ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

УДК 519.2

РАЗЛОЖЕНИЕ ДУБА-МЕЙЕРА ДЛЯ ЛОКАЛЬНЫХ СУБМАРТИНГАЛОВ[1]

Круглов В.М.
МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва

Поступила в редакцию 10.06.2015, после переработки 17.06.2015.

В статье построено разложение любого непрерывного справа локального субмартингала в виде суммы непрерывного справа локального мартингала и предсказуемого, локально интегрируемого возрастающего процесса. Разложение единственно с точностью до неразличимости. Доказательство основано на простом исследовании случайных процессов интегрируемой вариации. Подобные утверждения известны для регулярных справа локальных субмартингалов с более сложными доказательствами.

Ключевые слова: локальный мартингал, процесс интегрируемой вариации, разложение Дуба-Мейера.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 3. С. 33–44.

1. Введение

Имеется несколько подходов к построению стохастического интеграла. Один из популярных подходов основан на глубокой теореме Мейера [14], [15] о разложении субмартингала в виде суммы мартингала и интегрируемого, натурального возрастающего процесса. Позже Долеан-Дэд [6] обнаружила, что класс возрастающих натуральных процессов совпадает с классом предсказуемых возрастающих процессов. Доказательства теорем Мейера и Долеан-Дэд считаются трудными, так как они построены на предварительном нетривиальном исследовании аналитических множеств и теории емкостей. Были предприняты многочисленные поиски более простых доказательств. Первое упрощенное доказательство теоремы Мейера было предложено Рао [18]. Оно основано на глубокой теореме Данфорда-Петтиса о слабой компактности равномерно интегрируемых семейств случайных величин. Упрощение состояло в том, что никаких сведений об аналитических множествах и емкостях не требовалось. Доказательство Рао стало популярным и приведено во многих учебниках по случайным процессам. Подход Рао был модернизирован в статье Якубовского [8]. С помощью теоремы Комлоша [10] о сходимости почти

[1]Исследование поддержано грантом РНФ, проект №14-11-00364.

всюду чезаровских средних равномерно интегрируемых последовательностей случайных величин он построил разложение непрерывного справа субмартингала из класса Дуба в виде суммы непрерывного справа мартингала и предсказуемого возрастающего процесса. Бейглбок и др. [2] модернизировали идею Якубовского и предложили свое доказательство теоремы Мейера. Они доказали более простой аналог теоремы Комлоша и тем самым упростили доказательство теоремы Мейера. Все упомянутые доказательства используют аналогичное разложение субмартингала с дискретным параметром, предложенное Дубом [7]. Басс [1] предложил доказательство теоремы Мейера, основанное на классификации моментов остановки. Доказательство Басса не использует теорему Дуба о разложении субмартингала с дискретным параметром. Заслуживает упоминания доказательство теоремы Мейера, предложенное Чен [4]. Доказательство основано на исследовании последовательности специальных обратных стохастических дифференциальных уравнений. Известны модификации теоремы Мейера для субмартингалов со значениями в более общих пространствах по сравнению с вещественной прямой, например, [3]. Начало другому подходу к доказательству теоремы Мейера было положено в статье Сверчкова и Смирнова [17]. Идея состояла в том, чтобы представить субмартингал в виде условного математического ожидания от возрастающего случайного процесса. Сверчков и Смирнов реализовали свою идею в отношении ограниченных субмартингалов. Крылов [13] распространил теорему Сверчкова-Смирнова на положительные субмартингалы. Он использовал представление положительного субмартингала в виде условного математического ожидания для доказательства теоремы Мейера. Результат состоит в том, что дано новое доказательство теоремы Мейера о разложении Дуба-Мейера для положительных непрерывных справа субмартингалов из класса Дуба. Идея Сверчкова-Смирнова в полной своей общности реализована в статье Кашаевой и Круглова [9]. Разложение субмартингала в виде суммы мартингала и возрастающего процесса известно под названием *разложения Дуба-Мейера*. Имеются многочисленные обобщения разложения Дуба-Мейера на случай более общих случайных процессов, в частности, для локальных субмартингалов. Известные утверждения и их доказательства предполагают, что локальный субмартингал должен быть непрерывным справа и иметь пределы слева. В настоящей статье показано, что от этого дополнительного условия о наличии пределов слева можно отказаться. Известные доказательства теорем Мейера и Долеан-Дэд сопровождаются необходимыми исследованиями свойств случайных процессов конечной вариации. Методы исследования основаны на привлечении теории стохастического интегрирования. Синейде и Проттер [5] упростили часть оригинального доказательства теоремы Долеан-Дэд. В статье Круглова [12] предложен элементарный подход к исследованию свойств случайных процессов интегрируемой вариации. В качестве результата применения этого подхода даны простые доказательства непрерывности предсказуемых локальных мартингалов, доказаны теоремы о мартингалах интегрируемой вариации и дано элементарное доказательство теоремы Долеан-Дэд. Этот подход позволяет построить разложение Дуба-Мейера и доказать его единственность для непрерывных справа локальных субмартингалов. Если локальный мартингал почти всюду непрерывен, то члены разложения Дуба-Мейера также почти всюду непрерывны.

2. Необходимые подготовительные утверждения

Пусть даны полное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, а также расширенная и непрерывная справа фильтрация $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t \colon \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}, t \geq 0\}$. Вещественный случайный процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$ называется согласованным с фильтрацией, если для любого $t \geq 0$ случайная величина X_t измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_t$. Далее будут рассматриваться только вещественные случайные процессы. Поэтому слово *вещественный* будет опускаться. Случайный процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$ называется регулярным справа, если все его траектории непрерывны справа и имеют предел слева в каждой точке $t > 0$. Случайный процесс X называется субмартингалом (мартингалом) относительно фильтрации $\mathbb{F}$ или $\mathbb{F}$-субмартингалом ($\mathbb{F}$-мартингалом), если он согласован с фильтрацией, для любого $t \geq 0$ математическое ожидание $\mathbb{E}|X_t|$ конечно, для любых чисел $0 \leq s < t$ выполняется субмартингальное (мартингальное) условие $X_s \leq \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)$ $(X_s = \mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s))$ п.в. Символ $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s)$ обозначает условное математическое ожидание случайной величины X_t относительно сигма-алгебры $\mathcal{F}_s$.

Пусть дан регулярный справа, $\mathbb{F}$-согласованный случайный процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$. Определим случайный процесс $V = \{V_t, t \geq 0\}$, положив

$$V_t = \sup \sum_{k=1}^{n} |X_{t_k} - X_{t_{k-1}}|,$$

где точная верхняя грань вычисляется по всем возможным разбиениям $0 = t_0 < \cdots < t_n = t$ сегмента $[0, t]$ и для всех $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Построенный таким образом случайный процесс $V = \{V_t, t \geq 0\}$ называется *процессом вариаций.*

Случайный процесс V наследует ряд свойств случайного процесса X. Непосредственно из определения следует, что он согласован с фильтрацией $\mathbb{F}$, возрастает, обращается в ноль в точке $t = 0$ и обладает свойством регулярности справа. С помощью известной теоремы Жордана о разложении функции с ограниченным изменением можно убедиться, что случайный процесс $V - X = \{V_t - X_t, t \geq 0\}$ возрастает и обладает свойством регулярности справа. Поэтому случайный процесс X можно представить в виде разности $X = V - (V - X)$ двух регулярных справа возрастающих процессов.

Понятие процесса вариаций можно определить для более широкого класса $\mathbb{F}$-согласованных случайных процессов $X = \{X_t, t \geq 0\}$. Предположим, что имеется событие Ω' единичной вероятности такое, что для любого $\omega \in \Omega'$ траектория $X_t(\omega), t \geq 0$, регулярна справа и для любого $t > 0$ полная вариация $V_t(\omega)$ конечна. Случайный процесс V также называется процессом вариаций данного случайного процесса X. Во многих случаях случайный процесс V можно доопределить на всем Ω. Например, положить $V_t(\omega) = 0$ для всех $t \geq 0$ и $\omega \in \Omega \setminus \Omega'$. Если вероятностное пространство и фильтрация удовлетворяют перечисленным выше условиям, то так доопределенный случайный процесс V будет регулярным справа, $\mathbb{F}$-согласованным случайным процессом.

Определение 2.1. Пусть дан $\mathbb{F}$-согласованный, регулярный справа случайный процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$. Случайный процесс X называется *процессом конечной вариации,* если $V_t < \infty$ для любого $t > 0$. Случайный процесс X называется *процессом интегрируемой вариации,* если $\mathbb{E}V_t < \infty$ для любого $t > 0$. Случайный процесс X называется *возрастающим,* если все его траектории являются возрастающими функциями.

Напомним, что случайный процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$ называется *интегрируемым,* если $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ для любого $t \geq 0$. Поэтому термин *интегрируемый возрастающий процесс* равносилен термину *возрастающий процесс интегрируемой вариации.* Любой процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$ интегрируемой вариации такой, что $\mathbb{E}|X_0| < \infty$, является разностью $X = V - (V - X)$ двух регулярных справа, возрастающих $\mathbb{F}$-субмартингалов V и $V - X$. Совсем просто проверить, что каждый из случайных процессов V и $V - X$ удовлетворяет субмартингальному условию.

Пусть дан случайный процесс $A = \{A_t, t \geq 0\}, A_0 = 0$, интегрируемой вариации. Чтобы воспользоваться уже готовой конструкцией для построения мер Лебега-Стилтьеса, удобно доопределить траектории процесса на отрицательной полуоси, положив $A_t(\omega) = 0$ для всех $t < 0$. Случайный процесс A можно представить в виде разности $A = A' - A''$ двух возрастающих, регулярных справа $\mathbb{F}$-субмартингалов $A' = \{A'_t, t \geq 0\}$ и $A'' = \{A''_t, t \geq 0\}$. Все траектории субмартингалов являются регулярными справа возрастающими функциями. По любой траектории $A'_t(\omega), t \geq 0$, доопределенной нулем на отрицательной полуоси, можно построить меру Лебега-Стилтьеса $\mu'_A\{\omega, B\}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ по известному правилу. Аналогично, по траектории $A''_t(\omega), t \geq 0$, можно построить другую меру Лебега-Стилтьеса $\mu''_A\{\omega, B\}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Для любого $t > 0$ можно определить конечный заряд $\mu_A\{\omega, B\} = \mu'_A\{\omega, B\} - \mu''_A\{\omega, B\}$ на сигма-алгебре $\mathcal{B}_t$ борелевских подмножеств полупрямой $(-\infty, t]$. Функция $\mu_A = \mu_A\{\omega, B\}$ двух переменных $\omega \in \Omega$ и $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ корректно определена для любого множества $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), B \subseteq (-\infty, t]$ для каждого $t > 0$. Очевидно, что заряды μ_A, построенные на $\mathcal{B}_t$ и $\mathcal{B}_{t'}, t < t'$, совпадают на $\mathcal{B}_t$. Если одна из мер μ'_A или μ''_A конечна, то заряд μ_A корректно определен на всей борелевской сигма-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Если $Z = \{Z_t, t \geq 0\}$ является ограниченным, измеримым случайным процессом, то все его траектории являются ограниченными борелевскими функциями. Поэтому интеграл $\int_{[0,t]} Z_s(\omega)\, \mu_A\{\omega, ds\}$ существует для любого $t > 0$. Вместо обозначения $\int_{[0,t]} Z_s(\omega)\, \mu_A\{\omega, ds\}$ обычно предпочитают писать более короткий символ $\int_0^t Z_s\, dA_s$. Предположение о равенстве $A_0 = 0$ можно ослабить и предположить, что равенство $A_0 = 0$ выполняется почти всюду. Предположение, что $A_0 = 0$ п.в. делается для того, чтобы избежать неприятностей, которые могут возникнуть при интегрировании по мере μ_A.

Определение 2.2. Случайный процесс $A = \{A_t, t \geq 0\}$ интегрируемой вариации называется *натуральным процессом,* если $A_0 = 0$ п.в. и выполняется равенство

$$\mathbb{E} \int_0^t M_s\, dA_s = \mathbb{E} \int_0^t M_{s-}\, dA_s$$

для любого числа $t > 0$ и для любого ограниченного, регулярного справа $\mathbb{F}$-мартингала $M = \{M_t, t \geq 0\}$.

Напомним, что регулярность справа мартингала M подразумевает существование предела слева $\lim_{t \uparrow s} M_t = M_{s-}$ в каждой точке $s > 0$. По определению полагают, что $M_{0-} = M_0$. Именно этот предел M_{s-} стоит под знаком интеграла в определении натурального процесса. Нетрудно убедиться, что любой почти всюду непрерывный процесс $A = \{A_t, t \geq 0\}$ интегрируемой вариации является натуральным. Понятие натурального процесса было введено Мейером [14], [15] для возрастающих случайных процессов. Более общее определение, приведенное выше, можно встретить в ряде монографий, например, в книге Проттера [17].

Обозначим $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ сигма-алгебру всех борелевских подмножеств положительной полупрямой $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Символ $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ обозначает прямое произведение указанных сигма-алгебр. Наименьшая сигма-алгебра $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$, относительно которой измеримы все $\mathbb{F}$-согласованные, непрерывные слева случайные процессы $X = \{X_t, t \geq 0\}$, называется *предсказуемой сигма-алгеброй.* Случайный процесс X называется *предсказуемым,* если он, как функция двух переменных $(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$, измерим относительно предсказуемой сигма-алгебры $\mathcal{P}$.

Теорема 2.3. *Пусть дан процесс $A = \{A_t, t \geq 0\}$ интегрируемой вариации такой, что $A_0 = 0$ п.в. Для того чтобы A был натуральным процессом, необходимо и достаточно, чтобы он был предсказуемым процессом.*

Элементарное доказательство этой теоремы приведено в статье автора [12]. Для возрастающих процессов эта теорема была впервые доказана Долеан-Дэд [6]. Оригинальное доказательство считается весьма трудным.

Теорема 2.4. *Если случайный процесс $A = \{A_t, t \geq 0\}$ интегрируемой вариации является $\mathbb{F}$-мартингалом и натуральным процессом, то он неотличим от нуля.*

Элементарное доказательство этой теоремы приведено в статье автора [12]. Для возрастающих процессов эта теорема была известна ранее и, по всей видимости, принадлежит Мейеру.

3. Основные результаты

Напомним определение локального субмартингала. Его определение включает в себя понятие марковского момента.

Функция $\tau\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty]$ называется *марковским моментом* относительно фильтрации $\mathbb{F}$ или $\mathbb{F}$-*марковским моментом,* если $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ для любого $t \geq 0$.

Марковским моментом является любое положительное число. Несложно доказать, что максимум $\tau \vee \sigma$ и минимум $\tau \wedge \sigma$ двух марковских моментов являются марковскими моментами.

Определение 3.1. Непрерывный справа, $\mathbb{F}$-согласованный случайный процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$ называется *локальным субмартингалом* (*локальным мартингалом*), если существует возрастающая последовательность $\{\tau_n\}_{n \geq 1}$ марковских моментов относительно фильтрации $\mathbb{F}$ такая, что $\tau_n \to \infty$ п.в. при $n \to \infty$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ остановленный случайный процесс $X^{(\tau_n)} - X_0 = \{X_{t \wedge \tau_n} - X_0, t \geq 0\}$ является $\mathbb{F}$-субмартингалом (является $\mathbb{F}$-мартингалом). Последовательность $\{\tau_n\}_{n \geq 1}$ называется *локализующей последовательностью* для X.

Имеются интегрируемые локальные субмартингалы (мартингалы), которые не являются $\mathbb{F}$-субмартингалами ($\mathbb{F}$-мартингалами). Известно, это нетрудно доказать, что любой непрерывный справа $\mathbb{F}$-субмартингал (непрерывный справа $\mathbb{F}$-мартингал) является локальным субмартингалом (мартингалом).

Для формулировок теорем и их доказательств нам понадобится одно обобщение понятия интегрируемого случайного процесса.

Определение 3.2. Непрерывный справа, $\mathbb{F}$-согласованный случайный процесс $X = \{X_t, t \geq 0\}$ называется *локальным интегрируемым,* если существует возрастающая последовательность $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ марковских моментов относительно фильтрации $\mathbb{F}$ такая, что $\tau_n \to \infty$ п.в. при $n \to \infty$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ случайный процесс $X^{(\tau_n)} - X_0 = \{X_{t\wedge\tau_n} - X_0, t \geq 0\}$ является интегрируемым процессом.

Теорема 3.3. *Любой непрерывный справа локальный субмартингал $X = \{X_t, t \geq 0\}$ может быть представлен в виде суммы $X = M + A$ п.в. непрерывного справа локального мартингала $M = \{M_t, t \geq 0\}$ и предсказуемого, локально интегрируемого возрастающего процесса $A = \{A_t, t \geq 0\}, A_0 = 0$ Такое представление единственно с точностью до неразличимости.*

Доказательство. Докажем сначала утверждение о единственности. Пусть имеются два разложения $X = M + A$ п.в. и $X = M' + A'$ п.в., о которых говорится в теореме. Отсюда следует равенство $M - M' = A' - A$ п.в. и то, что локальный мартингал $M - M'$ является регулярным справа предсказуемым процессом, обращающимся в ноль в точке $t = 0$. Обозначим $Z = M - M'$. Возьмем какую-нибудь локализующую последовательность $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$ для локального мартингала $Z = M - M'$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ остановленный случайный процесс $Z^{(\tau_n)} = \{Z_{t\wedge\tau_n}, t \geq 0\}$ является непрерывным справа $\mathbb{F}$-мартингалом. Возьмем какую-нибудь локализующую последовательность $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$ для локально интегрируемого случайного процесса A. Для любого $n \in \mathbb{N}$ остановленный случайный процесс $A^{(\sigma_n)} = \{A_{t\wedge\sigma_n}, t \geq 0\}$ интегрируем. Заметим, что случайный процесс $A^{(\sigma_n)}$ возрастает. Он наследует это свойство от случайного процесса A. Известно, это нетрудно доказать, что последовательность $\{\tau_n \wedge \sigma_n\}_{n\geq 1}$ является локализующей для локального мартингала $Z = M - M'$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ остановленный случайный процесс $Z^{(\tau_n\wedge\sigma_n)} = \{Z_{t\wedge(\tau_n\wedge\sigma)}, t \geq 0\}$ является $\mathbb{F}$-мартингалом. Так как случайный процесс A возрастает и принимает неотрицательные значения, то для любого $t \geq 0$ выполняются неравенства $0 \leq \mathbb{E}A_{t\wedge(\tau_n\wedge\sigma_m)} \leq \mathbb{E}A_{t\wedge\sigma_n} < \infty$. Это означает, что последовательность $\{\tau_n \wedge \sigma_n\}_{n\geq 1}$ является локализующей для локально интегрируемого процесса A. Отсюда и из равенства $A' = A + (M - M')$ следует, что

$$\mathbb{E}|(A')_{t\wedge(\tau_n\wedge\sigma_n)}| \leq \mathbb{E}|A_{t\wedge(\tau_n\wedge\sigma_n)}| + \mathbb{E}|M_{t\wedge(\tau_n\wedge\sigma_m)} - M_{t\wedge(\tau_n\wedge\sigma_n)}| < \infty.$$

Обозначим $V^{(n)} = \{V_t^{(n)}, t \geq 0\}$ процесс вариаций, построенный по случайному процессу $(A')^{(\tau_n\wedge\sigma_n)} - A^{(\tau_n\wedge\sigma_n)}$. Так как

$$\mathbb{E}V_t^{(n)} \leq \mathbb{E}(A')^{(\tau_n\wedge\sigma_n)} + \mathbb{E}A^{(\tau_n\wedge\sigma_n)} < \infty,$$

то случайный процесс $(A')^{(\tau_n\wedge\sigma_n)} - A^{(\tau_n\wedge\sigma_n)}$ является процессом интегрируемой вариации. Отсюда следует, что п.в. регулярный справа $\mathbb{F}$-мартингал $Z^{(\tau_n\wedge\sigma_n)}$ является процессом интегрируемой вариации. Так как вероятностное пространство полное и фильтрация обладает свойствами расширенности и непрерывности справа, то случайный процесс $Z^{(\tau_n\wedge\sigma_n)}$ неотличим от некоторого регулярного справа процесса интегрируемой вариации. Можно считать, что сам случайный процесс $Z^{(\tau_n\wedge\sigma_n)}$ обладает этими свойствами. Он обращается в ноль в точке $t = 0$ и наследует свойство быть предсказуемым процессом от локального мартингала $Z = M - M'$. По теореме 2.3 случайный процесс $Z^{(\tau_n\wedge\sigma_n)}$ является натуральным процессом и неотличим от нуля по теореме 2.4. Обозначим Ω_n множество элементарных событий $\omega \in \Omega$, для которых траектории $Z_t^{(\tau_n \wedge \sigma_n)}(\omega), t \geq 0$, тождественно равны нулю. Множество Ω_n является событием единичной вероятности и, следовательно, множество $\Omega' = \cap_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ также является событием единичной вероятности. Так как $\lim_{n\to\infty}(\tau_n \wedge \sigma_n) = \infty$ п.в., то можно считать, что последовательность $\{\tau_n \wedge \sigma_n\}_{n \geq 1}$ сходится к бесконечности на множестве Ω'. Отсюда следует, что

$$M_t(\omega) - M'_t(\omega) = Z_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} Z_t^{(\tau_n \wedge \sigma_n)}(\omega) = 0$$

для любых $t > 0$ и $\omega \in \Omega$. Это означает, что случайные процессы M и M' неотличимы. Отсюда и из равенства $A' - A = M - M'$ п.в. следует, что случайные процессы A и A' неотличимы.

Докажем существование разложения. Предположим сначала, что локальный субмартингал X является $\mathbb{F}$-субмартингалом. Ради упрощения записей, можно считать, что $X_0 = 0$. Легко проверить, что функция $\tau_n = \inf\{t \geq 0 \colon |X_t| > n\} \wedge n$ является ограниченным $\mathbb{F}$-марковским моментом и, что последовательность, $\{\tau_n\}_{n \geq 1}$ возрастает и сходится п.в. к бесконечности. По известной теореме ([11], стр, 125) выполняются неравенства $0 = X_0 \leq \mathbb{E}(X_{\tau_n}|\mathcal{F}_0)$ п.в. и $X_{\tau_n} \leq \mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{\tau_n})$ п.в., из которых следует, что

$$0 \leq \mathbb{E}X_{\tau_n} = \mathbb{E}X_{\tau_n}^+ - \mathbb{E}X_{\tau_n}^- \leq \mathbb{E}X_n < \infty$$

и $\mathbb{E}|X_{\tau_n}| < \infty$. В силу неравенства $|X_{\tau \wedge \tau_n}| \leq n + |X_{\tau_n}|$ для любого $\mathbb{F}$-марковского момента τ и известного утверждения ([11], стр. 112) семейство случайных величин $X_{\tau \wedge \tau_n}$, когда τ пробегает множество всех $\mathbb{F}$-марковских моментов, равномерно интегрируемо. Это означает, что случайный процесс $X^{(\tau_n)} = \{X_{t \wedge \tau_n}, t \geq 0\}$ принадлежит классу Дуба $\mathcal{D}$. По теореме Мейера ([11], стр. 170) непрерывный справа $\mathbb{F}$-субмартингал $X^{(\tau_n)}$ может быть записан в виде суммы $X^{(\tau_n)} = M^{(n)} + A^{(n)}$ непрерывного справа $\mathbb{F}$-субмартингалом $M^{(n)}$ и интегрируемого, предсказуемого возрастающего процесса $A^{(n)}$. Обозначим $\Omega'_n \in \mathcal{F}$ множество элементарных событий, на котором выполняется равенство $X^{(\tau_n)} = M^{(n)} + A^{(n)}$. Множество Ω'_n является событием единичной вероятности и, следовательно, множество $\Omega'' = \cap_{n=1}^{\infty} \Omega'_n$ также является событием единичной вероятности. Для любого $\omega \in \Omega''$ и для всех $0 \leq t < \tau_n(\omega)$ выполняется равенство

$$X_t(\omega) = M_t^{(n)}(\omega) + A_t^{(n)}(\omega). \tag{1}$$

По утверждению о единственности на множестве Ω'' выполняются равенства $M^{(n)} = M^{(r)}$ и $A^{(n)} = A^{(r)}$ для всех $n, r \in \mathbb{N}$. Так как $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty$ п.в.,то можно считать, что $\tau_n \uparrow \infty$ на множестве Ω''. Для любого $\omega \in \Omega''$ и для любых $0 \leq t < \tau_n(\omega)$ и $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство (1). Поэтому существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} M_t^{(n)}(\omega) = M'_t(\omega), \lim_{n\to\infty} A_t^{(n)}(\omega) = A'_t(\omega).$$

В силу (1) для любых $t \geq 0$ и $\omega \in \Omega''$ выполняется равенство $X_t(\omega) = M'_t(\omega) + A'_t(\omega)$. Определим случайные процессы $M = \{M_t, t \geq 0\}$ и $A = \{A_t, t \geq 0\}$, положив $M_t(\omega) = A_t(\omega) = 0$, если $\omega \in \Omega \setminus \Omega'$, и $M_t(\omega) = M'_t(\omega), A_t(\omega) = A'_t(\omega)$, если $\omega \in \Omega'$. Из построения случайных процессов M и A следуют равенства $X = M + A$ п.в. и $X_0 = M_0, A_0 = 0$. Случайный процесс M является локальным мартингалом и случайный процесс A является локально интегрируем с общей для обоих случайных процессов локализирующей последовательностью $\{\tau_n\}_{n\geq 1}$.

Рассмотрим общий случай. Возьмем любую локализирующую последовательность $\{\gamma_n\}_{n\geq 1}$ для локального субмартингала X. Для любого $n \in \mathbb{N}$ остановленный случайный процесс $X^{(\gamma_n)} - X_0 = \{X_{t\wedge\gamma_n} - X_0, t \geq 0\}$ является $\mathbb{F}$-субмартингалом. По доказанному выше для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют локальный мартингал $\hat{M}^{(n)}$ и предсказуемый, локально интегрируемый возрастающий процесс $\hat{A}^{(n)}, \hat{A}^{(n)}_0 = 0$, с общей локализующей последовательностью такие, что выполняется равенство $X^{(\gamma_n)} - X_0 = \hat{M}^{(n)} + \hat{A}^{(n)}$ на некотором событии $\hat{\Omega}_n$ единичной вероятности. На событии $\hat{\Omega} = \cap_{n=1}^{\infty}\hat{\Omega}_n$ единичной вероятности выполняется равенство $X^{(\gamma_n)} - X_0 = \hat{M}^{(n)} + \hat{A}^{(n)}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. По утверждению о единственности на множестве $\hat{\Omega}$ выполняются равенства $\hat{M}^{(n)} = \hat{M}^{(r)}$ и $\hat{A}^{(n)} = \hat{A}^{(r)}$ для всех $n, r \in \mathbb{N}$. Так как $\lim_{n\to\infty}\gamma_n = \infty$ п.в., то можно считать, что последовательность $\{\gamma_n\}_{n\geq 1}$ сходится к бесконечности на множестве $\hat{\Omega}$. Для любого $\omega \in \hat{\Omega}$ и для любых $0 \leq t < \gamma_n(\omega)$ и $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$$X_t(\omega) = \hat{M}^{(n)}_t(\omega) + \hat{A}^{(n)}_t(\omega). \tag{2}$$

Для любых $t \geq 0$ и $\omega \in \hat{\Omega}$ существуют пределы $\lim_{n\to\infty}\hat{M}^{(n)}_t(\omega) = \hat{M}_t(\omega)$ и $\lim_{n\to\infty}\hat{A}^{(n)}_t(\omega) = \hat{A}_t(\omega)$. Определим случайные процессы $M = \{M_t, t \geq 0\}$ и $A = \{A_t, t \geq 0\}$, положив $M_t(\omega) = A_t(\omega) = 0$, если $\omega \in \Omega \setminus \hat{\Omega}$, и $M_t(\omega) = \hat{M}_t(\omega)$ и $A_t(\omega) = \hat{A}_t(\omega)$, если $\omega \in \hat{\Omega}$. Из построения следует, что выполняется равенство $X = X_0 + M + A$ п.в., случайные процессы M и A согласованы с фильтрацией $\mathbb{F}$, случайный процесс A возрастает и является предсказуемым. Убедимся, что M является локальным мартингалом и A является локально интегрируемым процессом. В силу (2) для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполняются равенства

$$\begin{aligned}&\hat{M}^{(n)} + \hat{A}^{(n)} = X^{(\gamma_n)} - X_0 = M^{(\gamma_n)} + A^{(\gamma_n)} \text{ п.в.},\\ &M^{(\gamma_n)} = \hat{M}^{(n)}, A^{(\gamma_n)} = \hat{A}^{(n)} \text{ п.в.}\end{aligned}$$

Выше отмечалось, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется возрастающая последовательность $\{\sigma_n\}_{n\geq 1}$ такая, что $\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \infty$ п.в. и остановленные случайные процессы $(\hat{M}^{(n)})^{(\sigma_n)}$ и $(\hat{A}^{(n)})^{(\sigma_n)}$ являются соответственно $\mathbb{F}$-мартингалом и интегрируемым процессом. Тем самым доказано, что последовательность $\{\gamma_n \wedge \sigma\}_{n\geq 1}$ является локализующей для M и A в том смысле, что для любого $n \in \mathbb{N}$ остановленные случайные процессы $M^{(\gamma_n\wedge\sigma_n)}$ и $A^{(\gamma_n\wedge\sigma_n)}$ являются соответственно $\mathbb{F}$-мартингалом и интегрируемым процессом. Теорема доказана. □

Теорема 3.4. *Любой п.в. непрерывный локальный субмартингал $X = \{X_t, t \geq 0\}$ можно представить в виде суммы $X = M + A$ п.в. непрерывного локального мартингала $M = \{M_t, t \geq 0\}$ и п.в. непрерывного, локально интегрируемого возрастающего процесса $A = \{A_t, t \geq 0\}$. Такое представление единственно с точностью до неразличимости.*

Доказательство. В силу теоремы 3.3 требуется доказать только, что случайные процессы M и A п.в. непрерывны. Обозначим множество Ω' элементарных событий $\omega \in \Omega$, для которых траектории $X_t(\omega), t \geq 0$, непрерывны. Множество Ω' является событием единичной вероятности. Определим случайный процесс $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$, положив $Y_t(\omega) = X_t(\omega)$ для $\omega \in \Omega'$ и $Y_t(\omega) = 0$ для $\omega \in \Omega \setminus \Omega'$. Случайные процессы X и Y неотличимы. Другими словами, почти все их траектории совпадают. Случайный процесс Y непрерывен и, как нетрудно проверить, согласован с фильтрацией $\mathbb{F}$ и, следовательно, является предсказуемым. Так как вероятностное пространство полное и фильтрация непрерывна справа и расширена, то множество $\Omega'' = \{(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \colon X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}$ принадлежит предсказуемой сигма-алгебре $\mathcal{P}$. Для любого борелевского множества $B \subseteq \mathbb{R}$ множество $\{X \in B\} = \{(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \colon X_t(\omega) \in B\}$ принадлежит предсказуемой сигма-алгебре $\mathcal{P}$, так как его можно представить в виде объединения

$$\{X \in B\} = (\{Y \in B\} \cap \Omega'') \cup (\{X \in B\} \cap ((\mathbb{R}_+ \times \Omega) \setminus \Omega''))$$

двух множеств из $\mathcal{P}$. Тем самым доказано, что случайный процесс X является предсказуемым. Заметим, что использовалось только предположение о непрерывности п.в. случайного процесса X. Тот факт, что X является локальным субмартингалом, не использовалось.

По теореме 3.3 существуют локальный мартингал $M = \{M_t, t \geq 0\}$ и предсказуемый, локально интегрируемый возрастающий процесс $A = \{A_t, t \geq 0\}$ такие. что $X = M + A$ п.в. Отсюда следует, что локальный мартингал M совпадает п.в. с разностью $X - A$ двух предсказуемых случайных процессов. Локальный мартингал M является предсказуемым процессом. В этом можно убедиться по аналогии с тем, как было доказано, что локальный субмартингал X является предсказуемым процессом. Известно, что п.в. предсказуемый локальный мартингал п.в. непрерывен. Элементарное доказательство этого утверждения приведено в статье автора [12]. Разность $A = X - M$ п.в. двух п.в. непрерывных случайных процессов также п.в. непрерывна. Теорема доказана. □

4. Заключение

В статье построено разложение любого непрерывного справа локального субмартингала в виде суммы непрерывного справа локального мартингала и предсказуемого, локально интегрируемого возрастающего процесса. Разложение единственно с точностью до неразличимости. Доказательство основано на простом исследовании случайных процессов интегрируемой вариации. Подобные утверждения известны для регулярных справа локальных субмартингалов с более сложными доказательствами.

Список литературы

[1] Bass R.F. The Doob-Meyer decomposition revisited // Canadian Mathematical Bulletin. 1996. Vol. 39. Pp. 138–150.

[2] Beiglböck M., Schachermayer W., Veliyev B. A short proof of the Doob-Meyer theorem // Stochastic Processes and their Applications. 2012. Vol. 122, № 4. Pp. 1202–1204.

[3] Burgstaller B. A note on the Doob-Meyer drcomposition of L^p-valued submartingales // Bulletin of the Australian Mathematical Society. 2004. Vol. 69. Pp. 227–235.

[4] Chen Z. A new proof of Doob-Meyer decomposition theorem // Comptes Rendus de Academie des Sciences, Paris, Serie I. 1999. Vol. 328. Pp. 919–924.

[5] O'Cinneide C., Protter Ph. An elementary approach to naturality, predictability, and the fundamental theorem of local martingales // Stochastic Models. 2001. Vol. 17. Pp. 449–458.

[6] Doléans-Dade C. Processus croissants naturels et processus croissants très bien mesurables // Comptes Rendus de Academie des Sciences, Paris, Serie A-B. 1967. Vol. 264. Pp. 874-876.

[7] Дуб Дж. Вероятностные процессы. М.: Мир, 1956.

[8] Jakubowski A. Towards a general Doob-Meyer decomposition theorem // Probability and Mathematical Statistics. 2006. Vol. 26. Pp. 143–153.

[9] Kashayeva S.Yu., Kruglov V.M. On a representation of submartingales and its application // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2014. Vol. 35, no. 2. Pp. 74–84.

[10] Komlós. A. A generalization of a problem of Steinhaus // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. 1967. Vol. 18. Pp. 217–229.

[11] Круглов В. М. Случайные процессы. М.: Издательский центр Академия, 2013.

[12] Kruglov V.M. On natural and predictable processes // Sankhya: The Indian Journal of Statistics. 2015. doi:10.1007/s13171-015-0074-0074-7.

[13] Krylov N.V. A representation of nonnegative submartingales and its applications // Lecture Notes in Mathematics. 1990. Vol. 1426. Pp. 473–476.

[14] Meyer P.-A. A decomposition theorem for supermartingales // Illinois Journal of Mathematics. 1963. Vol. 6. Pp. 193–205.

[15] Meyer P.-A. Decomposition of supermartingales: the uniqueness theorem // Illinois Journal of Mathematics. 1963. Vol. 7. Pp. 1–17.

[16] Protter P.E. Stochastic integration and differential equations. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[17] Сверчков М.Ю., Смирнов С.Н. Об одном представлении супермартингалов // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 1989. № 3. С. 46–50.

[18] Rao K.M. On decomposition theorems of Meyer // Mathematica Scandinavica. 1969. Vol. 24. Pp. 66–78.

Библиографическая ссылка

Круглов В.М. Разложение Дуба-Мейера для локального субмартингала // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 3. С. 33–44.

Сведения об авторах

1. **Круглов Виктор Макарович**
профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Россия, 119992, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ им. М.В. Ломоносова. E-mail: krugvictor@gmail.com

THE DOOB-MEYER DECOMPOSITION FOR LOCAL SUBMARTINGALES

Kruglov Victor Makarovich
Professor of Mathematical Statistics department,
Lomonosov Moscow State University
Russia, 119992, Moscow, GSP-1, Vorobyovi gory, Lomonosov MSU.
E-mail: krugvictor@gmail.com

Received 10.06.2015, revised 17.06.2015.

In this paper a decomposition of any right continuous local submartingale into the sum of a right continuous local martingale and a predictable locally integrable increasing process is constructed. This decomposition is unique up to indistinguishability. The proof is based on an elementary approach to the studies of stochastic processes of integrable variation. Statements of such a kind are known for càdlàg local submartingales with more complicated proofs.

Keywords: local martingale, process of integrable variation, Doob-Meyer decomposition.

Bibliographic citation

Kruglov V.M. The Doob-Meyer decomposition for local submartingales. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2015, no. 3, pp. 33–44. (in Russian)