УДК 517.54

РЕГУЛЯРНОСТЬ УБЫВАНИЯ ПОРЯДКА ВЫПУКЛОСТИ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ[1]

Граф С.Ю., Самойлова Я.И.
Кафедра математического анализа

Поступила в редакцию 10.06.2015, после переработки 23.06.2015.

В работе доказывается теорема регулярности убывания порядка выпуклости и родственных функционалов в классе однолистных нормированных конформных отображений единичного круга на выпуклые области. Точность результата иллюстрируется примерами.

Ключевые слова: конформное отображение, порядок выпуклости, теоремы регулярности.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 2. С. 135–145.

Введение

Под теоремами регулярности в геометрической теории функций принято понимать утверждения, аналогичные хорошо известным теоремам о монотонности роста или убывания модуля производной $|f'(z)|$ в классе S однолистных конформных отображений $f(z)$ единичного круга $\Delta = \{z : |z| < 1\} \subset \mathbb{C}$, нормированных условиями $f(0) = f'(0) - 1 = 0$.

Особое внимание этой тематике уделяется, начиная с 60-ых годов XX века, в связи с развитием теории линейно-инвариантных семейств аналитических функций (см., например, [1, 2]). На сегодняшний день теоремы регулярности доказаны для большого количества функционалов как в классах аналитических функций (см., например, [3-5]), так и в более широких семействах гармонических отображений [6, 7].

Впервые теоремы регулярности в классе S были получены в работах В.К.Хеймана, Я. Кшижа [8, 9] во второй половине XX века. Классическим примером теоремы регулярности является следующий результат в классе S:

Теорема 1 (теорема регулярности роста в S [8,9]). *Пусть $f \in S$. Тогда*

1. *функции $\max\limits_{|z|=r}|f'(z)|\,\frac{(1-r)^3}{1+r}$ и $\left|f'(re^{i\varphi})\right|\frac{(1-r)^3}{1+r}$ не возрастают по $r \in (0,1)$ при любом $\varphi \in [0; 2\pi)$;*
2. *существует $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ такое, что*

$$\lim_{r\to 1-}\left(|f'(re^{i\varphi_0})|\frac{(1-r)^3}{1+r}\right) = \lim_{r\to 1-}\left(\max_{|z|=r}|f'(z)|\frac{(1-r)^3}{1+r}\right) = \delta \in [0,1];$$

[1] Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №14-01-92692).

3. $\delta = 1$ только для вращения функции Кебе $K_\theta(z) = \frac{z}{(1-e^{-i\theta}z)^2}$, где $\theta \in \mathbb{R}$ – фиксированное число.

1. Теорема регулярности порядка выпуклости в классе C

Рассмотрим подкласс C класса S, состоящий из функций $f \in S$, отображающих круг Δ на выпуклые области. Критерием выпуклости и однолистности локально однолистной функции f в Δ является условие $\mathrm{Re}\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}+1\right\} \geq 0$ для всех $z \in \Delta$ (см., например, [10]).

Пусть β – фиксированное число из отрезка $[0,1]$. Напомним, что функция $f(z) \in S$ называется

1. *β-выпуклой в точке* z_0, если $\mathrm{Re}\left\{z_0\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}+1\right\} \geq \beta$;
2. *β-выпуклой в круге* Δ, если она β-выпукла в любой точке $z \in \Delta$;
3. *порядком выпуклости* функции f в круге $|z| \leq r$ называется число

$$\beta(r) = \min_{|z|=r} \mathrm{Re}\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}+1\right\}.$$

Известно (см., например, [10]), что для любой функции $f \in C$ и любой точки $z \in \Delta$, $|z| = r$, справедлива точная оценка

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}\right| \leqslant \frac{2r}{1-r^2}. \tag{1}$$

Из неравенства (1) следует, что для любой функции $f(z) \in C$ порядок выпуклости $\beta(r) \geq \frac{1-r}{1+r}$.

Следующая теорема позволяет дополнить эту оценку утверждением о регулярности убывания порядка выпуклости с ростом r.

Теорема 2. *Пусть $f \in C$. Тогда*

1) величины Re $\left\{re^{it}\frac{f''(re^{it})}{f'(re^{it})}+1\right\}\frac{1+r}{1-r}$ и $\beta(r)\frac{1+r}{1-r}$ не убывают по r на интервале $(0,1)$ для любого $t \in [0,2\pi)$;

2) существуют постоянные $\delta \in [1,+\infty]$ и t_0 такие, что

$$\lim_{r\to 1-}\beta(r)\frac{1+r}{1-r} = \lim_{r\to 1-} Re\left(re^{it_0}\frac{f''(re^{it_0})}{f'(re^{it_0})}+1\right)\frac{1+r}{1-r} = \delta;$$

1) величины Re $\left\{re^{it}\frac{f''(re^{it})}{f'(re^{it})}+1\right\}\frac{1-r}{1+r}$ и $\max\limits_{|z|=r}$ Re $\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}+1\right\}\frac{1-r}{1+r}$ не возрастают по r на интервале $(0,1)$ для любого $t \in [0,2\pi)$;*

2) существуют постоянные $\delta^* \in [0,1)$ и t_0^* такие, что*

$$\lim_{r\to 1-}\max_{|z|=r} Re\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}+1\right\}\frac{1-r}{1+r} = \lim_{r\to 1-} Re\left(re^{it_0^*}\frac{f''(re^{it_0^*})}{f'(re^{it_0^*})}+1\right)\frac{1-r}{1+r} = \delta^*;$$

3, 3) $\delta = \delta^* = 1$ тогда и только тогда, когда $f(z) = \frac{z}{1+e^{it}z}$ и $t = t_0$, $t = t_0^*$ для случаев 2) и 2*), соответственно.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $f \in C$.

1) Докажем, что $\operatorname{Re}\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}+1\right\}\frac{1+r}{1-r}$ не убывает по r для любого $z=re^{it}$ на интервале $(0,1)$, то есть

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\operatorname{Re}\left\{re^{it}\frac{f''(re^{it})}{f'(re^{it})}+1\right\}\frac{1+r}{1-r}\right) \geqslant 0.$$

Непосредственными вычислениями доказывается, что

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\operatorname{Re}\left\{re^{it}\frac{f''(re^{it})}{f'(re^{it})}+1\right\}\frac{1+r}{1-r}\right) = \frac{2}{(1-r)^2}\operatorname{Re}\left(z\frac{f''(z)}{f'(z)}+1\right)+$$
$$+\frac{1+r}{1-r}\operatorname{Re}\left\{z\frac{f'''(z)}{f'(z)}-z\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2+\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\}e^{it}=$$
$$=\frac{1}{r}\frac{1+r}{1-r}\operatorname{Re}\left\{z^2\frac{f'''(z)}{f'(z)}-\left(z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\left(1+\frac{2r}{z}\right)+\frac{2r}{z}\right\}.$$

Фиксируем точку z. Тогда зависящая от ζ функция

$$\frac{f(\frac{z+\zeta}{1+\bar{z}\zeta})-f(z)}{f'(z)(1-|z|^2)}=\zeta+A_2\zeta^2+A_3\zeta^3+\dots$$

однолистна, отображает круг Δ на выпуклую область и принадлежит классу C. В терминах коэффициентов A_k получаем:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\operatorname{Re}\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}+1\right\}\frac{1+r}{1-r}\right)=$$
$$=\frac{1}{r}\frac{1+r}{1-r}\operatorname{Re}\left\{\frac{2z}{(1-r^2)^2}(3zA_3-2zA_2^2+(1+r)^2A_2)+\frac{2r(1+r+r^2)}{(1-r^2)^2}\right\}.$$

Порядок выпуклости функции f в точке $z=re^{it}$ совпадает с порядком выпуклости функции $e^{-it}f(e^{it}z)$ в точке $z=r$. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что $z=r\in(0,1)$, то есть

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\operatorname{Re}\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}+1\right\}\frac{1+r}{1-r}\right)=$$
$$=\frac{2}{(1-r^2)}\frac{1}{(1-r^2)^2}\operatorname{Re}\left\{(1+r)^2(1+A_2)+r(3A_3-2A_2^2-1)\right\}.$$

Известно (см., например, [10]), что в классе C справедливы точные оценки $|A_2|\le 1$ и $|a_3-a_2^2|\le\frac{1}{3}(1-|a_2|^2)$. Следовательно, $\operatorname{Re}3(A_3-A_2^2)\geqslant|A_2|^2-1$.

С учетом последней оценки получаем:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\operatorname{Re}\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}+1\right\}\frac{1+r}{1-r}\right)\geqslant$$
$$\ge\frac{2}{(1-r^2)}\frac{1}{(1-r^2)^2}\operatorname{Re}\left\{(1+r)^2(1+A_2)+r(|A_2|^2+A_2^2-2)\right\}.$$

Покажем, что правая часть последнего неравенства неотрицательна при любом $r \in (0,1)$. Пусть $A_2 = ae^{i\varphi}$, где $a \in (0,1)$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Следовательно, $\operatorname{Re} A_2 = a\cos\varphi$ и $\operatorname{Re} A_2^2 = a^2(2\cos^2\varphi - 1)$, тогда

$$\operatorname{Re}\left\{(1+r)^2(1+A_2) + r(|A_2|^2 + A_2^2 - 2)\right\} =$$
$$= (1+r)^2(1+a\cos\varphi) + r(a^2 + 2a^2\cos^2\varphi - a^2 - 2) =$$
$$= (1+a\cos\varphi)\left((1+r)^2 - 2r(1-a\cos\varphi)\right) \geqslant (1-a)(1-r)^2 \geq 0$$

для любого $a \in (0,1)$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\operatorname{Re}\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)} + 1\right\}\frac{1+r}{1-r}\right) \geqslant 0.$$

Следовательно, $\operatorname{Re}\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)} + 1\right\}\frac{1+r}{1-r}$ не убывает по r для всех точек $z = re^{it}$.

Теперь докажем, что $\beta(r)\frac{1+r}{1-r}$ не убывает по r для всех точек $r \in (0,1)$.

Определим величину $t(r)$ так, что

$$\operatorname{Re}\left\{re^{it(r)}\frac{f''(re^{it(r)})}{f'(re^{it(r)})} + 1\right\} = \min_{t\in[0.2\pi]}\operatorname{Re}\left\{re^{it}\frac{f''(re^{it})}{f'(re^{it})} + 1\right\} = \beta(r).$$

Для любых $r, r_1, 0 < r < r_1 < 1$, в силу доказанного выше справедливы оценки:

$$\beta(r)\frac{1+r}{1-r} = \operatorname{Re}\left\{re^{it(r)}\frac{f''(re^{it(r)})}{f'(re^{it(r)})} + 1\right\}\frac{1+r}{1-r} \leqslant$$
$$\leqslant \operatorname{Re}\left\{re^{it(r_1)}\frac{f''(re^{it(r_1)})}{f'(re^{it(r_1)})} + 1\right\}\frac{1+r}{1-r} \leqslant$$
$$\leqslant \operatorname{Re}\left\{r_1e^{it(r_1)}\frac{f''(r_1e^{it(r_1)})}{f'(r_1e^{it(r_1)})} + 1\right\}\frac{1+r_1}{1-r_1} = \beta(r_1)\frac{1+r_1}{1-r_1}.$$

Таким образом, выражение $\beta(r)\frac{1+r}{1-r}$ не убывает по r для всякой функции $f \in C$.

2) В классе выпуклых функций для $z = re^{it}$ справедлива следующая оценка, являющаяся непосредственным следствием из неравенства (1):

$$\frac{1-r}{1+r} \leqslant \operatorname{Re}\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)} + 1\right\} \leqslant \frac{1+r}{1-r}. \tag{2}$$

Отсюда находим, что

$$\beta(r)\frac{1+r}{1-r} \geqslant 1$$

и, как показано выше, выражение слева не убывает. Следовательно, существует предел

$$\lim_{r\to 1-}\beta(r)\frac{1+r}{1-r} = \delta \in [1,\infty].$$

Докажем, что существует $t_0 \in \mathbb{R}$, для которого выполняется второй пункт теоремы.

Как и ранее определим $t(r)$ так, что

$$\beta(r) = \min_{t\in[0.2\pi]}\operatorname{Re}\left\{re^{it}\frac{f''(re^{it})}{f'(re^{it})} + 1\right\} = \operatorname{Re}\left\{re^{it(r)}\frac{f''(re^{it(r)})}{f'(re^{it(r)})} + 1\right\}.$$

Выберем такую возрастающую последовательность $r_n \in (0,1)$, что $r < r_n$ и $r_n \to 1-$ при $n \to \infty$. В силу ограниченности последовательности $t_n = t(r_n)$ без ограничения общности можно считать, что существует предел $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$.

Поскольку выражение $\mathrm{Re}\left\{re^{it}\frac{f''(re^{it})}{f'(re^{it})}+1\right\}\frac{1+r}{1-r}$ не убывает по $r \in (0,1)$ при каждом $t \in \mathbb{R}$, получим:

$$\beta(r)\frac{1+r}{1-r} = \min_{t\in[0.2\pi]} \mathrm{Re}\left\{re^{it}\frac{f''(re^{it})}{f'(re^{it})}+1\right\}\frac{1+r}{1-r} \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{Re}\left\{re^{it_n}\frac{f''(re^{it_n})}{f'(re^{it_n})}+1\right\}\frac{1+r}{1-r} \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{Re}\left\{r_n e^{it_n}\frac{f''(r_n e^{it_n})}{f'(r_n e^{it_n})}+1\right\}\frac{1+r_n}{1-r_n} = \beta(r_n)\frac{1+r_n}{1-r_n}.$$

Устремляя здесь n к бесконечности, в пределе приходим к оценкам

$$\beta(r)\frac{1+r}{1-r} \leqslant \mathrm{Re}\left\{re^{it_0}\frac{f''(re^{it_0})}{f'(re^{it_0})}+1\right\}\frac{1+r}{1-r} \leqslant \delta.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $r \to 1-$, получим

$$\lim_{r\to1-}\left[\mathrm{Re}\left\{re^{it_0}\frac{f''(re^{it_0})}{f'(re^{it_0})}+1\right\}\frac{1+r}{1-r}\right] = \delta.$$

1*) Докажем, что $\mathrm{Re}\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}+1\right\}\frac{1-r}{1+r}$ не возрастает по r для любого $z = re^{it}$ на интервале $(0,1)$, то есть

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\mathrm{Re}\left\{re^{it}\frac{f''(re^{it})}{f'(re^{it})}+1\right\}\frac{1-r}{1+r}\right) \le 0$$

для любого $z = re^{it}$.

Непосредственными вычислениями находим, что

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\mathrm{Re}\left\{re^{it}\frac{f''(re^{it})}{f'(re^{it})}+1\right\}\frac{1-r}{1+r}\right) =$$
$$= \frac{1}{r}\frac{1-r}{1+r}\mathrm{Re}\left\{z^2\frac{f'''(z)}{f'(z)} - \left(z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\left(1-\frac{2r}{1-r^2}\right) - \frac{2r}{1-r^2}\right\}.$$

Далее, по аналогии с доказательством пункта 1) показывается, что

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\mathrm{Re}\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}+1\right\}\frac{1-r}{1+r}\right) =$$
$$= \frac{2r}{(1-r^2)}\,\mathrm{Re}\left\{3rA_3 - 2rA_2^2(1-r)^2A_2 + r(1-r)^2 - 1\right\}.$$

Отсюда с учетом неравенства $|A_2| \le 1$ и соотношения $|a_3 - a_2^2| \le \frac{1}{3}(1-|a_2|^2)$ получаем

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\mathrm{Re}\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}+1\right\}\frac{1-r}{1+r}\right) \le$$
$$\le \frac{2r}{(1-r^2)}\,\mathrm{Re}\left\{r-1+r(A_2^2-|A_2|^2)+(1-r)^2(r+A_2)\right\}.$$

Покажем, что правая часть последнего неравенства неположительна при любом $r \in (0,1)$.

Пусть $A_2 = ae^{i\varphi}$, где $a \in (0,1)$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Следовательно, $\operatorname{Re} A_2 = a\cos\varphi$ и $\operatorname{Re} A_2^2 = a^2(2\cos^2\varphi - 1)$. Тогда справедливость доказываемого неравенства эквивалентна условию

$$2a^2r(\cos^2\varphi - 1) + (1-r)^2(r + a\cos\varphi) - (1-r) \leq 0. \tag{3}$$

Для доказательства последнего рассмотрим на $[0,1]\times[0,2\pi]$ функцию $F(a,\varphi) = (1-r)((1-r)(a\cos\varphi + r) - 1)$ и найдем ее максимум. Непосредственными вычислениями устанавливается, что при $a \in (0,1)$ и $\varphi \in [0,2\pi]$

$$\max F(a,\varphi) = -r^2(1-r) < 0.$$

Следовательно, левая часть неравенства (3) имеет вид

$$2a^2r(\cos^2\varphi - 1) + F(a,\varphi) \leqslant 2a^2r(\cos^2\varphi - 1) - r^2(1-r) < 0.$$

Таким образом, $\frac{\partial}{\partial r}\left(\operatorname{Re}\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)} + 1\right\}\frac{1-r}{1+r}\right) \leqslant 0$ и $\operatorname{Re}\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)} + 1\right\}\frac{1-r}{1+r}$ не возрастает по r для всех точек $z = re^{it}$.

Аналогично доказательству пункта 1) устанавливается, что

$$\max_{|z|=r}\operatorname{Re}\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)} + 1\right\}\frac{1-r}{1+r}$$

не возрастает по r для всякой функции $f \in C$.

2^*) Из неравенства (2) и критерия выпуклости отображения f видно, что $0 \leqslant \max\limits_{|z|=r}\operatorname{Re}\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)} + 1\right\}\frac{1-r}{1+r} \leq 1$ и, как отмечено выше, выражение слева не возрастает. Следовательно, существует предел

$$\lim_{r\to 1-}\left[\operatorname{Re}\left\{re^{it}\frac{f''(re^{it})}{f'(re^{it})} + 1\right\}\frac{1-r}{1+r}\right] = \delta^* \in [0,1].$$

Докажем, что существует $t_0^* \in \mathbb{R}$, для которого выполняется пункт 2^*).

Пусть величины $t(r)$ таковы, что

$$\max_{t\in[0,2\pi]}\operatorname{Re}\left\{re^{it}\frac{f''(re^{it})}{f'(re^{it})} + 1\right\} = \operatorname{Re}\left\{re^{it(r)}\frac{f''(re^{it(r)})}{f'(re^{it(r)})} + 1\right\}.$$

Выберем возрастающую последовательность $r_n \in (0,1)$, $r_n \to 1-$, $r < r_n$. Без ограничения общности можно считать, что $t_n = t(r_n) \to t_0^*$ при $n \to \infty$. Поскольку величина $\operatorname{Re}\left\{re^{it}\frac{f''(re^{it})}{f'(re^{it})} + 1\right\}\frac{1+r}{1-r}$ не возрастает по $r \in (0,1)$ при каждом $t \in \mathbb{R}$, получим:

$$\max_{t\in[0,2\pi]}\operatorname{Re}\left\{re^{it}\frac{f''(re^{it})}{f'(re^{it})} + 1\right\}\frac{1-r}{1+r} \geqslant \operatorname{Re}\left\{re^{it_n}\frac{f''(re^{it_n})}{f'(re^{it_n})} + 1\right\}\frac{1-r}{1+r} \geqslant$$
$$\geqslant \operatorname{Re}\left\{r_ne^{it_n}\frac{f''(r_ne^{it_n})}{f'(r_ne^{it_n})} + 1\right\}\frac{1-r_n}{1+r_n} = \max_{t\in[0,2\pi]}\operatorname{Re}\left\{r_ne^{it}\frac{f''(r_ne^{it})}{f'(r_ne^{it})} + 1\right\}\frac{1-r_n}{1+r_n}.$$

Устремляя здесь n к бесконечности, в пределе приходим к оценкам

$$\max_{t\in[0,2\pi]} \operatorname{Re}\left\{re^{it}\frac{f''(re^{it})}{f'(re^{it})}+1\right\}\frac{1+r}{1-r} \geqslant \operatorname{Re}\left\{re^{it_0^*}\frac{f''(re^{it_0^*})}{f'(re^{it_0^*})}+1\right\}\frac{1-r}{1+r} \geqslant \delta^*.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $r\to 1-$, получим

$$\lim_{r\to 1-}\left[\operatorname{Re}\left\{re^{it_0^*}\frac{f''(re^{it_0^*})}{f'(re^{it_0^*})}+1\right\}\frac{1-r}{1+r}\right] = \delta^*.$$

3) Продемонстрируем точность полученных выше оценок.

Пусть $\delta = 1$ для некоторой функции $f_0(z) \in C$. Так как $\operatorname{Re}\left\{re^{it_0}\frac{f_0''(re^{it_0})}{f_0'(re^{it_0})}+1\right\} \geq \frac{1-r}{1+r}$ и выражение слева не убывает по r, то

$$\operatorname{Re}\left\{re^{it_0}\frac{f_0''(re^{it_0})}{f_0'(re^{it_0})}+1\right\} \equiv \frac{1-r}{1+r},\ r\in(0,1). \tag{4}$$

Этому тождеству удовлетворяет функция $f_0(z) = z/(1+z)$ при $z = r$. Предположим, что некоторая функция $f_1 \in C$ также удовлетворяет равенству (4). Тогда для любого $r \in (0,1)$

$$\operatorname{Re} e^{it_0}\frac{f_1''(re^{it_0})}{f_1'(re^{it_0})} \equiv \frac{-2}{1+r}.$$

Устремляя в последнем равенстве r к $0+$, получаем

$$\operatorname{Re} e^{it_0}2a_2 = -2,\ \ 2|a_2|\cos(t_0+\arg a_2) = -2,$$

где $a_2 = {f_1}''(0)/2$. Равенство возможно, только если $|a_2| = 1$. Следовательно, в силу свойств класса C (см., например, [10]) $f_1(z) = z/(1+e^{i\theta}z)$.

3*) Пусть $\delta^* = 1$ для некоторой $f_0(z) \in C$. Так как $\operatorname{Re}\left\{re^{it_0}\frac{f_0''(re^{it_0})}{f_0'(re^{it_0})}+1\right\}\frac{1-r}{1+r} \leq 1$ и функция слева не возрастает по r, то

$$\operatorname{Re}\left\{re^{it_0}\frac{f_0''(re^{it_0})}{f_0'(re^{it_0})}+1\right\} \equiv \frac{1+r}{1-r},\ r\in(0,1).$$

Этому тождеству удовлетворяет функция $f_0(z) = z/(1-z)$ при $z = r$. Предположим, что этому же равенству удовлетворяет также другая функция $f_1 \in C$. Тогда аналогично пункту 3) получаем, что

$$\operatorname{Re} e^{it_0}\frac{f_1''(re^{it_0})}{f_1'(re^{it_0})} \equiv \frac{2}{1-r}.$$

Как и при доказательстве пункта 3) равенство возможно, только если $|a_2| = 1$. Следовательно, $f_1(z) = z/(1+e^{i\theta}z)$.

Теорема доказана. □

2. Примеры

Проиллюстрируем доказанную теорему.

1) Мебиусово преобразование $f(z) = \frac{z}{1-z}$ отображает круг Δ на полуплоскость $\{w : \operatorname{Re} w > -1/2\}$. Для данного отображения

$$\beta(r) = \min_{|z|=r} \operatorname{Re}\, \{z\, f''(z)/f'(z) + 1\} = \min_{|z|=r} \operatorname{Re} \frac{1+z}{1-z} = \frac{1-r}{1+r} \quad \text{при } z = -r,$$

то есть $\delta = 1$ и для $\beta(r)$ направление интенсивного убывания t_0 равно π (Рис. 1).

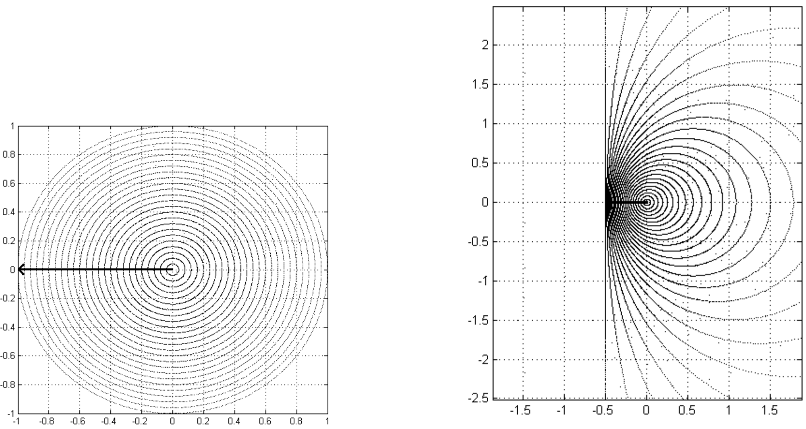

Рис. 1: Направление интенсивного убывания для $f(z) = \frac{z}{1-z}$ и образ круга Δ

2) Функция $f(z) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$ отображает круг Δ на полосу $\{w : |\operatorname{Im} w| < \pi/4\}$. Для данного отображения

$$z\frac{f''(z)}{f'(z)} + 1 = \frac{1+z^2}{1-z^2}, \quad \min_{|z|=r} \operatorname{Re} \frac{1+z^2}{1-z^2} = \frac{1-r^2}{1+r^2} \quad \text{при } z = \pm ir,$$

то есть $\delta = \infty$ и функция обладает двумя направлениями интенсивного убывания порядка выпуклости $t_0 = \pm\frac{\pi}{2}$ (см. Рис. 2).

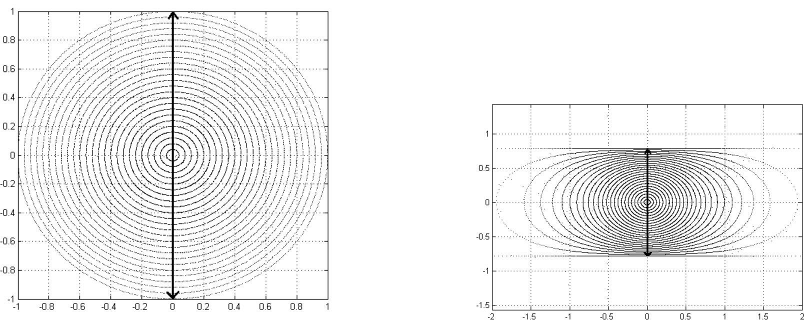

Рис. 2: Направления интенсивного убывания для $f(z) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$ и образ круга Δ

Заключение

В настоящей работе доказана точная теорема регулярности убывания порядка выпуклости конформного отображения в классе C нормированных выпуклых однолистных конформных отображений единичного круга, а также утверждения о регулярности убывания и роста родственных функционалов $\mathrm{Re}\left\{re^{it}\frac{f''(re^{it})}{f'(re^{it})}+1\right\}$ и $\max\limits_{|z|=r}\mathrm{Re}\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}+1\right\}$. В последующих работах предполагается получить аналогичные результаты в классе S, в линейно-инвариантных семействах аналитических функций, а также обобщить утверждения на линейно-инвариантные семейства гармонических отображений.

Список литературы

[1] Campbell D.M. Locally univalent function with locally univalent derivatives // Transactions of the American Mathematical Society. 1971. Vol. 162. Pp. 395–409.

[2] Лебедев Н.А. Принцип площадей в теории однолистных функций. М.: Наука, 1975. 336 с.

[3] Pommerenke Ch. Linear-invariante Familien analtischer Funktionen. I // Mathematische Annalen. 1964. Vol. 155, № 2. Pp. 108–154.

[4] Годуля Я., Старков В.В. Линейно-инвариантные семейства // Труды Петрозаводского государственного университета. Серия: Математика. 1998. № 5. С. 3–96.

[5] Ганенкова Е.Г. Теорема регулярности убывания в линейно-инвариантных семействах функций // Труды Петрозаводского государственного университета. Серия: Математика. 2006. № 13. С. 46–59.

[6] Ganenkova E.G., Starkov V.V. Regularity theorems for harmonic functions // Journal of Applied Analysis. Vol. 21, № 1. Pp. 25–36.

[7] Граф С.Ю. Теоремы регулярности для Якобиана в линейно- и аффинно-инвариантных семействах гармонических отображений // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 2014. С. 10–21.

[8] Krzyz J. On the maximum modulus of univalent functions // Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences. 1955. Vol. 101, № 3. Pp. 203–206.

[9] Хейман В.К. Многолистные функции. М.: Иностранная литература, 1960. 180 с.

[10] Duren P. Univalent functions. N.Y.: Springer-Verlag, 1983. 395 p.

Библиографическая ссылка

Граф С.Ю., Самойлова Я.И. Регулярность убывания порядка выпуклости конформных отображений // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 2. С. 135–145.

Сведения об авторах

1. **Граф Сергей Юрьевич**
доцент кафедры математического анализа Тверского госуниверситета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ, матфак.

2. **Самойлова Яна Игоревна**
магистрант кафедры математического анализа Тверского госуниверситета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ, матфак.

REGULARITY OF DECREASING OF CONVEXITY ORDER IN THE CLASS OF CONFORMAL MAPPINGS

Graf Sergey Yur'evich
Associate professor at Mathematical Analysis department, Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU.

Samoylova Yana Igorevna
Master student at Mathematical Analysis department, Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU.

Received 10.06.2015, revised 23.06.2015.

In the present paper the new regularity theorem of decreasing of the order of convexity and related functionals in the class of univalent normalized conformal mappings of the unit disk onto convex domains is proved. The sharpness of the result is illustrated by several examples.

Keywords: conformal mapping, order of convexity, regularity theorems.

Bibliographic citation

Graf S.Yu., Samoylova Ya.I. Regularity of decreasing of convexity order in the class of conformal mappings. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2015, no. 2, pp. 135–145. (in Russian)