используется *стационарный однородный поток без последействия*, то есть *пуассоновский* (в общем случае, марковский) *процесс*, с *показательно распределенным временем обслуживания* требований. Относительная простота анализа, обусловленная тем, что пуассоновский процесс обладает многими полезными аналитическими свойствами, и легкость в интерпретации полученных результатов обеспечили данной модели высокую популярность на долгие годы.

Многочисленные эмпирические исследования [5, 6, 10, 14] показывают, что трафик в современных высокоскоростных телекоммуникационных сетях кардинальным образом отличается от традиционных «голосовых» систем и обладает тремя важными характерными особенностями: наличием *тяжелых хвостов* у распределений вероятностей длин периодов активности и покоя; *самоподобием*; свойством *«долгой» памяти*. В условиях самоподобного трафика методы расчета характеристик современных компьютерных сетей – пропускной способности каналов, емкости буферов и прочих, основанные на пуассоновских моделях и формулах Эрланга, которые более полувека с успехом применялись при проектировании телефонных сетей, приводят к серьезной недооценке реальной нагрузки.

На Рис. 1 представлены траектории *Ethernet*–трафика и процесса Пуассона. На графиках хорошо видно насколько различными являются свойства двух процессов: процесс Пуассона с увеличением масштаба усреднения сглаживается, становится похожим на белый шум, тогда как агрегированный *Ethernet*–трафик остается случайным и статистически выглядит одинаково при любом масштабе усреднения, то есть является самоподобным.

Аналитики, в основном, пришли к согласию о наличии самоподобного характера агрегированного трафика, по–крайней мере, для достаточно крупных временных шкал. Эмпирические и теоретические результаты подтверждают то, что самоподобие связано с наличием тяжелых хвостов у распределений вероятностей длин активных периодов источников. На сегодняшний день наиболее популярными моделями самоподобного трафика являются *дробное броуновское движение* и α*–устойчивое движение Леви*.

В работах [11, 13] было показано, что *дробное броуновское движение* и α*–устойчивое движение Леви* (с $1 < \alpha < 2$) являются предельными процессами для агрегированной нагрузки в *ON/OFF*–модели в режимах «быстрого роста числа соединений» и «медленного роста числа соединений», соответственно. Дробное броуновское движение обладает долгой памятью, а процесс Леви имеет «тяжелые», но независимые приращения, и, следовательно, «короткую» память.

В то же время, исследования трафика в ряде систем [7, 14] показали, что он обладает более сложным по сравнению с самоподобным поведением. Более точно, трафик проявляет разные свойства на разных периодах усреднения: асимптотическое самоподобие на крупных временных шкалах и мультифрактальное поведение на малых и средних временных шкалах.

На Рис. 2 представлены оценки *локальных экспонент* (см. [7]) для «моментов» высокой (темно–серый) и низкой (светло–серый) интенсивности передачи данных для разных периодов усреднения.

В *Bellcore'89 LAN* трафике доминируют «моменты» высокой интенсивности, а переходы между «моментами» с разной интенсивностью достаточно плавные. Это свидетельствует в пользу того, данный трафик близок по свойствам к самоподобному процессу. Напротив, график *WAN DIAL3* трафика свидетельствует о мультифрактальном поведении процесса: «моменты» высокой интенсивности, внезапно сменяются периодами относительного «покоя» и наоборот, при этом значения локальной экспоненты меняются достаточно сильно. *WAN DIAL2* трафик визуально выглядит больше похожим на *Bellcore'89 LAN* трафик, поскольку для большинства моментов времени значение локальных экспонент приблизительно одинаковы, но при этом есть небольшое число выбросов. Это свидетельствует о

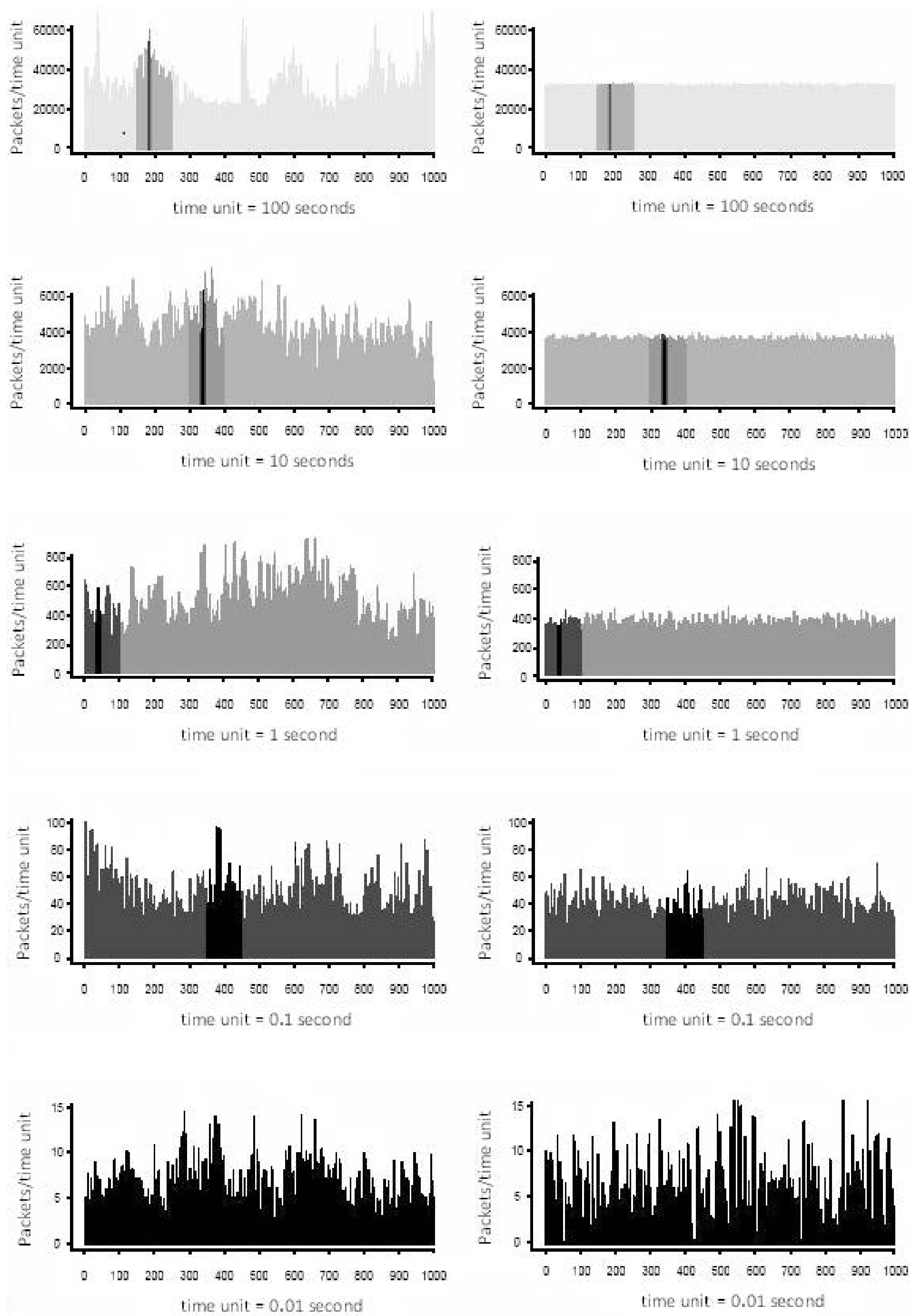

Рис. 1: Траектории трафика в сети Ethernet и сложного процесса Пуассона [8]

возможном асимптотическом самоподобии *WAN DIAL2* трафика: поведение потока на маленьких временных шкалах является мультифрактальным, но с ростом интервала усреднения агрегированный поток приближается по свойствам к монофракталу.

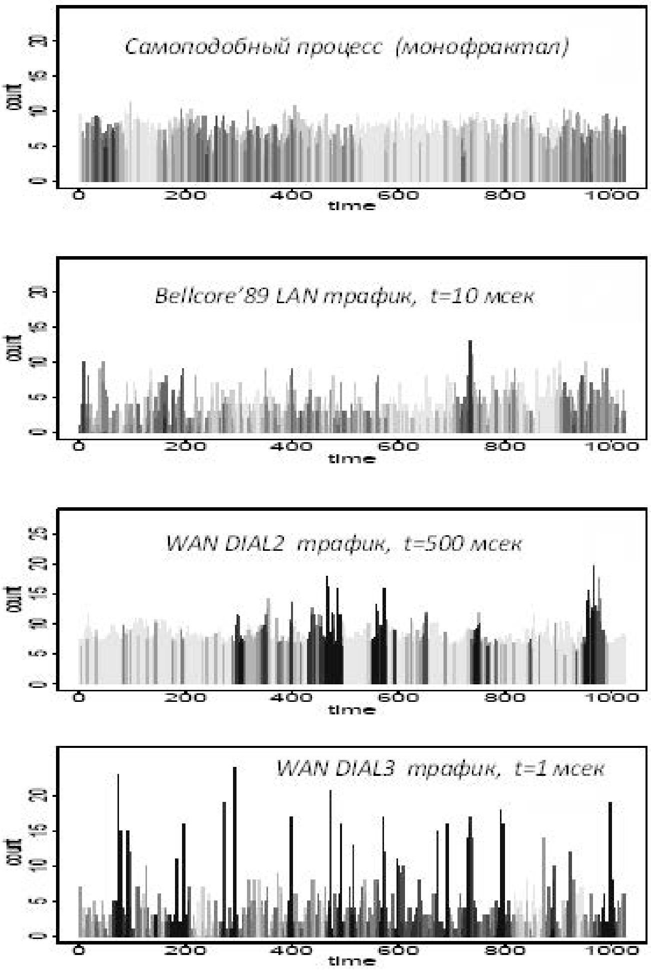

Рис. 2: Оценка локальной экспоненты [7]

В связи с этим актуальной является задача построения новых моделей входящих потоков, обладающих нужными свойствами. В частности, особый интерес для исследования представляет суперпозиция нескольких самоподобных процессов с различными показателями самоподобия.

В работах [1–3] рассматривалась обобщенная ON/OFF–модель с неоднородными источниками в режиме «медленного роста числа соединений». Было показано, что при определенных условиях предельный процесс для агрегированной нагрузки является суммой независимых α–устойчивых движений Леви с разными показателями $1 < \alpha < 2$. Более того, для данного входящего потока были оценены некоторые показатели качества обслуживания, включая вероятность переполнения буфера и среднюю величину потерянной нагрузки.

Данная статья посвящена анализу асимптотического поведения агрегированной нагрузки в ON/OFF–модели с неоднородными источниками в режиме «быстрого роста числа соединений». Мы показываем, что при определенных условиях на интенсивности появления источников разных типов в общем потоке предельным процессом для агрегированной нагрузки будет сумма независимых дробных броуновских движений с разными показателями H.

1. Распределения с тяжелыми хвостами

Обычно, свойства самоподобия и долговременной зависимости, обнаруженные в многочисленных эмпирических исследованиях для различных сетевых сценариев, пытаются объяснить тем, что размеры файлов и (или) времена передачи сообщений имеют распределения с тяжелыми хвостами. К подобным распределениям относят вероятностные законы, характеризующиеся более медленным, по сравнению с экспоненциальным (легкий хвост), убыванием хвоста распределения. Ниже приводится описание соответствующих классов распределений.

Определение 1 (класс $\mathcal{L}$)**.** *Говорят, что распределение F случайной величины Z, сосредоточенное на $(0, \infty)$, имеет* ***длинный хвост****, если*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} = 1, \ \forall\, y > 0. \tag{1}$$

Определение 2. *Определенная для всех $x \geqslant 0$ положительная функция $L(x)$ называется медленно меняющейся на бесконечности, если для всех $t > 0$*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1.$$

Определение 3. *Определенная для всех $x \geqslant 0$ положительная функция $U(x)$ называется* ***правильно меняющейся на бесконечности*** *с показателем $\alpha \in R$, если для всех $x > 0$*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{U(tx)}{U(x)} = x^{\alpha}. \tag{2}$$

Очевидно, что функция $U(x)$ правильно меняется в том и только в том случае, если она представима в виде

$$U(x) = x^{\alpha} \cdot L(x),$$

где $L(x)$ – медленно меняющаяся функция.

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда можно найти фиксированное число t_0, такое, что для $x \geqslant 1$ и $t \geqslant t_0$

$$(1-\varepsilon)x^{\alpha-\varepsilon} < \frac{U(tx)}{U(t)} < (1+\varepsilon)x^{\alpha+\varepsilon}. \tag{3}$$

Границы в (3) называются *границами Поттера.*

Определение 4 (класс $\mathcal{R}(-\alpha), \alpha > 0$)**.** *Говорят, что случайная величина Z имеет распределение* ***с правильно меняющимся хвостом****, если*

$$\bar{F}(x) = x^{-\alpha} \cdot L(x), \ x > 0, \tag{4}$$

где $L(x)$ – медленно меняющаяся на бесконечности функция.

Классу распределений с правильно меняющимся хвостом принадлежат *распределение Парето*, *логарифмическое гамма распределение*, *α–устойчивые законы.*

Пусть $\{X_i, \ i \in N\}$ есть последовательность н.о.р.с.в. с функцией распределения F, такой что $F(x) < 1$ для всех $x > 0$.

Определение 5 (класс $\mathcal{S}$)**.** *Распределение F называется* ***субэкспоненциальным****, если выполнено одно из 2–х условий*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}^{n*}(x)}{\bar{F}(x)} = n,$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(X_1 + \ldots + X_n > x)}{P\big(\max(X_1, \ldots, X_n) > x\big)} = 1, \quad n \geqslant 2,$$

где $\bar{F}^{n*}(x) = P(X_1 + \ldots + X_n > x)$.

К классу $\mathcal{S}$, помимо распределений с правильно меняющимися хвостами, относятся *распределение Вейбулла*, *логнормальное* и некоторые другие.

Для перечисленных выше классов распределения справедливо следующее соотношение

$$\mathcal{R}(-\alpha) \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{L},$$

причем обратное, вообще говоря, не верно.

Медленное убывание хвоста распределения приводит к тому, что данная случайная величина может с положительной вероятностью принимать очень большие значения, и, следовательно, подобные распределения можно использовать при моделировании явлений, подверженных сильным флуктуациям.

2. Самоподобные процессы с «долгой» памятью

Процессы Леви широко используются при описании входящих потоков в различных телекоммуникационных системах. Ниже приводится краткое описание подобных процессов.

Определение 6. *Случайный процесс $Y = \big(Y(t), \ t \geqslant 0\big)$ называется* ***процессом Леви****, если выполнены условия:*

1. *$Y(0) = 0$ почти наверное;*
2. *Y имеет независимые приращения;*
3. *Y имеет однородные (по времени) приращения;*
4. *Y является стохастически непрерывным;*

5. *траектории Y непрерывны справа и имеют конечные пределы слева при $t > 0$.*

В силу независимости и однородности приращений, распределение процесса Y полностью и единственным образом определяется распределением с.в. $Y(1)$.

Одним из основных примеров процессов Леви служит винеровский процесс или броуновское движение.

Определение 7. *Стохастический процесс $B = \big(B(t),\ t \geq 0\big)$ называется* ***броуновским движением*** *(винеровским процессом), если для любых $t \geqslant 0$ и $h > 0$ приращения процесса $B(t+h) - B(t)$ имеют нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 h$.*

Если $\sigma^2 = 1$, то процесс $B(t)$ называется ***стандартным броуновским движением****.*

Нетрудно видеть, что ковариационная функция приращений процесса B имеет вид
$$K(t,s) = Cov(Y(t), Y(s)) = \sigma^2 \min(t,s).$$

По определению приращения броуновского движения имеют нормальное распределение. Хорошо известно, что нормальный закон является предельным для сумм независимых случайных величин, имеющих конечную дисперсию.

Определение 8. *Случайный процесс $Y = (Y(t),\ t \geqslant 0)$ называется* ***самоподобным*** *с показателем Херста $H \geqslant 0$, если выполнено следующее условие*

$$Y(ct) \stackrel{d}{=} c^H Y(t), \quad \forall\, t \geqslant 0,\, c > 0,$$

где $\stackrel{d}{=}$ означает равенство конечномерных распределений.

Определение 9. *Непрерывный гауссовский процесс $B = (B_H(t),\ t \geqslant 0)$, $B_H(0) = 0$, с нулевым средним называется* ***дробным (фрактальным) броуновским движением с показателем Херста*** *$0 < H < 1$, если ковариационная функция процесса $B_H(t)$ имеет вид*

$$K_H(t,s) = \frac{V_H}{2}\left[t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right],$$

где
$$V_H = E|B_H(1)|^2 = \frac{\Gamma(2-2H)cos(\pi H)}{\pi H(1-2H)}.$$

Таким образом, дробное броуновское движение – это случайный процесс, начинающийся в нуле, имеющий стационарные гауссовские приращения с нулевым средним и дисперсией

$$E\big(B_H(t) - B_H(s)\big)^2 = V_H|t-s|^{2H}.$$

Если $H > 1/2$, то $K_H(t,s) > 0$, если $H < 1/2$, то $K_H(t,s) < 0$. При $H = 1/2$ имеем обычное броуновское движение.

Дробное броуновское движение при $1/2 < H < 1$ есть самоподобный процесс с «долгой» памятью, поскольку $B_H(ct) \stackrel{d}{=} c^H B_H(t)$, а ковариационная функция приращений процесса

$$K_H(s, s+\tau) \sim c\tau^{2H-2}, \quad \tau \to \infty$$

убывает степенным образом с ростом τ и является «несуммируемой», то есть

$$\int_0^\infty K_H(s)\, ds = \infty.$$

3. *ON/OFF*–модель входящего потока

3.1 Однородный случай

Следуя работе [11], дадим описание *ON/OFF*–модели входящего потока, порождаемого одним источником. Обозначим u – скорость генерации трафика: $u > 1$ для *ON*–периода, $u = 0$ для *OFF*–периода.

Пусть $\{X_{on}, X_1, X_2, \ldots\}$ есть н.о.р. неотрицательные случайные величины (общее обозначение X), представляющие собой длины *ON*–периодов и $\{Y_{off}, Y_1, Y_2, \ldots\}$ – н.о.р. неотрицательные случайные величины (общее обозначение Y), характеризующие длины *OFF*–периодов. Случайные величины X и Y предполагаются независимыми с распределениями F_1 и F_2 такими, что

$$\bar{F}_1(x) = x^{-\alpha_1} \cdot L_1(x), \quad \bar{F}_2(x) = x^{-\alpha_2} \cdot L_2(x)\ , \quad x > 0, \tag{5}$$

где α_1, $\alpha_2 \in (1,2)$ и $L_1(x), L_2(x)$ есть медленно меняющиеся на бесконечности функции.

Поскольку α_1, $\alpha_2 \in (1,2)$, распределения F_1 и F_2 имеют конечные средние μ_1 и μ_2 и бесконечные дисперсии.

Далее мы полагаем, что

$$\alpha := \alpha_1 < \alpha_2,$$

то есть *ON*–период имеет более «тяжелый» хвост.

Следовательно, мы рассматриваем некоторый **процесс восстановления**, порожденный чередованием *ON*– и *OFF*–периодов. Все восстановления происходят в начале *ON*– периодов, **промежутки между восстановлениями** есть н.о.р.с.в.

$$Z_i = X_i + Y_i,\ i \geqslant 1$$

с распределением $F_1 * F_2$ и средним временем восстановления

$$\mu = E(Z_1) = \mu_1 + \mu_2.$$

Чтобы сделать последовательность стационарной, введем вспомогательную случайную величину T_0, которая не зависит от X_i и Y_i. Стационарная версия последовательности восстановления $\{T_n,\ n \geqslant 0\}$ задается по правилу

$$T_0,\ T_n = T_0 + \sum_{i=1}^{n} Z_i\ ,\ n \geqslant 1. \tag{6}$$

Определим случайную величину T_0. Пусть B, $X_{on}^{(0)}$, $Y_{off}^{(0)}$ есть независимые случайные величины, которые независимы также от $\{Y_{off}, \{X_n\}, \{Y_n\}\}$.

С.в. B имеет распределение Бернулли:

$$p_{on} = P(B=1) = \mu_1/\mu \tag{7}$$

и при $x \to \infty$

$$\bar{F}_1^{(0)}(x) = P\Big(X_{on}^{(0)} > x\Big) = \frac{1}{\mu_1}\int\limits_x^{\infty} \bar{F}_1(s)\,ds \sim \mu_1^{-1} \cdot x^{-\alpha+1} \cdot \tilde{L}_1(x), \tag{8}$$

$$\bar{F}_2^{(0)}(x) = P\Big(Y_{off}^{(0)} > x\Big) = \frac{1}{\mu_2}\int\limits_x^{\infty} \bar{F}_2(s)\,ds \sim \mu_2^{-1} \cdot x^{-\alpha_2+1} \cdot \tilde{L}_2(x), \tag{9}$$

где функции $\tilde{L}_1(x)$ и $\tilde{L}_2(x)$ медленно меняются на бесконечности.

Замечание 1. С.в. $X_{on}^{(0)}$ и $Y_{off}^{(0)}$ представляют собой так называемые *«остаточные времена жизни»*.

Если положить

$$T_0 = B \cdot \left(X_{on}^{(0)} + Y_{off}\right) + (1-B) \cdot Y_{off}^{(0)}, \tag{10}$$

то **последовательность восстановления** (6) **будет стационарной**.

ON/OFF– процесс для одного источника определяется как

$$W_t = u \cdot \Big(B \cdot 1_{[0, X_{on}^{(0)})}(t) + \sum_{n=0}^{\infty} 1_{[T_n, T_n + X_{n+1})}(t)\Big), \ t \geqslant 0. \tag{11}$$

Таким образом,

$$W_t = \begin{cases} u, & \text{если } t \text{ попадает на } ON\text{–период}, \\ 0, & \text{если } t \text{ попадает на } OFF\text{–период}. \end{cases}$$

Так как последовательность восстановления (6) стационарна, то **процесс** W_t **строго стационарен** со средним

$$E(W_t) = u \cdot P(W_t = u) = u \cdot \mu_1/\mu.$$

При условии (5) ковариационная функция $\gamma_W(k)$ процесса W_t имеет вид

$$\gamma_W(k) \sim \frac{\mu_2^2}{(\alpha-1)\mu^3} \cdot k^{-(\alpha-1)} \cdot L_1(k), \quad k \to \infty. \tag{12}$$

Поскольку

$$\sum_k |\gamma_W(k)| = \infty, \tag{13}$$

процесс W_t **обладает «долгой» памятью**.

Рассмотрим теперь суперпозицию M независимых ON/OFF источников

$$W_t^{(m)},\ t \geqslant 0,\ m = 1, \dots, M,$$

подающих нагрузку на один и тот же сервер.

Число активных в момент t источников равно

$$N(t) := N(M, t) = \sum_{m=1}^{M} W_t^{(m)},\ t \geqslant 0.$$

$N(t)$ есть интенсивность входного потока для сервера в момент времени t и может рассматриваться как **процесс мгновенной нагрузки**.

Полная входящая работа для сервера к моменту времени t определяется как

$$A(t) := A(M, t) = \int_0^t N(s)\, ds,\ t \geqslant 0. \tag{14}$$

Определим семейство **агрегированных процессов полной нагрузки**

$$A(Tt) := A(M, Tt), \tag{15}$$

где $T > 0$ есть масштабный параметр, а число ON/OFF–процессов $M = M(T)$ – некоторая неубывающая по T целочисленная функция такая, что

$$\lim_{T \to \infty} M(T) = \infty.$$

Процесс $\big(A(Tt),\ t \geqslant 0\big)$ при больших T характеризует полную нагрузку на систему на крупных временных шкалах.

Замечание 2. Для компактной записи формул зависимость M от T в дальнейшем может опускаться.

Определим функцию квантилей

$$b(t) = (1/\bar{F}_1)^{\leftarrow}(t) = \inf\Big\{x > 0 :\ 1/\bar{F}_1(x) \geqslant t\Big\},\ t > 0.$$

Функция $b(t)$ является непрерывной слева и неубывающей. Из теории правильно меняющихся функций следует, что $b(t)$ правильно меняется с показателем $1/\alpha$, то есть

$$b(t) = t^{1/\alpha} L(t),$$

где $L(t)$ есть некоторая медленно меняющаяся на бесконечности функция.

Пусть рассматриваемая система функционирует в режиме «быстрого роста числа соединений» (Fast Growth Condition, FGC)

$$\lim_{T \to \infty} \frac{b(MT)}{T} = \infty. \tag{16}$$

Можно показать ([11], Lemma 1, 2), что в этом случае

$$\lim_{T \to \infty} MT\bar{F}_{on}(T) = \infty \tag{17}$$

и

$$\lim_{T\to\infty} \frac{MT^2 \bar{F}_{on}(T)}{b(MT)} = \infty. \tag{18}$$

Нас интересует асимптотическое поведение процесса $A(Tt)$ при $T \to \infty$ в режиме *FGC*. Справедлив следующий результат [11]

Теорема 1. *Пусть F_1 и F_2 удовлетворяют условию* (5). *В режиме FGC процесс* $\big(A(Tt),\ t \geqslant 0\big)$, *описывающий полную работу в системе на интервале* $[0, Tt]$, *удовлетворяет следующему асимптотическому соотношению*

$$\frac{A(Tt) - M\,Tt\,\mu_1/\mu}{\sqrt{MT^{3-\alpha}L_1(T)}} \Rightarrow \sigma B_H(t),$$

где $\Rightarrow$ *означает сходимость конечномерных распределений, а* $B_H(t)$ *есть стандартное дробное броуновское движение с* $H = \dfrac{3-\alpha}{2}$ *и* $\sigma^2 = \dfrac{2\mu_2^2\,\Gamma(2-\alpha)}{\mu^3(\alpha-1)\Gamma(4-\alpha)}$.

Замечание 3. Сходимость конечномерных распределений в теореме 1 можно «расширить» до слабой сходимости в $(\mathbb{D}[0,\infty], J_1)$.

3.2 Неоднородный случай

Рассмотрим суперпозицию M независимых стационарных процессов $W_t^{(m)}$, распределения *ON*– и *OFF*–периодов которых имеют тяжелые хвосты и *принадлежат конечным множествам $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$, состоящим из $2 \leqslant r < \infty$ различных распределений.* Это соответствует ситуации, когда в некоторой среде, например, локальной сети, существует конечное число различных типов источников.

Пусть, как и ранее, $F_1^{(k)}$ и $F_2^{(k)}$ есть функции распределения для *ON*– и *OFF*–периодов источников k–го типа, которые удовлетворяют условию

$$\bar{F}_1^{(k)}(x) = x^{-\alpha_1^{(k)}} \cdot L_1^{(k)}(x), \quad \bar{F}_2^{(k)}(x) = x^{-\alpha_2^{(k)}} \cdot L_2^{(k)}(x), \quad x > 0, \tag{19}$$

где $\alpha_1^{(k)}$, $\alpha_2^{(k)} \in (1,2)$, а функции $L_1^{(k)}(x)$ и $L_2^{(k)}(x)$ медленно меняются на бесконечности.

Поскольку $\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)} \in (1,2)$ для всех k распределения $F_1^{(k)}$ и $F_2^{(k)}$ имеют конечные средние $\mu_1^{(k)}$ и $\mu_2^{(k)}$ и бесконечные дисперсии. Обозначим через $\mu^{(k)} = \mu_1^{(k)} + \mu_2^{(k)}$.

Как и в однородном случае предположим, что

$$\alpha^{(k)} := \alpha_1^{(k)} < \alpha_2^{(k)}, \quad k = \overline{1,r},$$

то есть для источников всех типов *ON*–периоды имеют более «тяжелые» хвосты.

Также положим $\alpha^{(1)} < \alpha^{(2)} < \ldots < \alpha^{(r)}$.

Для каждого источника типа $k = \overline{1,r}$ определим соответствующий *ON/OFF*–процесс $(W_t^{(k)},\ t \geqslant 0)$

$$W_t^{(k)} = u \cdot \Big(B^{(k)} \cdot 1_{[0,\ X_{on,(0)}^{(k)})}(t) + \sum_{n=0}^{\infty} 1_{[T_n^{(k)},\ T_n^{(k)} + X_{n+1}^{(k)})}(t)\Big), \tag{20}$$

где стационарная последовательность восстановления $T_n^{(k)}$ строится аналогично (6) и (10). Поскольку все источники, генерирующие трафик независимы, независимыми будут и ON/OFF–процессы, порождаемые ими.

Обозначим через $M^{(k)} = M^{(k)}(T)$ число появлений распределения k-го типа среди первых $M = M(T) = \sum\limits_{k=1}^{r} M^{(k)}$ членов последовательности процессов $W_t^{(k)}$.

Интенсивность входящего потока для сервера в момент $t \geq 0$ и **полная входящая работа** к моменту времени t равны, соответственно

$$N(t) = N_M(t) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{M^{(k)}} W_{t,m}^{(k)}, \tag{21}$$

$$A(t) = A(M,t) = \int_0^t N(s)ds, \ t \geq 0. \tag{22}$$

Далее будем рассматривать семейство **агрегированных процессов нагрузки**

$$A(M,T,t) := A(M,Tt), \quad T > 0. \tag{23}$$

Пусть $M^{(k)} \to \infty$ при $T \to \infty$ для всех k.

Непрерывная слева обобщенная обратная к функции $1/\bar{F}_1^{(k)}$ функция $b^{(k)}(t)$ правильно меняется с показателем $1/\alpha_1^{(k)}$, следовательно

$$b^{(k)}(t) = t^{1/\alpha^{(k)}} \cdot L^{(k)}(t),$$

где $L^{(k)}(t)$ – медленно меняющаяся на бесконечности функция.

Далее *рассматривается случай* FGC:

$$\frac{b^{(k)}(M^{(k)}T)}{T} \to \infty.$$

Определим целочисленные функции $M^{(k)}(T)$ по правилу:

$$\begin{aligned} M^{(k)}(T) &\sim M(T) \cdot T^{\alpha^{(k)} - \alpha^{(r)}} \cdot \frac{L_1^{(r)}(T)}{L_1^{(k)}(T)}, \quad k < r, \\ M^{(r)}(T) &= M(T) - M^{(1)}(T) - \ldots - M^{(r-1)}(T). \end{aligned} \tag{24}$$

Легко видеть, что при $T \to \infty$

$$M^{(r)}(T)/M(T) \to 1; \quad M^{(k)}(T)/M(T) \to 0, \quad k < r.$$

Основным результатом данной статьи является следующая

Теорема 2. *Если $F_1^{(k)}$ и $F_2^{(k)}$ удовлетворяют условию (19) и режим FGC выполняется для всех k и $M^{(k)}$, определенных в (24), то при некоторой нормировке предельный процесс для $A(M,Tt)$ существует и является суммой независимых дробных броуновских движений с показателями $H^{(k)} = \dfrac{3-\alpha^{(k)}}{2}$, $k = \overline{1,r}$.*

Доказательство. Определим величины

$$d_T^{(k)} := \left(M^{(k)} T^{3-\alpha^{(k)}} L_1^{(k)}(T)\right)^{1/2},$$

служащие в качестве нормализующих величин для величины $A(T)$ в центральной предельной теореме.

В силу определения $M^{(k)}$ при $T \to \infty$ имеем

$$\begin{aligned} d_T^{(k)} &= \left(M^{(k)} T^{3-\alpha^{(k)}} L_1^{(k)}(T)\right)^{1/2} \sim \left(c^{(k)} M T^{\alpha^{(k)}-\alpha^{(r)}} T^{3-\alpha^{(k)}} \frac{L_1^{(r)}(T)}{L_1^{(k)}(T)} L_1^{(k)}(T)\right)^{1/2} \sim \\ &\sim \left(M^{(r)} T^{3-\alpha^{(r)}} L_1^{(r)}(T)\right)^{1/2} = d_T^{(r)}. \end{aligned} \tag{25}$$

Поскольку для любого $k = \overline{1, r-1}$

$$\frac{d_T^{(k)}}{T} = \left(M^{(k)} T \bar{F}_1^{(k)}(T)\right)^{1/2} \sim \left(M T \bar{F}_1^{(k)}(T)\right)^{1/2} = \frac{d_T^{(r)}}{T},$$

то в силу (17) имеем $T = o\big(d_T^{(r)}\big)$.

Определим процессы

$$\begin{aligned} G_{m,T}^{(k)} : &= \int_0^T W_{m,t}^{(k)}\, dt - M^{(k)} T \mu_1^{(k)} / \mu^{(k)} = \\ &= \int_0^T \big(W_{m,t}^{(k)} - E W_{m,t}^{(k)}\big)\, dt, \quad m = 1, \ldots, M^{(k)}, \quad k = \overline{1, r}. \end{aligned} \tag{26}$$

Тогда центрированная полная нагрузка $\tilde{A}(T)$ на интервале $[0, T]$ будет равна

$$\tilde{A}(T) = A(T) - \sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{M^{(k)}} T \mu_1^{(k)} / \mu^{(k)} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{M^{(k)}} G_{m,T}^{(k)}.$$

В силу (12) при фиксированном k и $T \to \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{D G_{m,T}^{(k)}}{T^3 \bar{F}_1^{(k)}(T)} &= \frac{2}{T^3 \bar{F}_1^{(k)}(T)} \int_{v=0}^{T} \int_{u=0}^{v} \gamma_W^{(k)}(u)\, du\, dv = 2 \int_{s=0}^{1} \int_{y=0}^{s} \frac{\gamma_W^{(k)}(Ty)}{T \bar{F}_1^{(k)}(T)}\, dy\, ds \sim \\ &\sim \frac{2\big(\mu_2^{(k)}\big)^2}{\big(\mu^{(k)}\big)^3 (\alpha^{(k)} - 1)} \int_{s=0}^{1} \int_{y=0}^{s} \left(\frac{Ty}{T}\right)^{-(\alpha^{(k)}-1)} \frac{L_1^{(k)}(Ty)}{L_1^{(k)}(T)}\, dy\, ds \sim \\ &\sim \frac{2\big(\mu_2^{(k)}\big)^2 \Gamma(2 - \alpha^{(k)})}{\big(\mu^{(k)}\big)^3 (\alpha^{(k)} - 1) \Gamma(4 - \alpha^{(k)})} = \sigma_k^2. \end{aligned}$$

Следовательно, дисперсия $G_{m,T}^{(k)}$ равна

$$D G_{m,T}^{(k)} \sim \sigma_k^2 T^{3-\alpha^{(k)}} L_1^{(k)}(T), \quad T \to \infty. \tag{27}$$

1. Сходимость одномерных распределений.

Покажем, что для всех $t \geqslant 0$

$$\frac{1}{d_T^{(r)}}\bar{G}_T^{(k)} = \frac{1}{d_T^{(r)}}\sum_{m=1}^{M^{(k)}} G_{m,T}^{(k)} \xrightarrow{d} N\Big(0, \sigma_k^2 t^{2H^{(k)}}\Big) \stackrel{d}{=} \sigma_k B_{H^{(k)}}(t), \tag{28}$$

где $H^{(k)} = \dfrac{3-\alpha^{(k)}}{2}$, $k = \overline{1,r}$.

Нетрудно видеть, что при фиксированных k и t в (28) мы имеем сумму $M^{(k)}$ независимых и одинаково распределенных слагаемых с нулевым средним и дисперсией

$$DG_{m,Tt}^{(k)} \sim \sigma_k^2\,(Tt)^{3-\alpha^{(k)}} L_1^{(k)}(Tt) = \sigma_k^2\,(Tt)^{2H^{(k)}} L_1^{(k)}(Tt), \quad T\to\infty.$$

Для доказательства сходимости к нормальному распределению нужно проверить при $T\to\infty$ выполнение условий, гарантирующих бесконечную малость случайных слагаемых ([12], Theorem 4.2):

$$\begin{array}{ll} (A) & M^{(k)} P\Big(\big|G_{Tt}^{(k)}\big| \geqslant \varepsilon d_T^{(r)}\Big) \to 0, \quad \forall\varepsilon > 0, \\ (B) & \dfrac{M^{(k)}}{\Big(d_T^{(r)}\Big)^2} D\left(G_{Tt}^{(k)} I_{\left[|G_{Tt}^{(k)}|\leqslant \tau d_T^{(r)}\right]}\right) \to \sigma_k^2 t^{3-\alpha^{(k)}}, \quad \tau > 0, \\ (C) & \dfrac{M^{(k)}}{d_T^{(r)}} E\left(G_{Tt}^{(k)} I_{\left[|G_{Tt}^{(k)}|\leqslant \tau d_T^{(r)}\right]}\right) \to 0, \quad \tau > 0. \end{array}$$

При $T\to\infty$

$$P\Big(\big|G_T^{(k)}\big| \geqslant \varepsilon\, T\Big) \leqslant \frac{DG_T^{(k)}}{\varepsilon^2\, T^2} \sim \frac{\sigma_k^2\, T^{1-\alpha^{(k)}} L_1^{(k)}(T)}{\varepsilon^2} \to 0 \quad \Rightarrow$$

$$P\Big(\big|G_T^{(k)}\big| \geqslant \varepsilon\, d_T^{(r)}\Big) \to 0,$$

поскольку $T = o\big(d_T^{(r)}\big)$.

Далее при $T\to\infty$ имеем

$$M^{(k)} \to \infty, \quad P\Big(\big|G_{Tt}^{(k)}\big| \geqslant \varepsilon\, d_T^{(r)}\Big) \to 0$$

и

$$\begin{aligned} M^{(k)} P\Big(\big|G_{Tt}^{(k)}\big| \;&\geqslant\; \varepsilon\, d_T^{(r)}\Big) \leqslant \frac{M^{(k)} DG_{Tt}^{(k)}}{\varepsilon^2\left(d_T^{(r)}\right)^2} \sim \\ &\sim\; \frac{M\, T^{\alpha^{(k)}-\alpha^{(r)}} L_1^{(r)}(T)}{L_1^{(k)}(T)}\, \frac{\sigma_k^2\,(Tt)^{3-\alpha^{(k)}} L_1^{(k)}(Tt)}{\varepsilon^2\, M\, T^{3-\alpha^{(r)}} L_1^{(r)}(T)} = \frac{\sigma_k^2\, t^{3-\alpha^{(k)}}}{\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Поскольку последнее неравенство должно выполняться для всех $\varepsilon > 0$, получаем

$$M^{(k)} P\Big(\big|G_{Tt}^{(k)}\big| \geqslant \varepsilon\, d_T^{(r)}\Big) \to 0, \quad T \to \infty.$$

Таким образом, *условие (A) выполнено.*

Проверим выполнение условия *(B)*.

При каждом $t \geqslant 0$ справедливо

$$DG_{Tt}^{(k)} = D\big(G_{Tt}^{(k)} I_{\left[|G_{Tt}^{(k)}| \leqslant \tau d_T^{(r)}\right]}\big) + D\big(G_{Tt}^{(k)} I_{\left[|G_{Tt}^{(k)}| > \tau d_T^{(r)}\right]}\big),$$

где $\tau > 0$ – некоторое число.

Покажем, что при $T \to \infty$

$$\frac{M^{(k)}}{\left(d_T^{(r)}\right)^2} D\big(G_{Tt}^{(k)} I_{\left[|G_{Tt}^{(k)}| > \tau d_T^{(r)}\right]}\big) \to 0.$$

Пусть $F_G^{(k)}(x)$ есть функция распределения с.в. $G_{Tt}^{(k)}$, тогда

$$\chi^{(k)}(x) := P\Big(\big|G_T^{(k)}\big| \geqslant x\Big) = 1 - F_G^{(k)}(x) + F_G^{(k)}(-x).$$

Поскольку величины $G_{Tt}^{(k)}$ являются центрированными, при $T \to \infty$ в силу *(A)* имеем

$$\frac{M^{(k)}}{\left(d_T^{(r)}\right)^2} D\big(G_{Tt}^{(k)} I_{\left[|G_{Tt}^{(k)}| > \tau d_T^{(r)}\right]}\big) = \frac{M^{(k)}}{\left(d_T^{(r)}\right)^2} \int\limits_{|x| > \tau d_T^{(r)}} x^2\, dF_G^{(k)}(x) =$$

$$= -M^{(k)} \int\limits_{u > \tau} u^2 d\chi^{(k)}\big(u\, d_T^{(r)}\big) =$$

$$= -M^{(k)} \sum_{l=1}^{\infty} \int\limits_{l\,\tau}^{(l+1)\,\tau} u^2 d\chi^{(k)}\big(u\, d_T^{(r)}\big) \leqslant M^{(k)} \tau^2 \sum_{l=1}^{\infty} (l+1)^2\, \chi^{(k)}\big(l\, d_T^{(r)}\big) \to 0.$$

Следовательно, при $T \to \infty$

$$\frac{M^{(k)}}{\left(d_T^{(r)}\right)^2} D\big(G_{Tt}^{(k)} I_{\left[|G_{Tt}^{(k)}| \leqslant \tau d_T^{(r)}\right]}\big) \to \frac{M^{(k)}}{\left(d_T^{(r)}\right)^2} DG_{Tt}^{(k)} \sim$$

$$\sim \frac{M\, T^{\alpha^{(k)} - \alpha^{(r)}} L_1^{(r)}(T)}{L_1^{(k)}(T)} \, \frac{\sigma_k^2\, (Tt)^{3-\alpha^{(k)}} L_1^{(k)}(Tt)}{M\, T^{3-\alpha^{(r)}} L_1^{(r)}(T)} = \sigma_k^2\, t^{3-\alpha^{(k)}},$$

то есть *условие (B) также выполнено.*

Справедливость условия (C) доказывается аналогично.

В силу независимости с.в. $\bar{G}_T^{(k)}$ при разных k получаем, что при всех $t \geqslant 0$ с.в.

$$A(Tt) = \sum_{k=1}^{r} \bar{G}_T^{(k)} \xrightarrow{d} \Big(\sigma_1 B_{H^{(1)}}(t) + \ldots + \sigma_r B_{H^{(r)}}(t)\Big).$$

Таким образом сходимость одномерных распределений процесса $A(Tt)$ доказана.

2. Сходимость конечномерных распределений.

Теперь необходимо доказать сходимость конечномерных распределений. Будем рассматривать только 2–мерный случай, поскольку в общей ситуации рассуждения аналогичны.

Зафиксируем числа $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 < \infty$ и покажем, что для $b_1^{(k)}, b_2^{(k)} \in R^1$ имеет место сходимость

$$\frac{1}{d_T^{(r)}} \sum_{m=1}^{M^{(k)}} \big(b_1^{(k)} G_{m,Tt_1}^{(k)} + b_2^{(k)} G_{m,Tt_2}^{(k)}\big) \xrightarrow{d} b_1^{(k)} \sigma_k B_{H^{(k)}}(t_1) + b_2^{(k)} \sigma_k B_{H^{(k)}}(t_2). \tag{29}$$

Для доказательства справедливости (29) нужно проверить выполнение условий *(A)–(C)* для суммы $b_1^{(k)} G_{Tt_1}^{(k)} + b_2^{(k)} G_{Tt_2}^{(k)}$.

Справедливость условий *(A)* и *(C)* доказывается аналогично тому, как это было сделано выше.

Для доказательства *(B)* рассмотрим ковариационную функцию процесса $G_{Tt}^{(k)}$. В силу стационарности приращений процесса $G_{Tt}^{(k)}$ имеем

$$\frac{M^{(k)}}{\Big(d_T^{(r)}\Big)^2} Cov\big(G_{Tt_1}^{(k)}, G_{Tt_2}^{(k)}\big) = \frac{M^{(k)}}{2\Big(d_T^{(r)}\Big)^2} \Big[DG_{Tt_1}^{(k)} + DG_{Tt_2}^{(k)} - D\big(G_{Tt_2}^{(k)} - G_{Tt_1}^{(k)}\big)\Big] \to$$

$$\to \frac{\sigma_k^2}{2} \Big[t_1^{2H^{(k)}} + t_2^{2H^{(k)}} - (t_2 - t_1)^{2H^{(k)}}\Big] = Cov\Big(\sigma_k^2 B_{H^{(k)}}(t_1), \sigma_k^2 B_{H^{(k)}}(t_2)\Big),$$

то есть *условие (B) выполнено.* Таким образом, сходимость конечномерных распределений процесса $\bar{G}_{Tt}^{(k)}$ к дробному броуновскому движению доказана.

В силу независимости процессов $\bar{G}_{Tt}^{(k)}$ при разных k окончательно получаем, что при соответствующей нормировке при $T \to \infty$ предельный процесс для

$$A(Tt) = \sum_{k=1}^{r} \bar{G}_T^{(k)}$$

есть сумма r независимых дробных броуновских движений с показателями $H^{(r)} < \ldots < H^{(1)}$, где $H^{(k)} = \dfrac{3 - \alpha^{(k)}}{2}$, $k = \overline{1, r}$. □

Замечание 4. Сходимость конечномерных распределений в теореме 2 можно «расширить» до слабой сходимости в $(\mathbb{D}[0,\infty], J_1)$. Для этого нужно показать, что семейство соответствующим образом центрированных и нормированных процессов $A(Tt) = \sum\limits_{k=1}^{r} \bar{G}_T^{(k)}$ является плотным в $(\mathbb{D}[0,K], J_1)$ при любом $K > 0$.

Опираясь на критерий плотности, предложенный в ([4], Theorem 12.3), необходимо показать, что при некотором маленьком $\varepsilon > 0$ для $T \geqslant T^*$ и всех маленьких $u > 0$ выполняется

$$E\Big|\frac{1}{d_T^{(r)}} \sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{M^{(k)}} G_{m,Tu}^{(k)}\Big|^2 \leqslant c\, u^{1+\varepsilon},$$

где c – некоторая константа.

Согласно (27) для больших T справедливо

$$\begin{aligned} E\Big|\frac{1}{d_T^{(r)}} \sum_{m=1}^{M^{(k)}} G_{m,Tu}^{(k)}\Big|^2 &= \frac{M^{(k)}}{\big(d_T^{(r)}\big)^2} DG_{Tu}^{(k)} = \frac{MT^{\alpha^{(k)}-\alpha^{(r)}} L_1^{(r)}(T)}{L_1^{(k)}(T)} \frac{DG_{Tu}^{(k)}}{MT^{3-\alpha^{(r)}} L_1^{(r)}(T)} = \\ &= \frac{DG_{Tu}^{(k)}}{T^{3-\alpha^{(k)}} L_1^{(k)}(T)} \leqslant 2\sigma_k^2 \frac{DG_{Tu}^{(k)}}{DG_T^{(k)}}. \end{aligned}$$

При больших T функция $DG_x^{(k)}$ правильно меняется с показателем $3-\alpha^{(k)}$. Положим $x = 1/u$ и $t = Tu$ и выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы выполнялось условие

$$3 - \alpha^{(r)} - \varepsilon > 1 + \varepsilon.$$

При таком выборе ε в силу того, что $\alpha^{(1)} < \ldots < \alpha^{(k)}$, также имеем

$$3 - \alpha^{(k)} - \varepsilon > 1 + \varepsilon, \quad k = \overline{1, r-1}.$$

Тогда для $u \leqslant 1$ и фиксированного t_0 при $Tu \geqslant t_0$ в силу (3) получаем

$$\frac{DG_{Tu}^{(k)}}{DG_T^{(k)}} < \frac{1}{1-\varepsilon}\, u^{3-\alpha^{(k)}-\varepsilon} < \frac{1}{1-\varepsilon}\, u^{1+\varepsilon}, \quad k = \overline{1, r}.$$

При $Tu < t_0$ и достаточно больших T имеем

$$\begin{aligned} \frac{DG_{Tu}^{(k)}}{T^{3-\alpha^{(k)}} L_1^{(k)}(T)} &\leqslant \frac{(Tu)^2}{T^{3-\alpha^{(k)}} L_1^{(k)}(T)} \leqslant \frac{(Tu)^{1+\varepsilon} t_0^{1-\varepsilon}}{T^{3-\alpha^{(k)}} L_1^{(k)}(T)} \leqslant \\ &\leqslant \frac{T^{1-(3-\alpha^{(k)}-\varepsilon)}}{L_1^{(k)}(T)}\, t_0^{1-\varepsilon}\, u^{(1+\varepsilon)} \leqslant t_0^{1-\varepsilon}\, u^{(1+\varepsilon)}, \quad k = \overline{1, r}. \end{aligned}$$

Таким образом получаем, что при больших T и $u \leqslant 1$

$$E\Big|\frac{1}{d_T^{(r)}} \sum_{m=1}^{M^{(k)}} G_{m,Tu}^{(k)}\Big|^2 \leqslant \max\Big\{\frac{2\sigma_k^2}{1-\varepsilon},\, t_0^{1-\varepsilon}\Big\}\, u^{1+\varepsilon} = c^{(k)}\, u^{1+\varepsilon}, \quad k = \overline{1, r}.$$

Окончательно получаем

$$E\Big|\frac{1}{d_T^{(r)}} \sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{M^{(k)}} G_{m,Tu}^{(k)}\Big|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{r} E\Big|\frac{1}{d_T^{(r)}} \sum_{m=1}^{M^{(k)}} G_{m,Tu}^{(k)}\Big|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{r} c^{(k)}\, u^{1+\varepsilon} = c\, u^{1+\varepsilon}.$$

Заключение

В данной статье исследовалось асимптотическое поведение агрегированной нагрузки в модели трафика, порождаемого неоднородными *ON/OFF* источниками, распределения длин активных периодов и периодов покоя которых имеют распределения с правильно меняющимися хвостами. Было показано, что при соответствующем выборе частот появления источников различных типов, предельный процесс для агрегированной нагрузки на крупных временных шкалах существует и является суммой независимых дробных броуновских движений с показателями $H^{(r)} < \ldots < H^{(1)}$. Это соответствует ситуации, когда источник любого типа влияет нетривиальным образом на производительность телекоммуникационной системы.

Список литературы

[1] Сидорова О.И. Средняя доля потерянной нагрузки в модели трафика с неоднородными источниками // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 4. С. 45–56.

[2] Хохлов Ю.С., Сидорова О.И. Аппроксимация вероятности переполнения буфера для случая различных распределений длины активных периодов // Сложные системы: обработка информации, моделирование и оптимизация. 2004. № 2. С. 68–77.

[3] D'Apice C., Gargiulo G., Sidorova O., Khokhlov Yu. Convergence of superpositions of scaled renewal processes with finite number of different distributions // Journal of Mathematical Sciences. 2006. Vol. 132, № 5. Pp. 602–609.

[4] Billingsley P. Convergence of Probability Measures. Wiley, New York, 1968.

[5] Crovella M., Bestavros A. Self–similarity in world wide web traffic: evidence and possible cases // Proc. of the 1996 ACM SIGMETRICS International Conference on Measurement and Modelling of Computer Systems. 1996. Vol. 4. Pp. 160–169.

[6] Crovella M., Kim G., Park K. On the relationship between file sizes, transport protocols, and self-similar network traffic // Proc. of the Fourth International Conference on Network Protocols (ICNP'96). 1996. Pp. 171–180.

[7] Feldmann A., Gilbert A.C., Willinger W. Data networks as cascades: Investigating the multifractal nature of Internet WAN traffic // Proc. of ACM SIGCOMM T98. 1998. Pp. 42–55.

[8] Jagerman D.L., Melamed B., Willinger W. Stochastic modelling of traffic processes // Frontiers in Queuing: Models, Methods and Problems. 1996. Pp. 271–310.

[9] Heath D., Resnick S., Samorodnitsky G. Heavy tails and long range dependence in on/off processes and associate fluid models // Mathematics of Operations Research. 1998. Vol. 23, № 1. Pp. 125–165.

[10] Leland W. E., Taqqu M. S., Willinger W., Willson D.V. On the self–similar nature of Ethernet traffic (Extended version) // IEEE/ACM Transactions on Networking. 1994. Vol. 2. Pp. 1–15.

[11] Mikosch Th., Resnick S., Rootzen H., Stegeman A. Is network traffic approximated by stable Levy motion or fractional Brownian motion? // Annals of Applied Probability. 2002. Vol. 12, № 1. Pp. 23–68.

[12] Petrov V.V. Limit Theorems of Probability Theory. Oxford University Press, Oxford, 1995.

[13] Taqqu M. S., Willinger W., Sherman R. Proof of a fundamental result in self–similar traffic modeling // ACM SIGCOMM Computer Communication Review. 1997. Vol. 27, № 2. Pp. 5–23.

[14] Taqqu M.S., Teverovsky V., Willinger W. Is network traffic self–similar or multifractal? // Fractals. 1997. Vol. 5. Pp. 63–73.

Библиографическая ссылка

Сидорова О.И. ON/OFF–модель трафика с неоднородными источниками в режиме «быстрого роста числа соединений» // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 2. С. 75–94.

Сведения об авторах

1. **Сидорова Оксана Игоревна**
доцент кафедры математической статистики и системного анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ, ПМиК.

ON/OFF MODEL WITH HETEROGENOUS SOURCES UNDER FAST GROWTH CONDITION

Sidorova Oksana Igorevna
Associate professor of Mathematical Statistics and System Analysis department, Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU.

Received 04.02.2015, revised 24.02.2015.

Modern high–speed communication networks are capable to transmit data streams (voice mail, multimedia files, text information, etc.) with different requirements to the network parameters. Providing the required level of quality of service for each application and user in this case often leads to serious problems in the effective redistribution of limited network resources. Hence, the development of an adequate traffic models and investigation their properties, is an important task of network engineering. Of particular interest is to study non homogenous traffic and its influence on system performance. In this paper we consider asymptotic behavior of cumulative input process in *ON/OFF*–model with a heterogenous distributions of active period lengths under *Fast Growth Condition* regime and specify conditions under which the source of any type can affect the performance of telecommunication system.

Keywords: long–range dependency, heavy–tailed distributions,*ON/OFF* model, fractional brownian motion, Hurst exponent.

Bibliographic citation

Sidorova O.I. On/off model with heterogenous sources under fast growth condition. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2015, no. 2, pp. 75–94. (in Russian)