УДК 519.216.8,519.216.24

УСЛОВИЯ СЛАБОЙ СХОДИМОСТИ ГИЛЬБЕРТОВОЗНАЧНЫХ СЕМИМАРТИНГАЛОВ К ГАУССОВСКОМУ МАРТИНГАЛУ

Лаврентьев В.В., Назаров Л.В.
МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва

Поступила в редакцию 24.06.2015, после переработки 01.07.2015.

В данной работе изучается слабая сходимость семимартингалов, принимающих значения в Гильбертовом пространстве. Получены необходимые и достаточные условия слабой сходимости к гауссовскому мартингалу с непрерывными траекториями.

Ключевые слова: семимартингал, мартингал, гильбертово пространство, слабая сходимость.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 3. С. 45–57.

Введение

Липцер Р.Ш. и Ширяев А.Н. в [1] и [2] доказали необходимые и достаточные условия справедливости функциональной центральной предельной теоремы для последовательности семимартингалов, т. е. теоремы о слабой сходимости их вероятностных распределений к распределению непрерывного гауссовского мартингала (в частности, к распределению винеровского процесса). Техника интегрирования по семимартингалам и стохастическим мерам позволила в этих работах единым образом рассматривать как случай непрерывного, так и дискретного времени. В частности, эта семимартингальная схема включает в себя схемы серий, которые были предметом исследований многих работ (см. ссылки в [1]).

Для схемы серий гильбертовозначных случайных величин и процессов слабая сходимость также исследовалась многими авторами [3] – [6]. Целью данной работы является распространение результатов [1] и [2] на случай семимартингалов со значениями в Гильбертовом пространстве.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F} P)$ – измеримое пространство с выделенными на нем неубывающими непрерывными справа семействами σ-алгебр $F = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, $F^n = (\mathcal{F}^n_t)_{t\geq 0}$. Для некоторых множеств гильбертовозначных случайных процессов $X = (X_t, \mathcal{F}_t; \mathbb{H}), X_0 = 0$ через $\mathcal{M}(\mathbb{H})$, $\mathcal{M}^c(\mathbb{H})$, $\mathcal{M}^d(\mathbb{H})$, $\mathcal{M}^2(\mathbb{H})$ будем обозначать соответственно классы равномерно интегрируемых, непрерывных, чисто разрывных и квадратично интегрируемых мартингалов со значениями в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$. $\mathcal{V}(\mathbb{H})$ – процессы ограниченной вариации, $\mathcal{A}(\mathbb{H})$ – процессы интегрируемой вариации. А также для действительных случайных процессов: $\mathcal{V}^+(\mathbb{R})$ – множество неубывающих (по t) процессов X таких, что $X_t < \infty$ (P-п.н.), $t > 0$; $\mathcal{A}^+(\mathbb{R}) \equiv \{X \in \mathcal{V}^+(\mathbb{R}) : EX_\infty < \infty\}$, где $X_\infty \equiv \lim_{t\to\infty} X_t$.

Если $\mathcal{K}(\mathbb{H})$ – некоторый класс случайных процессов, то через $\mathcal{K}_{loc}(\mathbb{H})$ будем обозначать множество процессов $X = (X_t, \mathcal{F}; \mathbb{H})$, для каждого из которых существует (локализующая) неубывающая последовательность моментов остановки $\tau_n, \tau_n \uparrow \infty$ (P-п.н.) таких, что остановленный процесс $X^{\tau_n} = (X_{t\wedge\tau_n}, \mathcal{F}_t; \mathbb{H}) \in \mathcal{K}(\mathbb{H})$ для любого $n \geq 1$.

Для гильбертовозначного процесса X для $i \geq 1$ через x_i будем обозначать действительные процессы, определяемые равенствами $(x_i)_t = (e_i, X_t)$, где $\{e_i\}$ - ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, т.е. $X_t = ((x_1)_t, (x_2)_t, \cdots)$.

Пусть $M = (M_t, \mathcal{F}_t; \mathbb{H})$ – непрерывный гауссовский мартингал, принимающий значения в гильбертовом пространстве. В этом случае соответствующий набор предсказуемых действительных процессов $(< m_i, m_j >)_{i,j\geq 1}$ таких, что $m_i m_j - < m_i, m_j >$ – локальный мартингал; $< m_i > \equiv < m_i, m_i >$ будет состоять из непрерывыых и детерминированых функций.

Более того $((m_i)_t \equiv (e_i, M_t))$:

$$< M >_t = \sum_{i=1}^{\infty} < m_i >_t = E\,\|M_t\|^2\,, \quad < m_i, m_j >_t = M(m_i)_t(m_j)_t, \quad i,j \geq 1, t \geq 0.$$

Обозначим через $\mu = \mu\,(dt, dx)$ целочисленную случайную меру скачков семимартингала X и $\nu = \nu(ds, dx)$ – ее компенсатор [7]:

$$\mu\,((0,t], \Gamma) = \sum_{0<s\leq t} I\,(\Delta X_s \in \Gamma)\,, \quad \Gamma \in \mathcal{B}\,(\mathbb{H}\setminus\{0\})\,,$$

где $\mathcal{B}$ – σ-алгебра борелевских множеств.

Напомним, что для гильбертовозначных семимартингалов справедливо следующее каноническое разложение [8]:

$$X_t = X_0 + B_t + M_t + M_t^d + \int_0^t \int_{\|x\|>1} x\,\mu\,(ds, dx) \tag{1}$$

с предсказуемым процессом $B = (B_t, \mathcal{F}_t; \mathbb{H})$ из класса процессов локально интегрируемой вариации $\mathcal{A}_{loc}(\mathbb{H})$, непрерывным мартингалом M и чисто разрывным мартингалом M^d.

1. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть $X^n = (X_t^n, \mathcal{F}_t^n; \mathbb{H})$ – последовательность семимартингалов с $X_0^n = 0$ и $M = (M_t, \mathcal{F}_t; \mathbb{H})$ – непрерывный гауссовский мартингал с $M_0 = 0$.*

1) Пусть для любых $t > 0$, $\varepsilon \in (0,1]$ при $n \to \infty$ выполнены условия:

$$\int_0^t \int_{\|x\|>\varepsilon} \nu^n(ds, dx) \xrightarrow{P} 0, \tag{2}$$

$$B_t^n \xrightarrow{P} 0, \tag{3}$$

$$< m_i^{n\varepsilon}, m_j^{n\varepsilon} >_t \xrightarrow{P} < m_i, m_j >_t, \quad i,j \geq 1, \tag{4}$$

$$< M^{n\varepsilon} >_t \xrightarrow{P} < M >_t, \tag{5}$$

тогда конечномерные распределения X^n сходятся к конечномерным распределениям M ($X^n \xrightarrow{D_f} M$).

2) Пусть для любых $t > 0$ выполнено условие:

$$\sup_{0<s\le t} \|B_s^n\| \xrightarrow{P} 0, \tag{6}$$

тогда условия (2), (4), (5) равносильны слабой сходимости X^n к M ($X^n \xrightarrow{D} M$).

Теорема 2. *1) Условие (2) равносильно выполнению при любом ($t > 0$) условия*

$$\sup_{0<s\le t} \|\Delta X_s^n\| \xrightarrow{P} 0. \tag{7}$$

2) В предположении (2) (или (7)) условия (4) и (5) равносильны выполнению для любых $t > 0$ условий (8) и (9), соответственно:

$$[m_i^{n1}, m_j^{n1}]_t \xrightarrow{P} < m_i, m_j >_t, \quad i, j \ge 1, \tag{8}$$

$$[M^{n1}]_t \xrightarrow{P} < M >_t, \tag{9}$$

где

$$[M]_t \equiv < M^c >_t + \sum_{0<s\le t} \|\Delta M_s\|^2,$$

$$[m_i, m_j]_t \equiv < m_i^c, m_j^c >_t + \sum_{0<s\le t} (\Delta m_{is})(\Delta m_{js})$$

и M^c, m_i^c, m_j^c – непрерывные составляющие соответствующих локальных мартингалов.

Замечание 1. *Для конечномерного $\mathbb{H}$ условия (5), (9) вытекают из условий (4), (8), соответственно.*

2. Вспомогательные результаты и факты

Лемма 1. *Пусть $(\xi_m^n(\varepsilon)), n \ge 1$ – семейство таких случайных величин, что $\xi_m^n(\varepsilon) \xrightarrow{P} 0, n \to \infty$, для всякого $m \ge 1, \varepsilon \in (0, 1]$.*

Тогда найдется такая последовательность $\{n_k\} \uparrow \infty$, что

$$\xi_m^{n_k}(1/k) \xrightarrow{P} 0, \quad k \to \infty, m \ge 1.$$

Доказательство. Построим такую последовательность $\{n_1^k\}_{k=1}^{\infty}$, что

$$\xi_1^{n_1^k}(1/k) \xrightarrow{P} 0, \quad k \to \infty.$$

Для этого достаточно положить $n_1^1 = 1$ и выбрать такие числа $n_1^k > n_1^{k-1}$, что при всех $n \geq n_1^k$

$$\mathbf{P}(|\xi_1^n(1/k)| \geq 1/k) < 1/k.$$

Далее из последовательности $\{n_{m-1}^k\}_{k=1}^{\infty}$ выберем аналогично такую подпоследовательность $\{n_m^k\}_{k=1}^{\infty}$, что

$$\xi_m^{n_m^k}(1/k) \xrightarrow{P} 0, \quad k \to \infty.$$

Полагая $n_k = n_k^k$, получаем искомую последовательность. □

Неравенство Ленгляра. *Пусть неотрицательный процесс $X = (X_t, \mathcal{F}_t; \mathbb{R})$ доминируется процессом $Y \in \mathcal{A}_{loc}^+(\mathbb{R})$, т.е. $EX_\tau \leq EY_\tau$ для любого конечного момента остановки τ.*

a) Если Y – предсказуемый процесс, то для любых $a > 0$, $b > 0$ и всякого конечного момента остановки τ

$$P(\sup_{t\leq\tau} X_t > a) \leq \frac{1}{a}E(Y_\tau \wedge b) + P(Y_\tau \geq b). \tag{10}$$

b) Если $\sup_t \Delta Y_t \leq c$ P-п.н. для некоторого $c > 0$, то для любых $a > 0$, $b > 0$

$$P(\sup_{t\leq\tau} X_t > a) \leq \frac{1}{a}E(Y_\tau \wedge (b+c)) + P(Y_\tau \geq b). \tag{11}$$

Следствие из неравенства Ленгляра. *Пусть для последовательности процессов $(X^n, Y^n), n \geq 1$, выполнены перечисленные выше условия, причем $Y^n, n \geq 1$ – предсказуемые процессы или для любого конечного момента остановки (относительно $\bigcap_{n\geq 1} F^n$) семейство случайных величин $(\sup_{0<s\leq t} |\Delta Y_s^n|)_{n\geq 1}$ равномерно интегрируемо. Тогда для любого конечного момента остановки τ*

$$Y_\tau^n \xrightarrow{P} 0 \Rightarrow \sup_{0<t\leq\tau} X_t^n \xrightarrow{P} 0. \tag{12}$$

Доказательство неравенства и следствия содержится в работе [9].

Лемма 2. *Пусть $M^n \in \mathcal{M}_{loc}^2(\mathbb{H})$ и $\|\Delta M_t^n\| \leq c, t > 0, n \geq 1$. M – локальный гильбертовозначный мартингал с непрерывными траекториями и $M_0 = 0$. Тогда*

$$M^n \xrightarrow{D} M \Rightarrow < M^n >_t \xrightarrow{d} < M >_t, \quad t > 0.$$

Если, кроме того, M – гауссовский мартингал, то $< M >$ – детерминированная функция и

$$M^n \xrightarrow{D} M \Rightarrow < M^n >_t \xrightarrow{p} < M >_t, \quad t > 0.$$

Доказательство. Заметим, что в силу следствия 1 к теореме 5.1 в [10] $M^n \xrightarrow{D} M \Rightarrow \|M^n\| \xrightarrow{D} \|M\|$.

Так как $\|M^n\|$ и $\|M\|$ – неотрицательные субмартингалы, то по теореме Гилата (см., например, [11]) можно выбрать симметричные $m^n \in \mathcal{M}^2_{loc}(R)$ и $m \in \mathcal{M}^2_{loc}(R)$ такие, что распределение $|m^n|$ и $|m|$ совпадает с распределениями $\|m^n\|$ и $\|m\|$, соответственно. Тогда $|m^n| \xrightarrow{D} |m|$. Отсюда, в силу симметричности m^n и m, вытекает, что $m^n \xrightarrow{D} m$.

Далее, так как $P(|\Delta m^n_t| \le c) = P(|\Delta\|M^n_t\|| \le c) \ge P(\|\Delta M^n_t\| \le c) = 1$, то согласно теоремы 2 в [2] и теоремы 2 в [1]

$$m^n \xrightarrow{D} m \Rightarrow < m^n >_t \xrightarrow{d} < m >_t, \quad t > 0.$$

В силу выбора m^n и m распределения $< m^n >$ и $< m >$ совпадают с распределениями $< M^n >$ и $< M >$, соответственно (см. [11]), и, следовательно, $< M^n >_t \xrightarrow{d} < M >_t, \quad t > 0$.

Отсюда, в силу детерминированности функции $< M >$, вытекает второе утверждение леммы. □

3. Доказательство теоремы 2

Проверка эквивалентности (2) и (7) полностью повторяет (с заменой $|.|$ на $\|.\|$) проверку аналогичного утверждения в ([1], с. 698–699).

Условие (4) можно переписать в виде $(i, j \ge 1)$:

$$< m^n_i, m^n_j >_t + \int_0^t \int_{\|x\| \le \varepsilon} (x, e_i)(x, e_j)\nu^n(ds, dx) -$$

$$- \sum_{0<s\le t} (\int_{\|x\| \le \varepsilon} (x, e_i)\nu^n(\{s\}, dx) \int_{\|x\| \le \varepsilon} (x, e_j)\nu^n(\{s\}, dx)) \xrightarrow{P} < m_i, m_j >_t, \qquad (13)$$

а условие (8) можно переписать в виде:

$$< m^n_i, m^n_j >_t + \sum_{0<s\le t} (\int_{\|x\| \le 1} (x, e_i)(\mu^n - \nu^n)(\{s\}, dx) *$$

$$* \int_{\|x\| \le 1} (x, e_j)(\mu^n - \nu^n)(\{s\}, dx)) \xrightarrow{P} < m_i, m_j >_t, \quad i, j \ge 1. \qquad (14)$$

Тогда для доказательства эквивалентности (4) и (8) при выполнении условия (2) достаточно проверить это для следующих условий:

$$< (M^{n\varepsilon}, h) >_t = < (M^n, h) >_t + \int_0^t \int_{\|x\| \le \varepsilon} (x, h)^2 \nu^n(ds, dx) -$$

$$- \sum_{0<s\le t} (\int_{\|x\| \le \varepsilon} (x, h)\nu^n(\{s\}, dx))^2 \xrightarrow{P} < (M, h) >_t, \qquad (15)$$

$$[(M^{n1},h)]_t =< (M^n,h)>_t +$$
$$+\sum_{0<s\le t}(\int_{\|x\|\le 1}(x,h)(\mu^n-\nu^n)(\{s\},dx))^2 \xrightarrow{P} < (M,h)>_t, \tag{16}$$

где $h = e_i$ или $h = e_i + e_j,\ i,j \ge 1$.

Воспользуемся схемой, предложенной в [1]. Прежде всего заметим, что для любого $t>0$

$$< (M^{n\varepsilon},h)>_t - < (M^{n\delta},h)>_t \xrightarrow{P} 0, \qquad \delta\in(0,\epsilon], \tag{17}$$

$$[(M^{n\varepsilon},h)]_t - [(M^{n\delta},h)]_t \xrightarrow{P} 0, \qquad \delta\in(0,1], \tag{18}$$

действительно

$$|< (M^{n\varepsilon},h)>_t - < (M^{n\delta},h)>_t|\le (\int_0^t\int_{\delta<\|x\|\le\varepsilon}(x,h)\nu^n(\{s\},dx))^2+$$
$$+\mid\sum_{0<s\le t}[(\int_{\|x\|\le\varepsilon}(x,h)\nu^n(\{s\},dx))^2-(\int_{\|x\|\le\delta}(x,h)\nu^n(\{s\},dx))^2]\mid\le \tag{19}$$
$$\le 3\varepsilon^2\,\|h\|^2\int_0^t\int_{\|x\|>\delta}\nu^n(ds,dx) \xrightarrow{P} 0,$$

$$\mid[(M^{n1},h)]_t - [(M^{n\delta},h)]_t\mid\le$$
$$\le\mid\sum_{0<s\le t}[(\int_{\|x\|\le 1}(x,h)(\mu^n-\nu^n)(\{s\},dx))^2-(\int_{\|x\|\le\delta}(x,h)(\mu^n-\nu^n)(\{s\},dx))^2]\mid\le$$
$$\le 2\,\|h\|^2\int_0^t\int_{\|x\|>\delta}(\mu^n+\nu^n)(ds,dx) \xrightarrow{P} 0. \tag{20}$$

Таким образом, достаточно проверить, что как при выполнении условия (4), так и при выполнении условия (8)

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_n \mathbf{P}(\mid[(M^{n\delta},h)]_t - < (M^{n\delta},h)>_t|> a) = 0. \tag{21}$$

Пусть $m^n_t = [(M^{n\delta},h)]_t - < (M^{n\delta},h)>_t$. Тогда m^n – действительный процесс, который локально является чисто разрывным квадратично интегрируемым мартингалом ограниченной вариации. Процесс $(m^n)^2 = ((m^n_t)^2, \mathcal{F};\mathbf{R})$ доминируется процессом $[m^n,m^n]$, но

$$[m^n,m^n]_t = \sum_{0<s\le t}(\Delta m^n_s)^2 \le \sup_{0<s\le t}\mid\Delta m^n_s\mid([(M^{n\delta},h)]_t + < (M^{n\delta},h)>_t). \tag{22}$$

Из (15), (16) следует, что $\mid\Delta m^n_t\mid\le 3\delta^2\parallel h\parallel^2$ для любого $t>0$ и, следовательно, в силу (22) процесс $(m^n)^2$ доминируется процессами $6\delta^2\parallel h\parallel^2[(M^{n\delta},h)]$ и $6\delta^2\parallel h\parallel^2 < (M^{n\delta},h)>$.

Если выполнено условие (4) и, следовательно, соотношение (17), то при $b > 0$ и $\delta^2 < b \;/\; [6 \parallel h \parallel^2 (< (M,h) > +1)]$:

$$\limsup_n \mathbf{P}(6\delta^2 \parallel h \parallel^2 < (M^{n\delta}, h) >_t > b) = 0$$

и (21) выполнено в силу неравенства Ленгляра (10).

При условии (8) имеет место соотношение (18), следовательно, при том же δ

$$\limsup_n \mathbf{P}(6\delta^2 \parallel h \parallel^2 \; [(M^{n\delta}, h)]_t \; > b) = 0.$$

Скачки процесса $[(M^{n\delta}, h)]$ равномерно ограничены, поэтому справедливость (21) также вытекает из неравенства Ленгляра (11).

Учитывая замечание 1, эквивалентность (5) и (9) доказывается аналогично.

4. Доказательство теоремы 1

Прежде всего заметим, что из канонического разложения семимартингала (1) следует, что

$$\Delta B_t = \int_{\|x\| \le 1} x\nu(\{t\}, dx)$$

и при выполнении условия (2) из условия (3) вытекает, что

$$B_t^{n\varepsilon} \xrightarrow{P} 0, \quad \varepsilon \in (0,1],\, t > 0, \tag{23}$$

а из условия (6)

$$\sup_{0<s\le t} \|B_t^{n\varepsilon}\| \xrightarrow{P} 0, \quad \varepsilon \in (0,1],\, t > 0. \tag{24}$$

Для доказательства сходимостей $X^n \xrightarrow{D_f} M, \quad X^n \xrightarrow{D} M$ достаточно убедиться в них для каждого конечного временного интервала (см. [12]). Зафиксируем поэтому некоторое $T > 0$ и будем обозначать через $X^n \xrightarrow{D(T)} M \quad (X^n \xrightarrow{D_f(T)} M)$ слабую сходимость (конечномерных) распределений X^n к распределению (к конечномерным распределениям) M на $[0,T]$.

Выберем произвольное $l \ge 1$ и $0 \le t_1 < ... < t_l \le T$, тогда для доказательства сходимости $X^n \xrightarrow{D_f(T)} M$ достаточно проверить, что $(X^n_{t_1}, ..., X^n_{t_l}) \xrightarrow{d} (M_{t_1}, ..., M_{t_l})$.

Пусть $\gamma_t^n(\varepsilon) = \int_0^t \int_{\|x\|>\varepsilon} x\mu^n(ds, dx)$, тогда

$$\sup_{t\le T} \|\gamma_t^n(\varepsilon)\| \le \int_0^T \int_{\|x\|>\varepsilon} x\mu^n(ds, dx) = \sum_{0<s\le T} \|\Delta X_s^n\| I(\|\Delta X_s^n\| > \varepsilon) \tag{25}$$

и для всякого $\delta \in (0, \varepsilon)$

$$\{\sum_{0<s\le T} \|\Delta X_s^n\| I(\|\Delta X_s^n\| > \varepsilon) > \delta\} \subseteq \{\sum_{0<s\le T} I(\|\Delta X_s^n\| > \varepsilon) > \delta\}, \tag{26}$$

но

$$\sum_{0<s\leq T} I(\|\Delta X^n_s\| > \varepsilon) = \int_0^T \int_{\|x\|>\varepsilon} \mu^n(ds, dx). \tag{27}$$

В силу условия (2) и следствия из неравенства Ленгляра (12) правая часть в (27) при $n \to \infty$ сходится по вероятности к нулю, поэтому

$$\sup_{t\leq T} \|\gamma^n_t(\varepsilon)\| \xrightarrow{P} 0. \tag{28}$$

Из условия (4) следует, что $< m^{n\varepsilon}_i + m^{n\varepsilon}_j >_t \xrightarrow{P} < m_i + m_j >_t$. Отсюда и из условий (4), (5), в силу леммы 1 в [13], вытекает, что

$$\sup_{t\leq T} | < m^{n\varepsilon}_i, m^{n\varepsilon}_j >_t - < m_i, m_j >_t | \xrightarrow{P} 0, \tag{29}$$

$$\sup_{t\leq T} | < M^{n\varepsilon} >_t - < M >_t | \xrightarrow{P} 0.$$

Для доказательства сходимостей $X^n \xrightarrow{D_f(T)} M$, $X^n \xrightarrow{D(T)} M$ достаточно убедиться, что из любой последовательности $\{n'\}$ можно выбрать такую подпоследовательность $\{n''\}$, что $X^{n''} \xrightarrow{D_f(T)} M$, $X^{n''} \xrightarrow{D(T)} M$ (см. теорему 2.3 в [10]). В силу леммы 1 и соотношений (23), (28), (29), (24) из любой последовательности можно выбрать такую подпоследовательность $\{n_k\}$, что

$$(2), (3) \;\Rightarrow\; B^{n_k 1/k}_{t_i} \xrightarrow{P} 0, \quad 1 \leq i \leq l, \tag{30}$$

$$\sup_{t\leq T} \|\gamma^{n_k}_t(1/k)\| \xrightarrow{P} 0, \tag{31}$$

$$\sup_{t\leq T} | < m^{n_k 1/k}_i, m^{n_k 1/k}_j >_t - < m_i, m_j >_t | \xrightarrow{P} 0, \tag{32}$$

$$\sup_{t\leq T} | < M^{n_k 1/k} >_t - < M >_t | \xrightarrow{P} 0,$$

$$(2), (6) \;\Rightarrow\; \sup_{t\leq T} \|B^{n_k 1/k}_t\| \xrightarrow{P} 0. \tag{33}$$

Положим $M^k_t = M^{n_k 1/k}_t, t \leq T$. Тогда $X^{n_k}_t = B^{n_k 1/k}_t + M^k_t + \gamma^{n_k}_t(1/k)$ и, в силу (30), (31), (33) и леммы 5 в [1], которая верна для пространства $(D(\mathbb{H}), \mathcal{D})$. Для сходимостей $X^{n_k} \xrightarrow{D(T)} M$, $(X^{n_k}_{t_1}, ..., X^{n_k}_{t_l}) \xrightarrow{d} (M_{t_1}, ..., M_{t_l})$ достаточно лишь показать, что

$$M^k \xrightarrow{D(T)} M, \quad (M^k_{t_1}, ..., M^k_{t_l}) \xrightarrow{d} (M_{t_1}, ..., M_{t_l}). \tag{34}$$

Согласно теоремы 2 в [14] семейство мер процессов $M^k, k \geq 1$ плотно в $(D(\mathbb{H}), \mathcal{D})$, тем самым для сходимости $M^k \xrightarrow{D(T)} M$ надо лишь показать, что

$$M^k \xrightarrow{D_f(T)} M. \tag{35}$$

Выберем произвольное $m \geq 1$ и $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m = T$. Пусть $h = h(t), 0 \leq t \leq T$ – кусочно постоянная непрерывная слева функция, принимающая конечное число значений: $h(t) = h_i$, если $t \in (t_{i-1}, t_i]$. Положим для $t \in (0, T]$

$$N_t^k = \sum_{i=1}^{m} (h_i, M_{t_i \wedge t}^k - M_{t_{i-1} \wedge t}^k), \quad N_t = \sum_{i=1}^{m} (h_i, M_{t_i \wedge t} - M_{t_{i-1} \wedge t}). \tag{36}$$

Согласно теоремы 2 в [14] семейство распределений случайных векторов $(M_{t_1}^k, ..., M_{t_m}^k)$ плотно $(\mathbb{H}^m, \mathcal{B}(\mathbb{H}^m))$, поэтому в силу леммы 1.6 в [15] для доказательства (35) достаточно установить, что

$$M \exp^{iN_T^k} \to M \exp^{iN_T}. \tag{37}$$

Заметим, что

$$< N^k >_t = \sum_{i=1}^{m} < (h_i, M_{t_i \wedge t}^k - M_{t_{i-1} \wedge t}^k) >, \tag{38}$$

$$< N >_t = \sum_{i=1}^{m} < (h_i, M_{t_i \wedge t} - M_{t_{i-1} \wedge t}) > .$$

Из (32) следует, что для любого $y \in \mathbb{H}$:

$$\sup_{t \leq T} | < (y, M^k) >_t - < (y, M) >_t | \xrightarrow{P} 0$$

и, следовательно, из (38) вытекает сходимость

$$< N^k >_t \xrightarrow{P} < N >_t, \quad t \leq T. \tag{39}$$

Так как $\|\Delta M_t^k\| \leq 2/k$, то $|\Delta N_t^k| \leq d_k$, где $d_k = 2 \max_{t \leq T} \|h(t)\|/k$ и утверждение (37) следует из (39) в силу леммы 2.

Докажем теперь, что при выполнении условия (6), условия (2), (4), (5) необходимы для сходимости $X^n \xrightarrow{D} M$.

Так как условие (2) (в силу теоремы 2) эквивалентно (7), то необходимость (2) вытекает из леммы 1 в [2], которая верна для гильбертовозначных процессов.

Из условия (2) (см. (25) - (28)) и (6), в силу леммы 5 в [1], следует справедливость импликации

$$X^n \xrightarrow{D} M \Rightarrow M^{n\varepsilon} \xrightarrow{D} M. \tag{40}$$

Отсюда, в силу следствия 1 к теореме 5.1 в [10], следует, что для любого $h \in \mathbb{H}$ $(M^{n\varepsilon}, h) \xrightarrow{D} (M, h)$. Так как $(M^{n\varepsilon}, h) \in \mathcal{M}_{loc}^2(\mathbb{R})$ и $|\Delta(M^{n\varepsilon}, h)| \leq 2\varepsilon\|h\|$, то, применяя теорему 2 из работы [2] и теорему 2 из [1], получаем сходимость $< (M^{n\varepsilon}, h) >_t \xrightarrow{P} < (M, h) >_t$, которая доказывает необходимость условия (4).

Из соотношения (40) согласно лемме 2 вытекает необходимость условия (5).

5. Следствие для схемы серий

Пусть $X_t^n = \sum_{k=0}^{[nt]} \xi_{nk}$, $\mathcal{F}_t^n = \sigma\{X_s^n, s \le t\}$, $0 \le t \le 1$, $\xi_{n0} = 0$, (ξ_{nk}) – схема серий гильбертовозначных случайных величин, $0 \le k \le n, n \ge 1$. Далее будем обозначать через $W = (W_t, \mathcal{F}_t; \mathbb{H})$ гильбертовозначный винеровский процесс с ковариационным оператором $\mathbb{S}$ ($\mathbb{S}$ - оператором), то есть такой непрерывный процесс с независимыми приращениями, что для любого $u < t$ и $h \in \mathbb{H}$ действительная случайная величина $(W_t - W_u, h)$ имеет гауссовское распределение с нулевым средним и дисперсией $(t-u)(\mathbb{S}h, h)$ [16].

Используя обозначение $\xi^a \equiv \xi I(\|\xi\| \le a)$, введем условия, которые предполагаются выполненными при всех $t \in [0,1]$, $\varepsilon \in (0,1]$ и $\mathcal{F}_k^n = \mathcal{F}_t^n$ при $k = [nt]$:

$$\sum_{k=1}^{n} P(\|\xi_{nk}\| > \varepsilon | \mathcal{F}_{k-1}^n) \xrightarrow{P} 0, \tag{41}$$

$$\sum_{k=1}^{[nt]} \{E((\xi_{nk}^\varepsilon, e_i)(\xi_{nk}^\varepsilon, e_j)|\mathcal{F}_{k-1}^n) - \tag{42}$$

$$-E((\xi_{nk}^\varepsilon, e_i)|\mathcal{F}_{k-1}^n)E((\xi_{nk}^\varepsilon, e_j)|\mathcal{F}_{k-1}^n)\} \xrightarrow{P} t(\mathbb{S}e_i, e_j),$$

$$\sum_{k=1}^{[nt]} \{E(\|\xi_{nk}^\varepsilon\|^2 | \mathcal{F}_{k-1}^n) - \|E(\xi_{nk}^\varepsilon|\mathcal{F}_{k-1}^n)\|^2\} \xrightarrow{P} tTr\mathbb{S}, \tag{43}$$

и условия

$$\sup_{0<s\le 1} \|\xi_{nk}^1\| \xrightarrow{P} 0, \tag{44}$$

$$\sum_{k=1}^{[nt]} \{((\xi_{nk}^\varepsilon, e_i) - E((\xi_{nk}^\varepsilon, e_i)|\mathcal{F}_{k-1}^n))((\xi_{nk}^\varepsilon, e_j) - E((\xi_{nk}^\varepsilon, e_j)|\mathcal{F}_{k-1}^n))\} \xrightarrow{P} t(\mathbb{S}e_i, e_j), \tag{45}$$

$$\sum_{k=1}^{[nt]} \|\xi_{nk}^1 - E(\xi_{nk}^1|\mathcal{F}_{k-1}^n)\|^2 \xrightarrow{P} tTr\mathbb{S}. \tag{46}$$

Следующее следствие является простой переформулировкой теорем 1 и 2 для рассматриваемого частного случая.

Следствие. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *Пусть выполнено условие*

$$\sum_{k=1}^{[nt]} E(\xi_{nk}^1|\mathcal{F}_{k-1}^n) \xrightarrow{P} 0,$$

тогда: (41,42,43) $\Leftrightarrow$ (44,42,43) $\Leftrightarrow$ (41,45,43) $\Leftrightarrow$ (41,42,46) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (44,45,43) $\Leftrightarrow$ (44,42,46) $\Leftrightarrow$ (41,45,46) $\Leftrightarrow$ (44,45,46) $\Rightarrow X^n \xrightarrow{D_f} W$.

2) *Пусть выполнено условие*

$$\sup_{0<s\le 1} \|\sum_{k=1}^{[ns]} E(\xi_{nk}^1|\mathcal{F}_{k-1}^n)\| \xrightarrow{P} 0,$$

тогда (41,42,43) $\Leftrightarrow$ (44,42,43) $\Leftrightarrow$ (41,45,43) $\Leftrightarrow$ (41,42,46) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ (44,45,43) $\Leftrightarrow$ (44,42,46) $\Leftrightarrow$ (41,45,46) $\Leftrightarrow$ (44,45,46) $\Leftrightarrow X^n \xrightarrow{D} W$.

Заключение

В этой работе доказаны достаточные, а также необходимые условия слабой сходимости семимартингалов к гильбертовозначному гауссовскому мартингалу с непрерывными траекториями (в частности, к гильбертовозначному винеровскому процессу). При $\mathbb{H} = \mathbb{R}$ эти условия совпадают с приведенными в работах [1] и [2]. Из первой части следствия вытекают соответствующие результаты работ [4], [6].

Список литературы

[1] Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Функциональная центральная предельная теорема для семимартингалов // Теория вероятностей и ее применения. 1980. Т. 25, № 4. С. 683–703.

[2] Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. О необходимых и достаточных условиях в функциональной центральной предельной теореме для семимартингалов // Теория вероятностей и ее применения. 1981. Т. 26, № 1. С. 132–137.

[3] Канделаки Н.П., Сазонов В.В. К центральной предельной теореме для для случайных элементов, принимающих значения из гильбертова пространства // Теория вероятностей и ее применения. 1964. Т. 9, № 1. С. 43–52.

[4] Parthasarathy K.R. Probability measures on metric spaces. New York, London: Acad. Press, 1967. 276 p.

[5] Kruglov V.M. Weak convergence of distributions for sums of independent Hilbert space // Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica. 1974. Vol. 9, № 102. Pp. 33–44.

[6] Giné E., Leon J.R. On the central limit theorem in Hilbert space // Stochastica. 1980. Vol. 4, № 1. Pp. 43–71.

[7] Лаврентьев В.В. О структуре гильбертовозначных мартингалов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2010. № 17. С. 13–20.

[8] Лаврентьев В.В. Каноническое представление гильбертовозначных семимартингалов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2011. № 20. С. 125–130.

[9] Lenglart E. Relation de domination entre deux pricessus // Annales de l'Institut Henri Poincare. Section B: Probabilites et Statistiques. 1977. Vol. 13, № 2. Pp. 171–179.

[10] Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977. 352 с.

[11] Perkins E. On the uniqueness of a local martingale with a given absolute value // Zeitschrift fur Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete. 1981. Vol. 56, № 2. Pp. 255–281.

[12] Григелионис Б. Об относительной компактности множеств вероятностных мер в $D_{[0,\infty)}(\mathcal{X})$ // Литовский математический сборник. 1973. Т. 13, № 4. С. 83–96.

[13] McLeish D.L. An extended martingale invariance principle // Annals of Probability. 1978. Vol. 6, № 1. Pp. 144–150.

[14] Лаврентьев В.В., Назаров Л.В. Условия компактности семейства мер гильбертовозначных мартингалов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 2. С. 67–73.

[15] Прохоров Ю.В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей // Прохоров Ю.В. Избранные труды. М.: ТОРУС ПРЕСС, 2012. С. 148–232.

[16] Metivier M., Pellaumail J. Stochastic integration. New York etc.: Acad. Press, 1980. 179 p.

Библиографическая ссылка

Лаврентьев В.В., Назаров Л.В. Условия слабой сходимости гильбертовозначных семимартингалов к гауссовскому мартингалу // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 3. С. 45–57.

Сведения об авторах

1. **Лаврентьев Виктор Владимирович**
научный сотрудник лаборатории статистического анализа факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова.

Россия, 119991 ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК. E-mail: lavrent@cs.msu.ru.

2. **Назаров Леонид Владимирович**
старший научный сотрудник лаборатории статистического анализа факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова.

Россия, 119991 ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК. E-mail: nazarov@cs.msu.ru.

WEAK CONVERGENCE TO GAUSSIAN MARTINGALE OF SEMIMARTINGALES WITH VALUES IN HILBERT SPACE

Lavrentyev Victor Vladimirovich
Researcher at Laboratory of Statistical Analysis, Computational Mathematics and Cybernetics faculty, Lomonosov Moscow State University.
Russia, 119991 GSP-1, Moscow, Leninskiye gory, Lomonosov MSU.
E-mail: lavrent@cs.msu.ru

Nazarov Leonid Vladimirovich
Senior researcher at Laboratory of Statistical Analysis, Computational Mathematics and Cybernetics faculty, Lomonosov Moscow State University.
Russia, 119991 GSP-1, Moscow, Leninskiye gory, Lomonosov MSU.
E-mail: nazarov@cs.msu.ru

Received 24.06.2015, revised 01.07.2015.

Weak convergence of semimartingales with values in Hilbert space is studied in the paper. Necessary and sufficient conditions for the convergence to Gaussian martingale with continuous trajectories are obtained.

Keywords: semimartingale, martingale, Hilbert space, weak convergence.

Bibliographic citation

Lavrentyev V.V., Nazarov L.V. Weak convergence to Gaussian martingale of semimartingales with values in Hilbert space. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2015, no. 3, pp. 45–57. (in Russian)