КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

УДК 517.51

ОПЕРАТОРЫ КЛАССА S_2 НА ОСНОВЕ КОНСТРУКЦИИ КОРОВКИНА С НАИЛУЧШИМ ПОРЯДКОМ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Ершова Е.М.
Кафедра функционального анализа и геометрии

Поступила в редакцию 10.05.2015, после переработки 29.05.2015.

На основе линейного положительного оператора, полученного с помощью конструкции Коровкина, строятся операторы класса S_2. Получены оценки приближения ими непрерывно дифференцируемых функций.

Ключевые слова: линейный положительный оператор, приближение функций, оператор класса S_2.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 2. С. 127–134.

1. Введение

В работе [1] П.П. Коровкин изучал операторы класса S_{2m}, то есть операторы

$$L_n^{[2m]}(f;x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_n^*(t)dt,$$

ядро $K_n^*(t)$ у которых $2m$ раз меняет знак на отрезке $[-\pi;\pi]$, и доказал, что они могут приближать $(2m+2)$ раза непрерывно дифференцируемые функции с порядком $O\left(\frac{1}{n^{2m+2}}\right)$, но не выше.

Для построения операторов класса S_2 возьмем исходное четное положительное ядро $K_n(t) = \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_{k,n}\cos kt$ и умножим его на $(\cos t - \cos\alpha)$, где $\alpha \in (0;\pi)$, то есть будем рассматривать оператор

$$\begin{aligned} L_n^{[2]}(f,x) &= \frac{1}{\Delta_n^{[2]}}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_n(t)(\cos t - \cos\alpha)\,dt = \\ &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n+1}\rho_k^{(n)}\cos kt\right]dt. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\Delta_n^{[2]}$ — нормирующий множитель, а $\rho_k^{(n)}$ — множители суммирования.

Требуется подобрать α так, чтобы полученный при этом оператор (1) имел более хорошие аппроксимативные свойства, чем исходный положительный оператор.

Это достигается при выполнении условия

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_{3,n} - \lambda_{1,n} + (1-\lambda_{2,n})\left(\frac{1-\lambda_{2,n}}{1-\lambda_{1,n}} - 2\right)}{1 - 2(\lambda_{1,n})^2 + \lambda_{2,n}} = 0 \tag{2}$$

(см. [2]), где $\lambda_{k,n}$ — множители суммирования исходного положительного оператора.

Одна из задач теории операторов класса S_2, оказавшейся довольно трудной, состоит в подборе α так, чтобы для оператора (1) не просто выполнялось условие (2), но чтобы он имел наилучший возможный для оператора класса S_2 порядок приближения, то есть порядок $O\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

В данной работе рассмотрим два подхода к построению таких операторов.

2. Линейный положительный оператор

В качестве исходного положительного оператора рассмотрим конструкцию Фейера-Коровкина (см. [3])

$$L_n(f,x) = \frac{1}{\Delta_n}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left|\sum_{k=0}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)e^{ikt}\right|^2 dt, \tag{3}$$

где $\Delta_n = 2\pi \sum\limits_{s=0}^{n} \varphi^2(\frac{s}{n}) \neq 0$, $\varphi \in C_{[0;1]}$.

Оператор (3) является линейным положительным оператором. Для дальнейшего разложим ядро в тригонометрический полином, то есть представим оператор (3) в виде

$$L_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{n}\lambda_{k,n}\cos(kt)\right] dt,$$

где $\lambda_{k,n}$ – множители суммирования, вычисляемые по формулам (см. [3]):

$$\lambda_{k,n} = \frac{A_{k,n}}{A_n}, \quad A_n = \sum_{s=0}^{n}\varphi^2\left(\frac{s}{n}\right), \quad A_{k,n} = \sum_{s=0}^{n-k}\varphi\left(\frac{s}{n}\right)\varphi\left(\frac{s+k}{n}\right).$$

Рассмотрим линейный положительный оператор, получающийся из (3) при $\varphi(t) = t^4(1-t)^4$, $t \in [0;1]$.

Получим:

$$\begin{aligned} L_n(f,x) &= \frac{1}{\Delta_n}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left|\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4\left(1-\frac{k}{n}\right)^4 e^{ikt}\right|^2 dt = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\lambda_{k,n}\cos(kt)\right] dt. \end{aligned} \tag{4}$$

Множители суммирования $\lambda_{k,n}$ оператора (4) имеют вид (см. [4]):

$$\begin{aligned}\lambda_{k,n} = {} & \frac{1}{7n(-1551693 + 2042040n^2 - 516868n^4 + 26520n^6 + n^{16})}(n-k)(n-k+1)\times \\ & \times (n-k-1)(10861851 + 185647n^4 + 7k^8 + 7k^{10} + 7k^6 + 185647k^4 - \\ & - 3432429k^2 + 7k^{12} + 7k^{14} + 7n^8 + 7n^{10} + 7n^{12} + 7n^{14} - 3432429n^2 + 7n^6 + \\ & + 14011998nk - 2640638n^3k + 7235888n^2k^2 - 2640638nk^3 - 663269k^4n^2 + \\ & + 51128k^5n + 63k^7n + 146571k^4n^4 + 247k^6n^2 - 48077k^5n^3 - 224k^4n^8 - \\ & - 48077k^3n^5 + 1688368k^3n^3 + 247k^2n^6 - 663269k^2n^4 + 63kn^7 + 51128kn^5 + \\ & + 3k^{10}n^4 - 224k^8n^4 - 128k^6n^4 - 128k^4n^6 + 3k^4n^{10} - 336k^5n^5 + 32k^5n^7 + \\ & + 416k^6n^6 + 32k^7n^5 + 128k^8n^6 + 385k^9n^5 - 768k^7n^7 + 128k^6n^8 + 385k^5n^9 + \\ & + 49k^9n + 128k^8n^2 + 112k^7n^3 + 112k^3n^7 + 128k^2n^8 + 49kn^9 + 21kn^{13} + 35kn^{11} - \\ & - 134k^3n^{11} - 95k^3n^9 - 26k^2n^{12} + 37k^2n^{10} + 21k^{13}n - 26k^{12}n^2 - 134k^{11}n^3 + \\ & + 35k^{11}n + 37k^{10}n^2 - 95k^9n^3).\end{aligned} \tag{5}$$

Для оператора (4) в работе [4] было получено

Следствие 3. *Если функция f имеет конечную обобщенную вторую производную в точке x, то*

$$\lim_{n\to\infty} n^2[L_n(f,x) - f(x)] = \frac{68}{7}D^2 f(x).$$

Это означает, что оператор (4) приближает непрерывно дифференцируемые функции с порядком $\frac{1}{n^2}$, то есть наилучшим возможным для линейных положительных операторов (см. [5]).

Из (5) нетрудно получить, что для оператора (3) условие (2) выполняется, значит, на основе этого оператора можно построить оператор класса S_2, обладающий более хорошими аппроксимативными свойствами.

3. Экстремальный оператор класса S_2

Можно строить оператор класса S_2, используя для нахождения его нулей идею Хоффа [6], то есть находя α из условия $1 - \rho_1^{(n)} = 0$, где $\rho_1^{(n)}$ — первый множитель суммирования оператора класса S_2, как это было сделано в работе [4]. Однако такой подход не гарантирует, что полученный оператор будет иметь наилучший возможный порядок приближения. Поэтому используем другой метод.

Построим на основе оператора (4) оператор $L_n^{[2,1]}(f,x)$ класса S_2 вида (1), способ нахождения нулей ядра которого основан на решении экстремальной задачи.

Из работы [7] известно, что порядок приближения дифференцируемых функций операторами (1) определяется порядками стремления к нулю разностей $1-\rho_1^{(n)}$ и $1 - \rho_2^{(n)}$.

Поэтому положим

$$\delta_n(\gamma) = \left(1 - \rho_1^{(n)}\right)^2 + \left(1 - \rho_2^{(n)}\right)^2, \quad \text{где} \quad \gamma = \cos\alpha,$$

и будем при закрепленном n искать наименьшее значение $\delta_{n,1}(\gamma)$ при условии, что $-1 \leqslant \leqslant \gamma \leqslant 1$.

Полученное таким образом α даст экстремальный оператор класса S_2 для заданного положительного ядра $\{K_n(t)\}$ (см. [8]).

В работе [8] было получено выражение для γ через множители суммирования исходного положительного оператора (4):

$$\gamma = \lambda_{1,n} - \Bigg[2\left(1 - \lambda_{1,n}\right)\left(\lambda_{2,n} - 2\left(\lambda_{1,n}\right)^2 + 1\right) + 2\left(1 - \lambda_{2,n}\right)\Big(\lambda_{1,n} - 2\lambda_{1,n}\lambda_{2,n} + \\ + \lambda_{3,n}\Big)\Bigg]^{-1}\left[\left(\lambda_{2,n} - 2\left(\lambda_{1,n}\right)^2 + 1\right)^2 + \left(\lambda_{1,n} - 2\lambda_{1,n}\lambda_{2,n} + \lambda_{3,n}\right)^2\right]. \tag{6}$$

Тогда из (5) и (6) получаем, что

$$\begin{aligned}
\cos\alpha = \big(&-353531374981187n^{26} + 7809294463665303609 0n^{7} + 16371875295242002235 70n^{5} + \\
&+ 3023620126111191076470n - 3688018292720647525374n^{4} - 264034534152849390911 6n^{8} + \\
&+ 1103699237364426302989n^{10} - 262272641980369327139n^{12} + 15581807443069633929 9n^{14} + \\
&+ 7375921464016245802410n^{2} + 2813135317557655238190n^{6} - 4907484279567139159890n^{3} - \\
&- 71536343833651346253n^{16} + 4730828796275198566 95n^{9} - 2900461029856868327 85n^{11} - \\
&- 387510925126080605 85n^{13} + 9055526957298716895n^{15} + 2133369227239963713 0n^{17} - \\
&- 23588143188409800n^{23} + 579932959286100420n^{21} + 4066804645572528 36n^{20} + \\
&+ 8822333274857910n^{24} + 9807360176726052684n^{18} - 123157102217598876n^{22} - \\
&- 6648129902506782690n^{19} + 47060032522237n^{28} + 621817649488035n^{25} - \\
&- 79397753079645n^{27} + 10433405917935n^{29} + 8465493651615n^{31} - 305762667210n^{33} - \\
&- 19948986119909n^{30} - 994171185970n^{32} + 9699900210n^{35} - 152612460n^{37} + \\
&+ 80650658048n^{34} - 4240935856n^{36} + 140308640n^{38} - 2811400n^{40} + 32912n^{42} - \\
&- 580912656732111070867 5\big)/\big(-122252786188940n^{26} + 590052460281191062155n^{7} - \\
&- 1151059571746460481105n^{5} - 575768739864647203875n - 505176443817426010917n^{4} - \\
&- 1037683533992303640 77n^{8} + 3286278739017014482n^{10} - 3055773183974409057 8n^{12} + \\
&+ 279653184261780255 84n^{14} + 228871174864813433883n^{2} + 409980345641410924359n^{6} + \\
&+ 1326530876467914702585n^{3} - 89511846726234841 44n^{16} - 314896434328248387615n^{9} + \\
&+ 179804604746210989545n^{11} - 63901420073267511735n^{13} + 8294630641464712545n^{15} + \\
&+ 1443324944287711485n^{17} - 4047711320888235n^{23} + 60493442742217485n^{21} + \\
&+ 216011990856833 19n^{20} + 1489750765893219n^{24} + 103242875748723505 5n^{18} - \\
&- 12998051716448385n^{22} - 556403410254006315n^{19} + 13006816968400n^{28} +
\end{aligned} \tag{7}$$

$+246859518680775n^{25} - 21555653264145n^{27} + 738801918855n^{29} + 604436287455n^{31} -$

$-39505275810n^{33} - 1748075777942n^{30} - 49056834046n^{32} + 2941348410n^{35} -$

$-152612460n^{37} + 8698670384n^{34} - 949768000n^{36} + 72726608n^{38} - 1922776n^{40} +$

$+32912n^{42} - 22691814562735718400\big).$

Множители суммирования $\rho_k^{(n)}$ оператора $L_n^{[2,1]}(f,x)$ вычисляются по формуле Бутцера-Штарка [9]:

$$\rho_k^{(n)} = \frac{\lambda_{k-1,n} - 2\lambda_{k,n}\cos\alpha + \lambda_{k+1,n}}{2(\lambda_{1,n} - \cos\alpha)}. \tag{8}$$

Ввиду большой громоздкости приведем не общую формулу, а асимптотическое равенство:

$$\rho_k^{(n)} = 1 - \frac{294k^2(17k^2-65)}{121n^4} + O\left(\frac{1}{n^6}\right), \quad n \to \infty.$$

При этом

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\varrho_1^{(n)}\right)^2 + \left(1-\varrho_2^{(n)}\right)^2\right]n^8 = \frac{211595328}{14641}. \tag{9}$$

Получим теперь оценку приближения построенным оператором непрерывно дифференцируемых функций.

Воспользуемся теоремой 2 из [2]:

Теорема 2*. *Если* $f \in C_{2\pi}^4$ *и*

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{4}(\rho_3^{(n)}-1) - \tfrac{1}{2}(\rho_2^{(n)}-1)(2+\cos\alpha) + (\rho_1^{(n)}-1)\left(\tfrac{7}{4}+2\cos\alpha\right) = \\ &= o\left(\tfrac{1}{2}(\rho_2^{(n)}-1) - (\rho_1^{(n)}-1)(1+\cos\alpha)\right),\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}L_n^{[2]}(f,x) - f(x) = \Bigg\{ &- f^{(2)}(x)(\rho_1^{(n)}-1) + +\frac{1}{6}\left(f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x)\right)\times \\ &\times\left[\frac{\rho_2^{(n)}-1}{2} - (1+\cos\alpha)(\rho_1^{(n)}-1)\right]\Bigg\}\big(1+o(1)\big).\end{aligned}$$

Из (7) и найденного выражения для множителей суммирования имеем:

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{4}(\rho_3^{(n)}-1) - \tfrac{1}{2}(\rho_2^{(n)}-1)(2+\cos\alpha) + (\rho_1^{(n)}-1)\left(\tfrac{7}{4}+2\cos\alpha\right) = O\left(\tfrac{1}{n^6}\right); \\ &\tfrac{1}{2}(\rho_2^{(n)}-1) - (\rho_1^{(n)}-1)(1+\cos\alpha) = O\left(\tfrac{1}{n^4}\right).\end{aligned}$$

Тогда условия теоремы 2* выполнены, и для построенного экстремального оператора класса S_2 справедлива

Теорема 1. *Если* $f \in C_{2\pi}^4$*, то равномерно на* $\boldsymbol{R}$

$$\lim_{n\to\infty} n^4[L_n^{[2,1]}(f,x) - f(x)] = -\frac{19110}{121}f^{(2)}(x) - \frac{4998}{121}f^{(4)}(x).$$

4. Оператор класса S_2 по методу Бутцера-Штарка

Используем для построения еще одного оператора класса S_2 на основе оператора (4) идею Бутцера-Штарка [9] подбора α из условия $1-\rho_1^{(n)} = O\left(\frac{1}{n^4}\right), \quad n\to\infty$.

Согласно (8)

$$1-\rho_1^{(n)} = 1-\frac{1+\lambda_{2,n}-2\lambda_{1,n}\cos\alpha}{2(\lambda_{1,n}-\cos\alpha)} = \frac{2\lambda_{1,n}-1-\lambda_{2,n}-2(1-\lambda_{1,n})\cos\alpha}{2(\lambda_{1,n}-\cos\alpha)}. \qquad (10)$$

Раскладывая (10) в ряд с учетом (5) и того, что $\cos\alpha = 1-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^4}{24}+\dots$, и подставляя $\cos\alpha = \frac{a}{n}$, получаем:

$$1-\rho_1^{(n)} = -\frac{\frac{816a^2-44064}{n^2}+\frac{636480-3672a^2-68a^4}{n^4}+O\left(\frac{1}{n^6}\right)}{1632-84a^2+\frac{7a^4-7344}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)} = O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

при $n\to\infty$ в том случае, когда

$$\begin{cases} -87120+14520a^2=0, \\ 1632-84a^2\neq 0, \end{cases}$$

то есть $a=\pm\sqrt{54}$ или $\cos\alpha = \cos\frac{\sqrt{54}}{n}$.

Далее по формуле (8) находим множители суммирования оператора $L_n^{[2,2]}(f,x)$ класса S_2. Ввиду их громоздкости приведем только асимптотическое равенство:

$$\rho_k^{(n)} = 1-\frac{4998k^2(k^2+1)}{121n^4}+O\left(\frac{1}{n^6}\right), \quad n\to\infty.$$

При этом

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\varrho_1^{(n)}\right)^2+\left(1-\varrho_2^{(n)}\right)^2\right]n^8 = \frac{10091921616}{14641}. \qquad (11)$$

Сравнивая с (9), видим, что для оператора $L_n^{[2,1]}(f,x)$ это выражение значительно меньше.

Из найденных выражений для $\rho_k^{(n)}$ и $\cos\alpha$ получаем, что для оператора $L_n^{[2,2]}(f,x)$ выполнены условия теоремы 2 из [2]. Тогда для него справедлива

Теорема 2. *Если $f\in C_{2\pi}^4$, то равномерно на $\boldsymbol{R}$*

$$\lim_{n\to\infty} n^4[L_n^{[2,1]}(f,x)-f(x)] = \frac{4998}{121}\left(f^{(2)}(x)-f^{(4)}(x)\right).$$

Заключение

Таким образом, построенные в статье операторы $L_n^{[2,1]}(f,x)$ и $L_n^{[2,2]}(f,x)$ приближают четырежды непрерывно дифференцируемые функции с наилучшим возможным для операторов класса S_2 порядком $O\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

Все вычисления в работе выполнены при помощи системы Maple.

Список литературы

[1] Коровкин П.П. О порядке приближения функций линейными полиномиальными операторами класса S_m // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. Академия наук Азербайджанской ССР, 1965. С. 163–166.

[2] Ершова Е.М. Оптимальные операторы классов S_2 и S_4 и их асимптотические свойства // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 2002. С. 69–76.

[3] Коровкин П.П. Асимптотические свойства положительных методов суммирования рядов Фурье // Успехи математических наук. 1960. Т. 15, № 1. С. 207–212.

[4] Ершова Е.М. Оператор класса S_2 на основе конструкции Коровкина // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2013. № 4(31). С. 119–125.

[5] Коровкин П.П. Линейные операторы и теория приближений. М.: Физматлит, 1959. 213 с.

[6] Hoff J.C. Approximation with kernels of finite oscillations. II. Degree of approximation // Journal of Approximation Theory. 1974. Vol. 12, № 2. Pp. 127–145.

[7] Баскаков В.А. Об условиях и порядке приближения функций операторами классов S_{2m} // Математические заметки. 2000. Т. 67, № 5. С. 654–661.

[8] Ершова Е.М. Экстремальные операторы классов S_{2m} // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 2003. С. 88–93.

[9] Butzer P.L., Stark E.L. On a trigonometric convolution operator with kernel having two zeros of simple multiplicity // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. 1969. Vol. 20. Pp. 451–461.

Библиографическая ссылка

Ершова Е.М. Операторы класса S_2 на основе конструкции коровкина с наилучшим порядком приближения // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 2. С. 127–134.

Сведения об авторах

1. **Ершова Елена Михайловна**
   доцент кафедры функционального анализа и геометрии Тверского госуниверситета.

   170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ, математический факультет. E-mail: elersh@list.ru.

THE OPERATORS FROM THE CLASS S_2 BASED ON KOROVKIN'S DESIGN WITH THE BEST ORDER OF APPROXIMATION

Ershova Elena Mikhaylovna
Associate Professor at Functional Analysis and Geometry department,
Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str. E-mail: elersh@list.ru.

Received 10.05.2015, revised 29.05.2015.

Operators of class S_2 are construct on the basis of positive linear operators obtained with the help of Korovkin's design. We obtain estimates of approximation with its help of continuously differentiable functions.

Keywords: linear positive operator, approximation of functions, operators from the class S_2.

Bibliographic citation

Ershova E.M. The operators from the class S_2 based on Korovkin's design with the best order of approximation. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2015, no. 2, pp. 127–134. (in Russian)