УДК 519.21; 517.987

ПРОСТРАНСТВА КВАЗИИНВАРИАНТНЫХ МЕР И СХОДИМОСТЬ В НИХ[1]

Людковский С.В.
МИРЭА, г. Москва

Поступила в редакцию 07.09.2015, после переработки 15.09.2015.

В статье изучаются пространства квазиинвариантных мер, снабженных различными топологиями. Исследуются их вложения, проективные разложения, условия их метризуемости. Доказываются теоремы о сходимости направленностей квазиинвариантных мер и об их продолжениях. Более того, изучаются ассоциированные с ними равномерные пространства.

Ключевые слова: мера, квазиинвариантная, пространство, метрика, сходимость.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 3. С. 59–83.

Введение

Меры и их пространства играют очень важную роль в функциональном анализе и теории вероятностей [1–10], [11]- [5]. Среди них квазиинвариантные меры широко используются во многих ответвлениях математики, включая гармонический анализ, представления групп и геометрию. Хотя пространства мер интенсивно изучались, свойства пространств квазиинвариантных мер оставались менее изученными.

Конкретные примеры семейств квазиинвариантных мер содержатся в цитированной выше литературе. Они включают в себя квазиинвариантные меры на гильбертовых пространствах и на банаховых пространствах или более общих топологических векторных пространствах относительно собственных аддитивных подгрупп [2, 8, 9]- [6, 15, 26, 27]. Также были описаны меры квазиинвариантные относительно групп преобразований состоящих из линейных A или нелинейных операторов B на сепарабельном вещественном гильбертовом пространстве l_2 таких, что $A-I$ или $B'(x)-I$ являются ядерными операторами или более общим образом операторами Гильберта-Шмидта с некоторыми другими наложенными условиями, где I обозначает единичный оператор, $B'(x)$ обозначает сильную (Фреше) производную оператора B в точке $x \in X$. В частности, они могут быть гауссовыми мерами.

Также квазиинвариантные меры на топологических группах, которые могут быть нелокально компактными относительно собственных подгрупп, исследовались в работах [2,10,18,19,21-23]. Более общим образом изучались квазиинвариантные меры на многообразиях и топологических пространствах, которые могут

[1] Исследование поддержано грантом РФФИ, проект №14-11-00364.

быть нелокально компактными относительно групп преобразований [2, 12, 20, 23]. Для локально компактных групп и топологических пространств изучение квазиинвариантных мер было начато еще раньше (смотри, например, [4, 28] и ссылки в них). Используя полиэдральные разложения полных равномерных пространств, можно задать обширные семейства квазиинвариантных мер на полных равномерных пространствах относительно определенных их групп преобразований [15, 23].

В отличии от пространств мер, семейства квазиинвариантных мер оказываются в общем случае нелинейными, но могут быть снабжены топологической или равномерной структурами.

Данная работа продолжает предыдущие публикации [15, 18] автора по данной теме и затрагивает новые аспекты теории.

В тех публикациях изучалась сходимость направленностей квазиинвариантных мер, но с довольно сильным условием на факторы квазиинвариантности мер типа равномерной сходимости на каждом компактном подмножестве. В данной работе рассматриваются более общие классы мер и накладываются более слабые условия на факторы квазиинвариантности и топологии. Более того, исследуются новые общие свойства топологических пространств квазиинвариантных мер, кроме сходимости направленностей мер.

В данной статье изучаются пространства квазиинвариантных мер, снабженных различными топологиями. Исследуются их вложения, проективные разложения, условия их метризуемости. Доказаны также теоремы о сходимости направленностей квазиинвариантных мер и об их продолжениях. Более того, приводятся результаты об ассоциированных с ними равномерных пространствах.

Как известно, при определенных условиях может существовать производная Радона-Никодима одной σ-гладкой меры относительно другой меры [3,4]. Однако, в данной работе заранее не предполагается, что квазиинвариантная мера должна иметь фактор квазиинвариантности, то есть производную Радона-Никодима преобразованной меры относительно исходной меры.

Во второй теореме сравниваются две различные топологии на пространствах мер, принимая во внимание группы преобразований. В предложении 5 выяснена связь между квазиинвариантными мерами и числом Суслина топологического пространства. В теореме 6 раскрывается взаимная зависимость между ограниченными квазиинвариантными функционалами и σ-гладкими квазиинвариантными мерами. Также изучается отношение эквивалентности на пространстве непрерывных функций, индуцированное фактором квазиинвариантности (смотри предложение 7 и следствие 8).

В предложении 9 доказано, что в топологическом пространстве квазиинвариантных мер имеются замкнутые линейные подпространства относительно слабой топологии. Доказывается теорема 11 о продолжениях квазиинвариантных мер с тихоновского топологического пространства на их волмэновские расширения. Метризуемость пространств квазиинвариантных мер при определенных условиях описана в теореме 12. Некоторые результаты об областях значений квазиинвариантных мер доказаны в лемме 13 и предложении 14. Условия, при которых пространства квазиинвариантных мер плотны в пространстве мер в слабой топологии, также изучаются (смотри теорему 15 и предложение 16).

Равномерные пространства ассоциированные с алгебрами множеств и пространствами квазиинвариантных мер, и действиями на них групп исследуются в теоремах 18 и 19. Далее доказана теорема 21 о сходимости последовательностей квазиинвариантных мер при довольно мягких условиях. Продолжения квазиинвариантных мер для топологических групп также исследуются (смотри теорему 22). Результаты о разложениях квазиинвариантных мер и их пространств с помощью обратных спектров даются в теоремах 23 и 24.

Все главные результаты данной статьи получены впервые.

1. Семейства квазиинвариантных мер

Во избежание недоразумений сначала даются определения, которые могут варьироваться в литературе.

1. Определения. Пусть X будет $T_1 \cap T_{3.5}$ топологическим пространством и пусть G будет группой, действующей на X, так что каждому элементу $g \in G$ соответствует отображение $h_g : X \to X$ удовлетворяющее условиям: $h_g \circ h_j = h_{gj}$ для всех $g, j \in G$ и $h_e = id$, где $id(x) = x$ для любого $x \in X$ обозначает тождественное отображение, e обозначает единичный элемент в G. Кратко это будет записываться $h_g(x) = gx$ для любых $g \in G$ и $x \in X$.

Пусть $C(X, \mathbf{F})$ (или $C_b(X, \mathbf{F})$) - это пространство всех непрерывных (или непрерывных и ограниченных) функций из топологического пространства X в поле $\mathbf{F}$, где поле $\mathbf{F}$ является полем вещественных чисел $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ или полем комплексных чисел $\mathbf{F} = \mathbf{C}$. Положим $\mathsf{Z} := \{Z : Z = f^{-1}(0), f \in C_b(X, \mathbf{R})\}$ и $\mathsf{U} := \{U : U = X \setminus Z,\ Z \in \mathsf{Z}\}$, также будет использоваться обозначение $\mathcal{H} = \mathcal{H}(X)$ для минимальной алгебры содержащей эти семейства Z и U, тогда $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$ обозначает минимальную σ-алгебру содержащую Z и U.

Далее предполагается, что $g : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ и $gX = X$ для любого элемента $g \in G$, если не будет оговорено что-либо иное.

Меры $m, n : \mathcal{H} \to \mathbf{F}$ называются эквивалентными $m \sim n$, если $|m| << |n|$ и $|n| << |m|$, где $|m|$ обозначает вариацию меры m, то время как двойное неравенство $|m| << |n|$ означает, что $|m|$ абсолютно непрерывна относительно $|n|$.

Мера $m : \mathcal{H} \to \mathbf{F}$ называется (лево) квазиинвариантной относительно группы G, если m^g эквивалентна m для всякого $g \in G$, где $m^g(A) := m(g^{-1}A)$ для любого $A \in \mathcal{H}$. Тогда $d_m(g, x) := m^g(dx)/m(dx)$ обозначает (левый) фактор квазиинвариантности меры m, когда он существует, где $g \in G$, $x \in X$ и предполагается, что $d_m(g, x) \in \mathbf{F}$.

Мы будем использовать обозначение $M(X, \mathbf{F}, \mathcal{H})$ для семейства мер на $\mathcal{H}$ со значениями в $\mathbf{F}$. Соответствующее семейство всех квазиинвариантных относительно группы G мер на измеримом пространстве $(X, \mathcal{H})$ мы обозначим посредством $Q(X, \mathbf{F}, \mathcal{H}, G)$, а его подсемейство неотрицательных мер $Q^+(X, \mathbf{R}, \mathcal{H}, G)$.

Пусть функция $d : G \times X \to \mathbf{F}$ удовлетворяет условиям:

(1) $d(e, x) = 1$ для всякого $x \in X$, где $e \in G$ обозначает единичный элемент группы G,

(2) $d(g, x) \neq 0$ для любых $g \in G$ и $x \in X$, также пусть

(3) d удовлетворяет условию коцикла: $d(sg, x) = d(g, s^{-1}x)d(s, x)$ для любых $s, g \in G$ и $x \in X$.

Мы обозначим через $Q^d(X, \mathbf{F}, \mathcal{H}, G)$ семейство всех мер $m \in M(X, \mathbf{F}, \mathcal{H})$ так, что мера m является лево квазиинвариантной с существующим фактором квазиинвариантности $d_m(g, x) = d(g, x)$ для всякого $g \in G$ и m-почти всех $x \in X$. Его подсемейство неотрицательных мер мы обозначим через $Q^{+,d}(X, \mathbf{R}, \mathcal{H}, G)$. Если некоторые данные наподобие $\mathbf{F}$ или G, или $\mathcal{H}$ указаны, то они могут быть для краткости опущены из обозначения.

2. Топологии на пространствах квазиинвариантных мер

2. Теорема. *Семейства окрестностей*

$$(1) \quad N_s(m_0; f_1, ..., f_n; G; y) :=$$

$$\{m : m \in M(X),\ \forall r = 1, ..., n\ sup_{g \in G} | \int_X f_r(x)(m^g(dx) - m_0^g(dx)| < y\};$$

$$(2) \quad N_w(m_0; f_1, ..., f_n; g(1), ..., g(k); y) :=$$

$$\{m : m \in M(X),\ \forall r = 1, ..., n, j = 1, ..., k\ | \int_X f_r(x)(m^{g(j)}(dx) - m_0^{g(j)}(dx)| < y\}$$

индуцируют $T_1 \cap T_{3.5}$ топологии $\tau_s(G)$ и $\tau_w(G)$ на $M(X) = M(X, \mathbf{F}, \mathcal{H})$ и $Q(X) \hookrightarrow M(X)$, где $f_1 \in C_b(X, \mathbf{F}), ..., f_n \in C_b(X, \mathbf{F}),\ n, k \in \mathbf{N},\ y > 0$ и $g(1) \in G, ..., g(k) \in G$, $Q(X) = Q(X, \mathbf{F}, \mathcal{F}, G)$. В общем случае первая топология сильнее, чем вторая, когда X и G бесконечны. Если $h_g : X \to X$ - это гомеоморфизм для любого $g \in G$, то топология $\tau_w(G)$ эквивалентна обычной слабой топологии $\tau_w = \tau_w(\{e\})$.

Доказательство. Если $m \in M(X)$, то $m^g \in M(X)$, так как $g : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, где $m^g(E) := m(g^{-1}E)$ для любых $E \in \mathcal{H}$ и $g \in G$, хотя m^g не обязано быть эквивалентна m. Сначала мы проверим из формул (1) и (2), что

$N_s(m_0; f_1, ..., f_n; G; y) \cap N_s(m_0; h_1, ..., h_k; G; y) = N_s(m_0; f_1, ..., f_n, h_1, ..., h_k; G; y)$
и

$N_w(m_0; f_1, ..., f_n; g(1), ..., g(k); y) \cap N_w(m_0; h_1, ..., h_l; u(1), ..., u(t); y) =$
$N_w(m_0; f_1, ..., f_n, h_1, ..., h_l; g(1), ..., g(k), u(1), ..., u(t); y)$
для любых функций $f_1 \in C_b(X, \mathbf{F}), ..., f_n \in C_b(X, \mathbf{F}), h_1 \in C_b(X, \mathbf{F}), ..., h_l \in C_b(X, \mathbf{F})$ и элементов группы $g(1) \in G, ..., g(k) \in G, u(1) \in G, ..., u(t) \in G$. Также для любого $m_0 \in M(X)$ существуют непустые окрестности $N_s(m_0; f_1, ..., f_n; G; y)$ и $N_w(m_0; f_1, ..., f_n; g(1), ..., g(k); y)$. Поэтому, семейства $\mathsf{B}_s(G)$ и $\mathsf{B}_w(G)$ даваемые формулами (1) и (2) соответственно являются базами топологий, так как они удовлетворяют условиям $1.1(B1, B2)$ [29], следовательно, они индуцируют топологии, которые будут обозначаться $\tau_s(G)$ и $\tau_w(G)$ соответственно.

В силу теоремы II.1 [5] топологическое пространство $(M(X), \tau_w(G))$ является вполне регулярным (тихоновским), то есть, $(M(X), \tau_w(G)) \in T_1 \cap T_{3.5}$. Поскольку $Q(X) \subset M(X)$, то топология $\tau_w(G)$ на $M(X)$ индуцирует соответствующую топологию на $Q(X)$ и, следовательно, $(Q(X), \tau_w(G)) \in T_1 \cap T_{3.5}$.

В том случае, когда топологическое пространство X и группа G бесконечны, топология $\tau_s(G)$ в общем случае сильнее, чем τ_w, так как окрестность $N_s(m_0; f_1, ..., f_n; G; y)$ с непостоянными непрерывными ограниченными функциями $f_1, ..., f_n$ не может быть в общем случае получена как конечное пересечение слабых окрестностей $N_w(m_0; f_1, ..., f_n; g(1), ..., g(k); y)$, где $n, k \in \mathbf{N}$.

Если $m_0 \neq m_1 \in M(X)$, то существует функция $f \in C_b(X, \mathbf{F})$ такая, что $m_0(f) \neq m_1(f)$ (смотри также [1,3]), где

$$m(f) := \int_X f(x) m(dx),$$

так как $X \in T_1 \cap T_{3.5}$. Тогда

$$\sup_{g \in G} |m_0^g(f) - m_1^g(f)| \geqslant | \int_X f(x)[m_0(dx) - m_1(dx)]| = y > 0,$$

так как $m^e(dx) = m(dx)$ для единичного элемента e группы G. Поэтому, $N_s(m_0; f; G; y/4) \cap N_s(m_1; f; G; y/4) = \varnothing$, следовательно, $(M(X), \tau_s(G)) \in T_2$ и, следовательно, $(M(X), \tau_s(G)) \in T_1$ (смотри также §1.5 [29]).

Пусть теперь $m_0 \in M(X)$ и пусть J будет замкнутым подмножеством в топологическом пространстве $(M(X), \tau_s(G))$. Мы возьмем окрестность

$U := N(m_0; f_1, ..., f_n; G; y)$

меры $m_0 \in M(X)$ и отметим, что

$$U = \bigcap_{j=1}^{n} N(m_0; f_j; G; y),$$

где $y > 0$. Положим

$$u_j(m) := \min(\sup_{g \in G} |m^g(f_j) - m_0^g(f_j)|/y, 1),$$

тогда $u_j(m)$ непрерывна относительно $\tau_s(G)$ топологии на $M(X)$, где $y > 0$ - это отмеченное число. Более того, $u_j(m_0) = 0$, а также $u_j(m) = 1$ на $M(X) - N(m_0; f_1, ..., f_n; G; y)$. Таким образом, функция $u(m) := \max(u_1, ..., u_n)$ такова, что $u(m_0) = 0$ и $u(m) = 1$ на $M(X) - U$. Это означает, что $(M(X), \tau_s(G)) \in T_{3.5}$.

Поскольку $Q(X) \subset M(X)$, то топология $\tau_s(G)$ на $M(X)$ индуцирует ее на $Q(X)$ и, следовательно, $(Q(X), \tau_s(G)) \in T_1 \cap T_{3.5}$.

Пусть теперь $h_g : X \to X$ будет гомеоморфизмом для любого $g \in G$, тогда каждой ограниченной непрерывной функции $f \in C_b(X, \mathbf{F})$ соответствует $f^g \in C_b(X, \mathbf{F})$, где $f^g(x) := f(g^{-1}x)$ для всякого $x \in X$. Поэтому, из равенства

$$\int_X f(x) m^g(dx) = \int_X f^{g^{-1}}(y) m(dy)$$

для любых $f \in C_b(X, \mathbf{F})$ и $g \in G$ вытекает, что

$$(3) \quad N_w(m_0; f_1, ..., f_n; g(1), ..., g(k); y) :=$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{k} N_w(m_0; f_{i,j}; y),$$

где $f^g(y) := f(g^{-1}y)$, $f_{i,j} = f_i^{g(j)^{-1}}$ для любых $i = 1, ..., n$ and $j = 1, ..., k$. Таким образом, топология $\tau_w(G)$ на $M(X)$ эквивалентна слабой топологии $\tau_w = \tau_w(\{e\})$, так как их базы $\mathsf{B}_w(G)$ и $\mathsf{B}_w(\{e\})$ эквивалентны в рассматриваемом случае.

3. Следствие. $(Q^+(X), \tau_w)$ *замкнуто в топологическом пространстве* $(Q(X), \tau_w)$ *и* $(Q^+(X), \tau_s(G))$ *замкнуто в топологическом пространстве* $(Q(X), \tau_s(G))$.

Доказательство. Если $(m_j : j \in J)$ - это направленность неотрицательных мер сходящаяся к m в $(Q(X), \tau_w)$ или в $(Q(X), \tau_s(G))$ соответственно, тогда ее предел m также неотрицателен.

4. Определения. Подмножество V в пространстве $C(X,\mathbf{R})$ называется ограниченным, если существуют две функции $f \in C(X,\mathbf{R})$ и $h \in C(X,\mathbf{R})$ такие, что $f \leqslant u \leqslant h$ для любого $u \in V$.

Говорят, что линейный функционал $p : C(X,\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ ограничен, если $p(V)$ ограниченно в $\mathbf{R}$ для любого подмножества V ограниченного в $C(X,\mathbf{R})$.

Ограниченный линейный функционал p называется σ-гладким (или τ-гладким), если

$\lim_n p(f_n) = 0$ для любой последовательности (направленности) $(f_n : n \in A)$ в $C(X,\mathbf{R})$ такой, что $f_n \downarrow 0$

(то есть, $f_n(x) \geqslant f_m(x) \geqslant 0$ для любого $m \geqslant n \in A$ и $\lim_n f_n(x) = 0$ для любого $x \in X$), где $A = \mathbf{N}$ (или A - это направленное множество соответственно). Тогда $\mathbf{C}$-линейный функционал $p : C(X,\mathbf{C}) \to C(X,\mathbf{C})$ ограничен, если $p = p_1 + ip_2$ и их ограничения $p_j|_{C(X,\mathbf{R})} : C(X,\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ являются $\mathbf{R}$-линейными и ограниченными для $j = 1$ и $j = 2$, где $p_j : C(X,\mathbf{C}) \to C(X,\mathbf{C})$ - это $\mathbf{C}$-линейные функционалы для $j = 1$ и $j = 2$; $i = \sqrt{-1}$.

Соответствующие меры на $\mathcal{B}$ называются σ-гладкими или τ-гладкими соответственно, их семейства обозначим посредством $M_\sigma(X,\mathbf{F},\mathcal{H})$ или $M_\tau(X,\mathbf{F},\mathcal{H})$, в то время как соответствующие семейства квазиинвариантных относительно группы G мер будут обозначаться $Q_\sigma(X,\mathbf{F},\mathcal{F},G)$ или $Q_\tau(X,\mathbf{F},\mathcal{H},G)$. Когда некоторые данные типа $\mathbf{F}$, G или $\mathcal{H}$ указаны, то они могут быть опущены для краткости из этих обозначений.

5. Предложение. *Если хаусдорфова топологическая группа Y имеет лево квазиинвариантную σ-конечную σ-гладкую меру $m : \mathcal{B}(Y) \to [0,\infty]$ относительно плотной подгруппы G, а также $0 < m(U)$ для любого открытого симметричного подмножества $U = U^{-1}$ в Y, то число Суслина $s(Y)$ для Y счетно, $s(Y) \leqslant \aleph_0$.*

Доказательство. Мера m квазиинвариантна, следовательно, если $m(V) = 0$ для некоторого подмножества $V \in \mathcal{B}(Y)$ в Y, то $m^g(V) = 0$ для всех $g \in G$.

С другой стороны, для любой симметричной окрестности $W = W^{-1}$ единичного элемента e в Y и всякого открытого подмножества T в Y существует элемент $g \in G$ такой, что $g^{-1}W \cap T \neq \varnothing$. Мера m является σ-конечной, то есть, имеется счетное дизъюнктное семейство подмножеств $Y_j \in \mathcal{B}(Y)$ такое, что $0 < m(Y_j) < \infty$ и $Y = \bigcup_{j=1}^\infty Y_j$, где $Y_j \cap Y_k = \varnothing$ для любого $j \neq k$. Поэтому, для любого открытого симметричного подмножества $W = W^{-1}$ в Y мы имеем, что существует число j, для которого $m(W \cap Y_j) > 0$, так как $0 < m(W)$. Следовательно, $m^g(W \cap Y_j) > 0$ для любого $g \in G$ и, следовательно, $m(g^{-1}W) > 0$.

Предположим противное, что $s(Y) > \aleph_0$, тогда существует семейство открытых подмножеств $W_b = W_b^{-1}$ и элементов $g_b \in G$ такие, что $g_b^{-1}W_b \cap g_c^{-1}W_c = \varnothing$ для любого $b \neq c \in J$, где J - это множество мощности $card(J) > \aleph_0$. Тогда $card\{(b,i) : b \in J, i \in \mathbf{N}, m(g_b^{-1}W_b \cap Y_i) > 0\} > \aleph_0$. Это влечет существование положительного рационального числа y такого, что $card\{(b,i) : b \in J, i \in \mathbf{N}, m(g_b^{-1}W_b \cap Y_i) > y\} > \aleph_0$ и, следовательно, существует j такое, что $card\{b : b \in J, m(g_b^{-1}W_b \cap Y_j) > y\} > \aleph_0$, так как $\aleph_0\aleph_0 = \aleph_0$. Но это приводит к противоречию, так как мера m является σ-гладкой и σ-конечной, $0 < m(Y_j) < \infty$.

3. Функционалы, соответствующие квазиинвариантным мерам

6. Теорема. *Пусть p – это ограниченный линейный функционал на $C(X,\mathbf{F})$*

такой, что

$$p(f^{g^{-1}}(x)) = p(d(g,x)f(x)) \tag{1}$$

для любых $f \in C_b(X, \mathbf{F})$ и $g \in G$, где $d(g,x)$ – это непрерывная функция по переменной x для любого $g \in G$, где $x \in X$, $f^g(x) := f(g^{-1}x)$. Тогда существует квазиинвариантная σ-гладкая мера m, $m \in Q^d_\sigma(X, \mathbf{F})$ такая, что

$$p(f) = \int_X f(x)m(dx) \tag{2}$$

для любого $f \in C(X, \mathbf{R})$. Более того, d удовлетворяет условиям 1$(1-3)$ (смотри определения 1) m-почти всюду на X.

Доказательство. В силу теоремы I.23 [5] и §4 существует мера $m \in M_\sigma(X, \mathbf{F})$ такая, что выполняется формула (2) для любой $f \in C(X, \mathbf{F})$. Заметим, что каждый шар

$$B(f,r) := \{u : u \in C_b(X, \mathbf{R}); \|u\| \leqslant r\}$$

радиуса $0 < r < \infty$ в $C_b(X, \mathbf{R})$ ограничен в $C(X, \mathbf{R})$, так как $-r - s \leqslant u(x) \leqslant r + s$ для любого $x \in X$, где

$$s = \|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|,$$

в то время как $1_X \in C_b(X, \mathbf{R}) \subset C(X, \mathbf{R})$, где $1_X(x) = 1$ для любого $x \in X$. Согласно условиям этой теоремы функционал p ограничен и линеен на $C(X, \mathbf{F})$, следовательно, его ограничение на $C_b(X, \mathbf{F})$ также непрерывно в силу определения 4, так как $C_b(X, \mathbf{C}) = C_b(X, \mathbf{R}) \oplus_{\mathbf{R}} iC_b(X, \mathbf{R})$. С другой стороны, имеется равенство

$$\int_X f(x)m^g(dx) = \int_X f^{g^{-1}}(y)m(dy) \tag{3}$$

для любых $f \in C_b(X, \mathbf{F})$ и $g \in G$, так как $g : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ и $gX = X$, где $m^g(dx) := m(g^{-1}dx)$. Из формул (1) и (3) вытекает, что

$$p(f^{g^{-1}}) = \int_X f(x)m^g(dx)$$

и $m^g \in M_\sigma(X, \mathbf{F})$ для всех $g \in G$ и $f \in C_b(X, \mathbf{F})$. Более того, теоремы I.5, I.22 [5] и равенства $(1, 3)$ влекут, что m^g эквивалентна мере m для любого $g \in G$, так как непрерывная ограниченная функция $f \in C_b(X, \mathbf{F})$ произвольна, следовательно, $m \in Q^d_\sigma(X, \mathbf{R})$. Тогда из теорем I.5, I.22 [5] и $(1, 2)$ мы выводим, что выполняется тождество $m^g(dx)/m(dx) = d(g,x)$ m-почти всюду на X для любого $g \in G$. В самом деле, как функция переменной x фактор квазиинвариантности $d(g,x)$ принадлежит $C(X, \mathbf{F})$ и, следовательно, $d(g,)C_b(X, \mathbf{F}) \subset C(X, \mathbf{F})$ для любого $g \in G$, где $m^g(dx)/m(dx)$ обозначает производную Радона-Никодима (смотри, например, [3, 4]). Тогда

$$m^{sg}(dx)/m(dx) = [m(g^{-1}s^{-1}dx)/m(s^{-1}dx)][m(s^{-1}dx)/m(dx)]$$

$$\Rightarrow d(sg,x) = d(g, s^{-1}x)d(s,x)$$

для любого $s, g \in G$ и m-почти всюду по переменной x, $x \in X$. Более того, $m^e(dx)/m(dx) = 1$ для любого $x \in X$, так как $m^e = m$. Поэтому, функция d

удовлетворяет условиям $1(1-3)$ (смотри определения 1) m-почти всюду на X по переменной x и для любых отмеченных элементов $s, g \in G$ в условиях $1(2,3)$.

4. Отношение эквивалентности, индуцированное фактором квазиинвариантности

7. Предложение. *Предположим, что функция $d : G \times X \to \mathbf{F}$ удовлетворяет условиям $1(1-3)$ (смотри определения 1) и непрерывна по переменной x на X для любого $g \in G$, и отображение $g : X \to X$ непрерывно для любого элемента $g \in G$.*

Тогда существует отношение эквивалентности на $C(X, \mathbf{F})$, индуцированное такой функцией d.

Доказательство. Для всяких функций $f \in C(X, \mathbf{F})$, $h \in C(X, \mathbf{F})$ мы скажем, что они эквивалентны $f \Upsilon_d h$ тогда и только тогда, когда существует элемент $g \in G$ такой, что $f(x) = d(g,x)h(g^{-1}x)$ для всех $x \in X$. Поэтому, если $h \in C(X, \mathbf{F})$, то $h(g^{-1}x) = h^g(x) \in C(X, \mathbf{F})$ как функции переменной x для любого отмеченного элемента $g \in G$. Поэтому, $d(g,x)h(g^{-1}x) \in C(X, \mathbf{F})$, так как фактор квазиинвариантности $d(g,x)$ непрерывен по переменной x, и отображение $g^{-1} : X \to X$ непрерывно.

Тогда в силу условия 1(1) (смотри определения 1) мы получим, что $f \Upsilon_d f$, так как $f(x) = d(e,x)f(e^{-1}x)$ для всех $x \in X$. То есть, отношение Υ_d рефлексивно.

Если $f \Upsilon_d h$ и $h \Upsilon_d u$, то существуют $t, s \in G$ такие, что $f(x) = d(t,x)h(t^{-1}x)$ и $h(x) = d(s,x)u(s^{-1}x)$ для любого $x \in X$, следовательно,

$$f(x) = d(t,x)d(s,t^{-1}x)u(s^{-1}t^{-1}x) = d(ts,x)u((ts)^{-1}x),$$

благодаря условию коцикла 1(3). Таким образом, $f \Upsilon_d u$ и отношение Υ_d транзитивно.

Если $f \Upsilon_d h$, то $h(y) = h(t^{-1}x) = f(x)/d(t,x) = d(s,y)f(s^{-1}y)$ согласно условиям $1(1,3)$, где $x = ty$ и $s = t^{-1}$. Поэтому, отношение Υ_d симметрично. Таким образом, Υ_d является отношением эквивалентности на $C(X, \mathbf{F})$.

8. Следствие. *Пусть m – мера $m \in M(X, \mathbf{F})$, и пусть отображение $g : X \to X$ непрерывно, а также пусть $d(g,x)$ будет функцией непрерывной по переменной $x \in X$ для любого $g \in G$ и удовлетворяющей условиям $1(1-3)$ (смотри определения 1). Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *для любых $f \in C_b(X, \mathbf{F})$ и $h \in C(X, \mathbf{F})$ таких, что $f \Upsilon_d h$ выполнено равенство $m(f) = m(h)$, где*

$$m(f) := \int_X f(x)m(dx);$$

(2) $m \in Q^d(X, \mathbf{F})$.

Доказательство. Предположим, что условие (1) этого следствия выполнено и $f \Upsilon_d h$, где $f \in C_b(X, \mathbf{R})$. В силу предложения 7 существует элемент $g \in G$ такой, что $h(x) = d(g,x)f(g^{-1}x)$ для любого $x \in X$, так как отображение $g^{-1} : X \to X$ непрерывно. Замена переменной дает равенство

$$\int_X u(gy)m(dy) = \int_X u(x)m^g(dx)$$

для любого $u \in C_b(X, \mathbf{F})$, так как $g : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ и $gX = X$. Непрерывная ограниченная функция $f \in C_b(X, \mathbf{R})$ произвольна, следовательно, $m^g(dx)/m(dx) = d(g, x)$ почти всюду на X относительно меры m для всякого $g \in G$, так как

$$m(f) = \int_X f(y)m(dy) \text{ and } m(h) = \int_X f(g^{-1}x)d(g, x)m(dx).$$

То есть, $m \in Q^d(X, \mathbf{F})$.

Если условие (2) выполнено и $f \in C_b(X, \mathbf{F})$, и $h \in C(X, \mathbf{F})$, так что $f \Upsilon_d h$, то по предложению 7 существует $g \in G$, для которого $h(x) = d(g, x)f(g^{-1}x)$ для любого $x \in X$, тогда

$$m(h) = \int_X f(g^{-1}x)d(g, x)m(dx) = \int_X f(g^{-1}x)m(g^{-1}dx) = \int_X f(y)m(dy),$$

так как $g : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ и $gX = X$, следовательно, $m(f) = m(h)$.

5. Продолжения квазиинвариантных мер на волмэновское расширение

9. Предложение. *Пусть $d(g, x)$ является функцией непрерывной по переменной $x \in X$ для любого $g \in G$ и удовлетворяющей условиям 1(1 − 3) (смотри определения 1). Тогда $Q^d(X, \mathbf{F})$ – это замкнутое линейное подпространство в $M(X, \mathbf{F})$ относительно τ_w топологии.*

Доказательство. Если $m_1, m_2 \in Q^d(X, \mathbf{F})$ и $a, b \in \mathbf{F}$, то для меры $m(dx) = am_1(dx) + bm_2(dx)$ выполняются тождества $m^g(dx) = am_1^g(dx) + bm_2^g(dx) = ad(g, x)m_1(dx) + bd(g, x)m_2(dx) = d(g, x)m(dx)$ для любого $g \in G$. Поэтому, $Q^d(X, \mathbf{F})$ – это линейное пространство над полем $\mathbf{F}$.

Рассмотрим произвольную направленность $(m_k : k \in K)$, в $Q^d(X, \mathbf{F})$ сходящуюся в $M(X, \mathbf{F})$ к некоторой мере m относительно топологии τ_w, где K – это направленное множество. Тогда мы выводим, что

$$\int_X f(x)m(g^{-1}dx) = \lim_k \int_X f(x)m_k^g(dx) =$$
$$= \lim_k \int_X f(x)d(g, x)m_k(dx) = \int_X f(x)d(g, x)m(dx)$$

для любых $f \in C_b(X, \mathbf{F})$ и $g \in G$, так как $g : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ и $gX = X$. Поэтому, существует производная Радон-Никодима $m(g^{-1}dx)/m(dx) = m^g(dx)/m(dx) = d(g, x)$ почти всюду относительно меры m для любого элемента $g \in G$. Таким образом, $m \in Q^d(X, \mathbf{F})$.

10. Замечание. С другой стороны, множество $Q(X, \mathbf{F})$ не является линейным пространством, когда X и G нетривиальны, потому что разные меры могут иметь различные факторы квазиинвариантности. Отметим, что в общем случае $Q(X, \mathbf{F})$ незамкнуто в $(M(X, \mathbf{F}), \tau_w)$, когда X и G нетривиальны. Например, рассмотрим последовательность гауссовых мер λ_k на поле вещественных чисел $\mathbf{R}$, то есть, на измеримом пространстве $(\mathcal{B}(\mathbf{R}), \mathbf{R})$. Пусть эти меры имеют одно и тоже математическое ожидание v, а дисперсию D_k стремящуюся к нулю. Каждая мера данной последовательности эквивалентна мере Лебега и квазиинвариантна относительно аддитивной группы $(\mathbf{R},+)$ на поле вещественных чисел. Но последовательность λ_k сходится в $(M(\mathbf{R},\mathbf{R}),\tau_w)$ к дираковой мере δ_v с носителем в точке v. Конечно полученная мера δ_v не является квазиинвариантной относительно $(\mathbf{R},+)$.

Аналогичные примеры могут быть рассмотрены для 1) евклидова пространства $\mathbf{R}^n$ относительно его аддитивной группы $G=(\mathbf{R}^n,+)$, $n\in\mathbf{N}$, 2) сепарабельного гильбертова пространства l_2 с G являющейся плотной собственной подгруппой аддитивной группы $(l_2,+)$ и для 3) сепарабельного банахова пространства X с плотной собственной подгруппой аддитивной группы $(X,+)$ (смотри о гауссовых мерах и их обобщениях на гильбертовых пространствах и банаховых пространствах в [6, 8, 9, 14, 15, 26]).

Через wX обозначим волмэновское расширение топологического пространства X, в то время как cl_AB обозначает замыкание подмножества B в топологическом пространстве A.

Напомним, что ультрафильтр с пустым пересечением называется свободным ультрафильтром, где по определению ультрафильтр Y имеет пустое пересечение, если $\cap\{A:\ A\in Y\}=\varnothing$.

Пусть $\mathcal{D}(X)$ будет семейством всех замкнутых подмножеств в X, и пусть $\mathcal{U}(X)$ (и $\mathcal{U}_0(X)$) будет семейством всех ультрафильтров (всех свободных ультрафильтров) в $\mathcal{D}(X)$.

Мера $m:\mathcal{H}\to\mathbf{F}$ называется вещественной, если

$$\lim_{\{F\}} m(F)=0$$

для любого свободного ультрафильтра $\{F\}$ в $\mathcal{D}(X)$.

11. Теорема. *Предположим, что группа G действует на топологическом пространстве X непрерывно $h_g: X\to X$ для любого $g\in G$. Тогда существует отображение $v: Q(X,\mathbf{C})\to Q(wX,\mathbf{C})$ такое, что*

$$p(F')=\lim_{\{F\}} m(F) \tag{1}$$

для любой $m\in Q(X,\mathbf{R})$ с $p=v(m)$ и всякого замкнутого подмножества F' в wX, где $\{F\}$ – это ультрафильтр в X удовлетворяющий условию $\cap\{cl_{wX}F\}=F'$; в частности,

$$p(cl_{wX}F)=m(F).$$

Более того, m вещественна тогда и только тогда, когда $p(F')=0$ для любого замкнутого F' в wX удовлетворяющего условию $F'\subset wX\setminus X$. Если дополнительно m и $v(m)$ являются σ-гладкими, также вариация m конечна на X, то

$$d_{v(m)}(g,x) \tag{2}$$

существует для любых $m\in Q(X,\mathbf{C})$, $g\in G$ и $x\in wX$, также $d_{v(m)}(g,x)=d_m(g,x)$ для любого $g\in G$ и m-почти всюду на X.

Доказательство. Волмэновское расширение wX пространства X получается присоединением к X новых точек, которые являются свободными ультрафильтрами в X. Каждому замкнутому подмножеству F в X сопоставляется замкнутое подмножество $\bar{F}$ в wX присоединением к нему всех свободных ультрафильтров и имеющими в качестве одного из элементов F. Тогда пересечение $\bigcap_k \bar{F}_k$ любого числа таких $\bar{F}_k$ имеющих $\bigcap_k \bar{F}_k \cap X$ замкнутое в X рассматривается как замкнутое в wX.

Поскольку отображение $h_g : X \to X$ непрерывно и $h_{g^{-1}} \circ h_g = h_e = id$ и $gX = X$ для любого $g \in G$, то $h_g : X \to X$ - это гомеоморфизм. Поэтому, если $Y = \{F\}$ является ультрафильтром в X, то $gY = \{gF : F \in Y\}$ - также ультрафильтр в X для любого $g \in G$, так как $h_g : X \to X$ - это гомеоморфизм, где $gA = \{gx : x \in A\}$, $gx = h_g(x)$. Более того, если Y максимален, то gY также максимален. При этом $\bigcap\{F : F \in Y\} = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\bigcap\{gF : F \in Y\} = \varnothing$. Поэтому, если $\bar{F}$ замкнуто в wX, то $g\bar{F}$ определено и также замкнуто в wX для любого $g \in G$ и, следовательно, $g \bigcap_k \bar{F}_k = \bigcap_k g\bar{F}_k$. Это влечет то, что если V замкнуто в wX, то gV замкнуто в wX для любого $g \in G$. Таким образом, гомеоморфизм $h_g : X \to X$ имеет гомеоморфное продолжение $h_g : wX \to wX$ для любого $g \in G$, так как G - это группа, и $h_{g^{-1}} \circ h_g = h_e = id$ - это тождественное отображение.

Возьмем произвольную квазиинвариантную меру $m \in Q(X, \mathbf{C})$ и ультрафильтр $\{F\}$ в X. Поскольку $Q(X, \mathbf{C}) \subset M(X, \mathbf{C})$, то существует $p = v(m) \in M(wX, \mathbf{C})$ такое, что $p(F') = \lim_{\{F\}} m(F)$, и m вещественна тогда и только тогда, когда $p(F') = 0$ для всех замкнутых F' в wX удовлетворяющих условию $F' \subset wX \setminus X$ согласно теореме 12.3 [1].

Остается доказать, что p квазиинвариантна на wX. Мы выводим, что

$$\lim_{\{F\}} m(g^{-1}F) = \lim_{\{F\}} m^g(F) = p^g(F') = p(g^{-1}F') = \int_{F'} p(g^{-1}dy) \tag{3}$$

для любого F' замкнутого в wX. Поэтому, из (3) вытекает, что $|p|(F') = 0$ тогда и только тогда, когда $|p^g|(F') = 0$, так как $m \in Q(X, \mathbf{C})$, следовательно, p^g эквивалентна p на wX для любого $g \in G$, где $|p|$ обозначает вариацию меры p. То есть, $p \in Q(X, \mathbf{C})$.

Существуют функции f_m и f_p такие, что $m(dx) = f_m(x)|m|(dx)$ и $p(dy) = f_p(y)|p|(dy)$. Если меры m и p являются σ-гладкими, то их вариации $|m|$ и $|p|$ являются σ-гладкими. Из конструкции выше вытекает, что условие $|m|(X) < \infty$ влечет $|p|(wX) < \infty$. В силу теоремы I.3.2.2 [3] производные Радона-Никодима $|m^g|(dx)/|m|(dx)$ и $|p^g|(dy)/|p|(dy)$ существуют для любых $g \in G$, $x \in X$ и $y \in wX$. Отсюда вытекает, что производные Радона-Никодима $d_m(g,x) = m^g(dx)/m(dx)$ и $d_p(g,y) = p^g(dy)/p(dy)$ также существуют для всех $g \in G$, $x \in X$ и $y \in wX$ (смотри §I.3.2.2 [3]) так, что

$$p^g(F') = \int_{F'} d_p(g,y)p(dy) = \lim_{\{F\}} m^g(F) = \lim_{\{F\}} \int_F d_m(g,x)m(dx) \tag{4}$$

для любого F' замкнутого в wX. В силу теоремы 3.6.21 [29] топологическое пространство wX удовлетворяет аксиоме отделимости T_1, так как X удовлетворяет T_1. С другой стороны, для любой точки $y \in wX$ существует ультрафильтр замкнутых множеств F'_k в wX удовлетворяющий условию $\{y\} = \bigcap_k F'_k$, так как в wX каждое одноточечное множество $\{y\}$ замкнутое тогда и только тогда, когда wX удовлетворяет T_1 (смотри §1.5 [29]). Следовательно, из формул (3) и (4) вытекает, что с точностью до p-почти всюду фактор квазиинвариантности $d_p(g,y)$ может быть выбран по переменной y таким, что $d_p(g,x) = d_m(g,x)$ для любого $g \in G$ и m-почти всюду на X, так как $X \subset wX$.

6. Метризуемость пространства квазиинвариантных мер

12. Теорема. *Если X – метризуемое пространство, тогда топологическое пространство $(Q^+_\tau(X), \tau_s(G))$ метризуемо.*

Доказательство. Для любого $m \in Q^+_\tau(X)$ положим $T(m) = (m^g : g \in G)$. Поэтому, $T(m) \in (M^+_\tau(X))^G$. Поскольку $m^e = m$, где e обозначает единичный элемент группы G, то $T : Q^+_\tau(X) \to (M^+_\tau(X))^G$ - это инъективное отображение.

В силу теоремы II.4.13 [5] топологическое пространство $(M^+_\tau(X), \tau_w)$ метризуемо. Пусть D обозначает метрику на $(M^+_\tau(X), \tau_w)$. На $(T(Q^+_\tau(X)))^2$ мы введем функцию

$$D^G(T(m), T(p)) := \sup_{g\in G} D(m^g, p^g), \tag{1}$$

которая индуцирует функцию

$$E(m, p) := D^G(T(m), T(p)) \tag{2}$$

на $(Q^+_\tau(X))^2$ для любых $m, p \in Q^+_\tau(X)$. По условиям §1 отображение $h_g : X \to X$ таково, что $h_g(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$ для любого $g \in G$, следовательно, $0 \leqslant m^g(U) \leqslant m(X)$ для любых $g \in G$ и $U \in \mathcal{H}$. Поэтому, $E(m, p) \leqslant m(X) + p(X)$. При этом из формул (1) и (2) вытекает, что $E(m, p) \geqslant D(m, p)$ для любых $m, p \in Q^+_\tau(X)$, следовательно, $E(m, p) = 0$ тогда и только тогда, когда $m = p$. Более того, $E(m, p) = E(p, m)$, так как $D(m^g, p^g) = D(p^g, m^g)$ для любого $g \in G$ и $m, p \in Q^+_\tau(X)$. Более того, мы выводим, что

$$E(m, p) = \sup_{g\in G} D(m^g, p^g) \leqslant \sup_{g\in G}[D(m^g, s^g) + D(s^g, p^g)] \leqslant E(m, s) + E(s, p)$$

для всех $m, p, s \in Q^+_\tau(X)$. Таким образом, E – это метрика на $Q^+_\tau(X)$.

Если $(m_a : a \in A)$ является направленностью в $Q^+_\tau(X)$, сходящейся к $m \in Q^+_\tau(X)$ относительно топологии $\tau_s(G)$, где A – это направленное множество, тогда направленность $(m^g_a : a \in A)$ сходится к m^g равномерно по переменной $g \in G$, следовательно, $\lim_a m^g_a = m^g$ относительно топологии τ_w для любого g и равномерно по переменной $g \in G$. Это влечет, что $\lim_a D(m^g_a, m^g) = 0$ равномерно по $g \in G$, следовательно, $\lim_a E(m_a, m) = 0$.

Обратно, если $\lim_a E(m_a, m) = 0$ для направленности $(m_a : \ a \in A)$ в $Q^+_\tau(X)$, то $\lim_a D(m^g_a, m^g) = 0$ равномерно по переменной $g \in G$. То есть, m^g_a стремится к m^g относительно топологии τ_w и равномерно по $g \in G$, следовательно, m_a стремится к m в $Q^+_\tau(X)$ относительно $\tau_s(G)$ топологии благодаря теореме 2. Таким образом, метрика E на $Q^+_\tau(X)$ индуцирует эквивалентную $\tau_s(G)$ топологию.

7. Образы квазиинвариантных мер

13. Лемма. *Если группа G действует непрерывным образом на топологическом пространстве X, так что Gx плотно в X для любых $x \in X$, $m \in Q^+(X)$, $m(A) \in \{0, 1\}$ для любого $A \in \mathcal{H}$, тогда $m(A) = 0$ для любого $A \in \mathcal{H}$.*

Доказательство. Для произвольных двух точек $x \neq y \in X$ возьмем открытые окрестности U_x и U_y точек x и y соответственно, которые не пересекаются, $U_x \cap U_y = \varnothing$, так как $(X \in T_1 \cap T_{3.5}) \Rightarrow (X \in T_2)$ (смотри [29]). Если $m(U_x) = 1$, то

$m(U_y) = 1$, так как существует элемент $g \in G$ такой, что $(gU_x) \cap U_y \neq \varnothing$, и мера m квазиинвариантна и неотрицательна. Поэтому, $m(X) \geqslant 2$, что противоречит предположениям этой леммы, следовательно, $m(A) = 0$ для любого $A \in \mathcal{H}$.

14. Предложение. *Пусть группа G действует непрерывно на топологическом пространстве X так, что Gx плотна в X для любого $x \in X$, $m \in Q^+_\sigma(X)$, образ $\{m(A) : A \in \mathcal{H}\} =: T$ дискретен в $[0, \infty)$ и $m(X) < \infty$, а топологический вес X удовлетворяет неравенству $w(X) \geqslant \aleph_0$. Тогда $m(A) = 0$ для любого $A \in \mathcal{H}$.*

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность U_k открытых подмножеств в X таких, что $U_{k+1} \subset (X \setminus (U_1 \cup ... \cup U_k))$ для любого $k \in \mathbf{N}$. Положим $t := \inf\{b - a : \ b > a \in T\}$. По условиям этого предложения $t > 0$. Если $m(U_k) > 0$, то $m(U_l) > 0$ для любого l, так как мера m квазиинвариантна и неотрицательна, а Gx плотно в X для любого $x \in X$, следовательно, существуют элементы $g_l \in G$ такие, что $(g_l U_l) \cap U_k \neq \varnothing$ для любого l. Тогда

$$m(X) \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(U_k) = \infty,$$

так как $m(U_k) \geqslant t > 0$ для любого k. Это противоречит предположениям данного предложения, следовательно, $m(A) = 0$ для любого $A \in \mathcal{H}$.

8. Вложения пространств квазиинвариантных мер

15. Теорема. *Предположим, что $(Q^+(X) \setminus \{0\}) \neq \varnothing$ и $GU = X$ для любого открытого подмножества U в X. Тогда семейство $Q^+(X)$ плотно в топологическом пространстве $(M^+(X), \tau_w)$ относительно слабой топологии τ_w.*

Доказательство. Пусть m является нетривиальной неотрицательной квазиинвариантной мерой $m \in (Q^+(X) \setminus \{0\})$. Если $m(V) = 0$ для некоторого $V \in \mathcal{H}$, то $m^g(V) = 0$ для любого $g \in G$, так как $m(V) \geqslant 0$, и m квазиинвариантна относительно группы G. Поэтому, в силу теорем I.2 и I.5 [5] (или см. эти теоремы в [1]) $m(U) > 0$ для любого открытого U в X, так как $GU = X$. Поскольку $X \in T_1 \cap T_{3.5}$, для всякой отмеченной точки $z \in X$ существует направленность ее окрестностей U_b такая, что $\bigcap_{b \in A} U_b = \{z\}$ и $U_a \subset U_b$ для любого $a > b \in A$, где A - это направленное множество. Выберем направленность неотрицательных непрерывных ограниченных функций f_a такую, что $f_a(x) \leqslant f_b(x) \leqslant f_b(z)$ для любого $a > b \in A$ и $x \in X$, также

$$\int_X f_a(x) m(dx) = 1$$

с носителем $supp(f_b) \subset U_b$ и $f_b(z) > 0$ для любого $b \in A$. Тогда мы выводим, что

$$\lim_a f_a(x) m(dx) = \delta_z(dx)$$

относительно слабой топологии τ_w на $M^+(X)$, где $\delta_z(dx)$ обозначает точечную меру в $M^+(X)$ с носителем $supp(\delta_z) = \{z\}$ и $\delta_z(V) = 1$ для любого $z \in V \in \mathcal{H}$, так как $Q^+(X) \subset M^+(X)$.

В силу теоремы II.3.10 [5] линейная вещественная оболочка точечных мер плотна в $(M^+(X), \tau_w)$, следовательно, $Q^+(X)$ плотно в $(M^+(X), \tau_w)$.

16. Предложение. *Пусть топологическое пространство X бесконечно и $X \in T_1 \cap T_{3.5}$, а также $GU = X$ для любого открытого подмножества U в X, а Gz плотно в X для некоторой точки $z \in X$. Тогда $Q^+(X)$ не плотно в $M^+(X)$ относительно топологии $\tau_s(G)$.*

Доказательство. Мы рассмотрим $(M(X), \tau_s(G))$ (см. теорему 2 выше). Возьмем $z \in X$ и $\delta_z \in M^+(X)$. В случае $Q^+(X) = \{0\}$ очевидно $Q^+(X)$ не плотно в $M^+(X)$ относительно топологии $\tau_s(G)$.

Пусть теперь $m \in (Q^+(X) \setminus \{0\}) \neq \varnothing$. Из §15 мы выводим, что существует ограниченная непрерывная неотрицательная функция f такая, что $f(z) = 1$, $supp(f) \subset U_b$ для некоторой окрестности U_b точки z и

$$\sup_{g \in G} | \int_X f(x)(m^g(dx) - \delta_z^g(dx))| > \frac{1}{3},$$

так как $\delta_z^g(g\{z\}) = 1$ и существует $g \in G$ с $gz \in X \setminus U_b$.

9. Действие группы преобразований на измеримом пространстве квазиинвариантной меры

17. Определение. Для положительной квазиинвариантной меры $m \in Q^+(X)$ мы скажем, что ее фактор квазиинвариантности $d_m(g,x)$ неограничен на X для некоторого элемента $g \in G$ тогда и только тогда, когда $m(\{x : x \in X; d_m(g,x) > t\}) > 0$ для любого $t > 0$.

18. Теорема. (1). *Семейство $Q^+(X)$ индуцирует на алгебре $\mathcal{H}$ структуру равномерного пространства $\mathcal{U}$, на которой G действует инъективно.* (2). *Если существует неотрицательная нетривиальная квазиинвариантная мера $m \in Q^+(X) \setminus \{0\}$, а фактор квазиинвариантности $d_m(g,x)$ of m существует на $G \times X$ и неограничен на X для некоторого элемента группы $g \in G$, то этот элемент g действует неравномерно непрерывно на $\mathcal{U}$.*

Доказательство. (1). Каждой квазиинвариантной неотрицательной мере $p \in Q^+(X)$ соответствует псевдометрика $\rho_p(B,E) := p(B \triangle E)$ на $\mathcal{H}$. Она индуцирует отношение эквивалентности $B\Phi_p E$ тогда и только тогда, когда $\rho_p(B,E) = 0$. Поэтому, факторпространство $\mathcal{H}_p := \mathcal{H}/\Phi_p$ является метрическим пространство.

Если мера p абсолютно непрерывна относительно m, то есть $p << m$, то из $B\Phi_m E$ вытекает, что $B\Phi_p E$. Поэтому, существует факторное отображение $\psi_m^p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{H}_m$. Положим $p \succeq m$ тогда и только тогда, когда существует постоянная $b_{p,m} > 0$ такая, что $p(E) \leqslant b_{p,m} m(E)$ для всех $E \in \mathcal{H}$. Это задает на $Q^+(X)$ структуру направленного множества и определяет обратный спектр $\{\mathcal{F}_p, \psi_m^p, Q^+(X)\}$. Положим

$$\mathcal{U} := \lim\{\mathcal{H}_p, \psi_m^p, Q^+(X)\},$$

следовательно, $\mathcal{U}$ – это равномерное пространство.

Поскольку m^g эквивалентна m $\forall m \in Q^+(X)$ и $g \in G$, то $\rho_{m^g}(B,E) > 0$ в том и только том случае, когда $\rho_m(B,E) > 0$, где $B, E \in \mathcal{H}$ произвольны. Это означает, что каждый элемент g группы G инъективно действует на равномерном пространстве $\mathcal{U}$.

(2). Условие $m \in Q^+(X)$ дает $m^g \in Q^+(X)$ для любого $g \in G$, следовательно, $d_m(g,x) \geqslant 0$ для любых $x \in X$ и $g \in G$. Если $m \in Q^+(X) \setminus \{0\}$ и существует фактор квазиинвариантности $d_m(g,x)$ меры m на $G \times X$, и он неограничен на X для некоторого элемента $g \in G$, то X и $\mathcal{H}$ бесконечны и для любого $t > 0$ существуют $B, E \in \mathcal{H}$ такие, что $m^g(B \triangle E) \geqslant tm(B \triangle E)$, следовательно, такой элемент g действует неравномерно непрерывно на $\mathcal{U}$ в этом случае.

19. Теорема. *Если $X \in T_1 \cap T_{3.5}$, каждый элемент s группы G действует гомеоморфным и инъективным отображением h_s на X, так что Gx плотно в X для любого $x \in X$, а также $m \in Q^+(X) \setminus \{0\}$ и фактор квазиинвариантности $d_m(g,x)$ меры m существует на $G \times X$ и неограничен на X для некоторого элемента группы $g \in G$, то этот элемент g действует разрывным образом на $\mathcal{U}$.*

Доказательство. Из наложенных условий этого предложения вытекает, что для любой пары точек $x \neq y \in X$ и их открытых окрестностей U_x и U_y, $x \in U_x$ и $y \in U_y$, существуют элементы группы $s, q \in G$ такие, что $(sU_x) \cap U_y \neq \varnothing$ и $(qU_y) \cap U_x \neq \varnothing$. В силу предложения 14 для любых $b > 0$ и $x \neq z \in X$ существуют непересекающиеся окрестности U_x и U_z такие, что $0 < m(U_x) < b$ и $0 < m(U_z) < b$. Поэтому, для любых $t > 0$, $b > 0$ и $B \in \mathcal{F}$ существует $E \in \mathcal{H}$ с $m(E) > 0$ и $0 < m(E \triangle B) < t$, так что $m^g(E \triangle B) > bt$, следовательно, g индуцирует отображение на $\mathcal{U}$, которое разрывно в каждом элементе в $\mathcal{U}$.

10. Сходимость в пространствах квазиинвариантных мер

20. Определение. Последовательность $\{E_k\}$ в $\mathcal{H}$ мы назовем (k', G) последовательностью, если выполнены следующие три условия:

(1) $gE_k \uparrow X$ для любого $g \in G$;

(2) для любых $k \in \mathbf{N}$, $g \in G$ и $m \in M_\sigma(X)$ последовательность

$$|m^g|_*(X \setminus E_k) := \sup\{|m^g|(U) : \ U \subset X \setminus E_k, \ U \text{ открыто } \}$$

сходится к нулю при k, стремящемся к бесконечности;

(3) функция h непрерывна на X тогда и только тогда, когда h непрерывна на gE_k для любых $k \in \mathbf{N}$ и $g \in G$.

21. Теорема. *Предположим, что* (1) $X \in T_1 \cap T_{3.5}$*;*

(2) *каждый элемент s группы G действует гомеоморфными и инъективными отображениями h_s на X;*

(3) *последовательность $\{m_k : k \in \mathbf{N}\} \subset Q_\sigma(X)$ сходится к $m_0 \in M(X)$ относительно топологии τ_w, а также*

(4) *существует функция $p : G \times X \to [0, \infty)$ такая, что для любых $n \in \mathbf{N}$ и $g \in G$ выполнено неравенство $|d_{m_n}(g,x)| \leqslant p(g,x)$ m_n-почти всюду по переменной x, где*

$$p(g,*) \in \bigcap_{n=0}^{\infty} L^1(m_n) \ \text{ и } \ \sup_{0 \leqslant n} \|p(g,*)\|_{L^1(m_n)} < \infty. \ \text{Тогда}$$

(5) *для любой (k', G) последовательности $\{E_k : k \in \mathbf{N}\}$ и каждого элемента $g \in G$ предел $\lim_{k\to\infty} |m_n^g|_*(X - E_k) = 0$ сходится равномерно по n и*

(6) $m_0 \in Q_\sigma(X)$.

Доказательство. Рассмотрим (k', G) последовательность $\{E_k : k \in \mathbf{N}\}$. Положим

$$D_g(h,s) := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \sup_{x \in gE_k} |h(x) - s(x)| \tag{7}$$

для любых $h, s \in S_1$, где

$$S_1 := \{h : \ h \in C_b(X, \mathbf{R}), \|h\| \leqslant 1\},$$

g – это отмеченный элемент группы G. Тогда из условий (1) и (2), и формулы (7), и условий $20(1-3)$ из определения 20 мы выводим, что отображение D_g есть метрика на S_1 и метрическое пространство (S_1, D_g) полно.

Выберем произвольную квазиинвариантную σ-гладкую меру $m \in Q_\sigma(X)$ и зададим функционал

$$F(g,h) := \int_X h(x) m^g(dx)$$

на S_1, где $h \in S_1$. Применяя теорему Радона-Никодима к эквивалентным мерам $m^g \sim m$ в $M_\sigma(X)$, мы получаем плотности $d_m(g,x) = m^g(dx)/m(dx)$. Из тождества

$$\int_X h(x) m^g(dx) = \int_X h(gy) m(dy)$$

и условий $20(1-3)$ определения 20 вытекает, что функционал $F(g,*)$ непрерывен на метрическом пространстве (S_1, D_g). Поэтому, для любых $b > 0$ и $m \in Q_\sigma(X)$ множество $\{h : \ h \in S_1, \ |\int_X h(x) m^g(dx)| \leqslant b\}$ замкнуто в (S_1, D_g).

Тогда каждое множество вида

$$W_k(b) = W_k^g(b) := \{h : \ h \in S_1, \sup_{l,n \geqslant k} |\int_X h(x) m_l^g(dx) - \int_X h(x) m_n^g(dx)| \leqslant b\}$$

замкнуто в (S_1, D_g) и

$$S_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k(b) \text{ для любого } 0 < b < 1.$$

В силу теоремы Бэра о категории 3.9.3 [29] существует натуральное число u такое, что множество $W_u(b)$ содержит открытое подмножество в (S_1, D_g).

Поэтому, существуют $u \in \mathbf{N}$, $h_0 \in S_1$, $j \in \mathbf{N}$ и $t > 0$ такие, что из $n, k \geqslant u$, $h \in S_1$ и $|h(x) - h_0(x)| < t$ на E_j следует, что

$$\Big| \int_X h(x) m_n^g(dx) - \int_X h(x) m_k^g(x) \Big| \leqslant t, \text{ в частности,}$$

$$\Big| \int_{X - E_j} m_n^g(dx) - \int_{X - E_j} m_k^g(dx) \Big| \leqslant 2t,$$

если взять h_0 удовлетворяющим ограничению $h_0|_{E_j} = 0$. В силу леммы I.3 [5] и условий $20(1-3)$ выполняется оценка

$$|m_n^g - m_k^g|_*(X - E_j) \leqslant 2t$$

для всех $n, k \geqslant u$. Мы выберем натуральное число $i(1) \geqslant j$ таким, что

$$|m_u^g|(X - E_{i(1)}) \leqslant t.$$

Следовательно, $|m_n^g|_*(X - E_{i(1)}) \leqslant [|m_n^g - m_j^g|_*(X - E_{i(1)}) + |m_j^g|_*(X - E_{i(1)})] \leqslant 3t$. Тогда можно взять натуральное число $i(2) \geqslant i(1)$, для которого

$$\sup_{l<u} |m_l^g|_*(X - E_{i(2)}) \leqslant 3t,$$

следовательно, для любого $b > 0$ существует $i(2)$ такое, что

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} |m_n^g|_*(X - E_{i(2)}) \leqslant 3b.$$

Отсюда вытекает утверждение (5).

Из сходимости последовательности m_n к m_0 относительно топологии τ_w, условий (1) и (2), и $20(1-3)$ следует, что

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} |m_n^g|_*(X - E_i) \geqslant |m_0^g|_*(X - E_i)$$

для любого $g \in G$, следовательно,

$$|m_0^g|_*(X - E_i) \leqslant 3b$$

для всех $i \geqslant i(2)$ и произвольного отмеченного элемента g группы G, где E_i, b, $i(2)$ описаны выше. То есть, для любого $g \in G$ существует предел

$$\lim_{i\to\infty} |m_i^g|_*(X - E_i) = 0$$

для любой (k', G) последовательности $\{E_i : i \in \mathbf{N}\}$.

Мы рассмотрим последовательность $\{Z_n : n \in \mathbf{N}\}$ замкнутых в X подмножеств, для которых выполнены следующие условия:

(8) для любого $g \in G$ $gZ_n \uparrow X$ при $n \to \infty$;

(9) для любого $n \in \mathbf{N}$ существует открытое подмножество U_n такое, что $gZ_n \subset gU_n \subset gZ_{n+1}$ для любого $g \in G$.

Из теоремы I.12 [5], а также условий (1) и (2) вытекает, что если последовательность $\{Z_n : n \in \mathbf{N}\}$ замкнутых в X подмножеств удовлетворяет условиям (8) и (9), то она является (k', G) последовательностью, так как $h_s : X \to X$ - это гомеоморфизм для любого $s \in G$, $h_s(x) = sx$. Поэтому,

$$\lim_{i\to\infty} |m_0^g|(X - Z_i) = 0$$

для любого $g \in G$. Тогда согласно теореме I.19 [5] $m_0^g \in M_\sigma(X)$ для любого $g \in G$.

Пусть теперь $V \in \mathcal{H}$ и $|m_0|(V) = 0$. Тогда мы получим, что

$$\lim_{n\to\infty} |m_n|(V) = 0.$$

При этом выполняется тождество (10) и неравенство (11):

$$\int_X f(x) m_n^g(dx) = \int_X f(x) d_{m_n}(g, x) m_n(dx), \tag{10}$$

$$\Big| \int_X f(x) d_{m_n}(g,x) m_n(dx) \Big| \leqslant \int_X p(g,x) |f(x)| |m_n|(dx) \qquad (11)$$

для любых $g \in G$ и $n \in \mathbf{N}$. Для любого открытого подмножества U в топологическом пространстве X, $g \in G$ и $k \in \mathbf{N}$ выполнено неравенство

$$|m_k^g|(U) \leqslant |m_k|(U) \sup_{0 \leqslant n} \|p(g,*)\|_{L^1(m_n)}.$$

Возьмем последовательность f_u непрерывных функций $f_u : X \to [0,1]$ такую, что $f_u(x) = 1$ для любых $x \in V$ и $u \in \mathbf{N}$, а также

$$\int_X f_u(x) |m_0|(dx) < b_u,$$

где $b_u \downarrow 0$. Следовательно,

$$\lim_u \int_X f_u(x) |m_0|(dx) = |m_0|(V) = 0$$

(см. также [1,3,5]). Применяя условие (4), мы выводим из формул (10) и (11), что для всяких $b > 0$ и $g \in G$ существуют натуральные числа n и v такие, что

$$\int_X f_v(x) |m_l^g|(dx) < b \text{ для любого } l > n.$$

С другой стороны, выполняется неравенство:

$$|m_l^g|(V) \leqslant \int_X f_v(x) |m_l^g|(dx).$$

Поэтому, существует предел

$$\lim_{n \to \infty} |m_n^g|(V) = 0$$

для любого $g \in G$, следовательно, $|m_0^g|(V) = 0$ для любого $g \in G$. Это означает, что мера m^g эквивалентна мере m_0 для любого элемента группы $g \in G$. Таким образом, мера m_0 квазиинвариантна и, следовательно, $m_0 \in Q_\sigma(X)$, так как $Q(X) \cap M_\sigma(X) = Q_\sigma(X)$.

22. Теорема. *Пусть G – подгруппа топологической группы G_1, и пусть условия 21(1) и 21(2) выполнены для G и G_1, пусть также топологический характер G_1 равен $\chi(G_1) = \aleph_0$, и пусть отображение $G \times X \ni (g,x) \mapsto gx \in X$ непрерывно. Предположим также, что для квазиинвариантной меры $m \in Q_\sigma(X, \mathbf{F}, \mathcal{H}, G)$ последовательность $m_k := m^{g_k}$ удовлетворяет условиям 21(3) и 21(4) относительно G для любого $g_0 \in G_1$ и всякой последовательности g_k в G сходящейся к g_0 относительно левой равномерности индуцированной топологией на G_1. Тогда $m \in Q_\sigma(X, \mathbf{F}, \mathcal{H}, G_1)$.*

Доказательство. Для топологической группы G_1 существует левая равномерность на G_1 индуцированная топологией на G_1 (смотри §8.1.17 в [29]). Поскольку $\chi(G_1) = \aleph_0$, то для всякого $g_0 \in G_1$ имеется последовательность g_k в группе G сходящаяся к g_0 относительно левой равномерности группы G_1. В силу теоремы 21 существует предел

$$\lim_k m_k = m_0 \in Q_\sigma(X, \mathbf{F}, \mathcal{H}, G),$$

мы обозначим его тоже $m_0 =: m^{g_0}$, так как

$$\lim_k g_k = g_0 \text{ и } m_k := m^{g_k}.$$

Предположим, что имеются две последовательности s_k и q_k сходящиеся к g_0. Положим $g_{2k} = s_k$ и $g_{2k+1} = q_k$ для любого k, следовательно, g_k сходится к g_0. Итак,

$$\lim_k m^{s_k} = \lim_k m^{q_k} = \lim_k m^{g_k},$$

так как предел $\lim_k m^{g_k}$ существует согласно условию 21(3). Таким образом, m^{g_0} не зависит от выбора последовательности g_k группы G сходящейся к $g_0 \in G_1$.

Поскольку отображение $G \times X \ni (g,x) \mapsto gx \in X$ непрерывно, а h_g действует гомеоморфизмами на X для любого $g \in G_1$ и

$$\lim_k g_k = g_0, \text{ то } g_0 U = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} g_k U$$

для любого множества U открытого в X. Поэтому,

$$|m|(g_0 U) = \lim_n |m|(\bigcap_{k=n}^{\infty} g_k U)$$

для любого $m \in M_\sigma(X)$. Если $|m|(V) = 0$ для некоторых $V \in \mathcal{H}$ и $m \in M_\sigma(X)$, то для любого $b > 0$ существует открытое подмножество K_b в X такое, что $V \subset K_b$ и $|m|(K_b) < b$ [1, 3, 5]. Если $m \in Q_\sigma(X, \mathbf{F}, \mathcal{H}, G)$, то $|m^g|(V) = 0$ для любого $g \in G$. С другой стороны,

$$|m|(\bigcap_{k=n}^{\infty} g_k U) \leqslant |m|(g_k U)$$

для любого $k \geqslant n$. Тогда из условия 21(4) и формул 21(10), и 21(11) мы выводим, что $|m^{g_0}|(V) = 0$. Итак, меры эквивалентны $m \sim m^{g_0}$ для любого $g_0 \in G_1$. Таким образом, $m \in Q_\sigma(X, \mathbf{F}, \mathcal{H}, G_1)$.

11. Обратные спектры квазиинвариантных мер

23. Теорема. *Пусть $\{G_i, h^i_j, J\}$ и $\{X_i, p^i_j, J\}$ – обратные спектры групп G_j и топологических пространств X_j, так что $G_j : X_j \to X_j$, где $h^i_j : G_i \to G_j$ - гомоморфизмы групп и $p^i_j : X_i \to X_j$ – непрерывные отображения для любого $i \geqslant j$ в направленном множестве J. Пусть также топологическое пространство X гомеоморфно $\lim\{X_j, p^i_j, J\}$. Тогда каждая мера $m \in Q(X, \mathbf{F}, \mathcal{F}, G)$ имеет разложение*

$$m = \lim\{m_i; p^i_j; J\}$$

с $m_i \in Q(X_i, \mathbf{F}, \mathcal{H}_i, G_i)$ для любого $i \in J$, что индуцирует непрерывное отображение из $Q(X, \mathbf{F}, \mathcal{H}, G)$ в $\lim\{Q(X_i, \mathbf{F}, \mathcal{H}_i, G_i); p^i_j; h^i_j; J\}$ относительно их $\tau_w(G)$ и $\{\tau_w(G_i); p^i_j; h^i_j; J\}$ топологий.

Доказательство. Рассмотрим непрерывные проективные отображения $p^i : X \to X_i$ и проективные групповые гомоморфизмы $h^i : G \to G_i$ для любого $i \in J$ соответствующие данному обратному спектру.

Если $m \in Q(X, \mathbf{F}, \mathcal{H}, G)$, то

$$m((p^i)^{-1}(A)) =: m_i(A)$$

является мерой на $\mathcal{H}_i$, так как $(p^i)^{-1}(\mathcal{H}_i) \subset \mathcal{H}$ для любого $i \in J$. С другой стороны, $g((p^i)^{-1}(A)) = (p^i)^{-1}(g_i A)$ для любых $A \in \mathcal{H}_i$ и $g \in G$, где $g_i = h^i(g)$, так как $G_i : X_i \to X_i$, $p^i_j \circ p_i = p_j$ и $h^i_j \circ h_i = h_j$ для любого $i \geqslant j \in J$. Это семейство мер образует обратный спектр, так как

$$m_i((p^i_j)^{-1}(B)) = m((p^j)^{-1}(B)) = m_j(B)$$

для любого $i > j \in J$ и $B \in \mathcal{F}_j$. Пусть $|m|_i(A) = 0$ для произвольного $A \in \mathcal{H}_i$. Тогда $|m|((p^i)^{-1}(A)) = 0$, следовательно, $|m^g|((p^i)^{-1}(A)) = 0$ для любого $g \in G$ и, следовательно, $|m_i^{g_i}|(A) = 0$. Таким образом, мера m_i на $\mathcal{H}_i$ является квазиинвариантной относительно группы G_i для любого $i \in J$. Тогда выполняется равенство

$$\int_X S(f_i)(y) m(dy) = \int_{X_i} f_i(x_i) m_i(dx_i) \tag{1}$$

для любого $f_i \in C_b(X_i, \mathbf{R})$, где $S(f_i)$ – это цилиндрическая функция, соответствующая f_i, $S(f_i)(y) = f_i(p_i(y))$ для любого $y \in X$. В силу предложения 2.5.5 [29], теоремы 2 и формулы (1) это отображение $m \mapsto \lim\{m_i; p^i_j; J\}$ непрерывно из $Q(X, \mathbf{F}, \mathcal{H}, G)$ в $\lim\{Q(X_i, \mathbf{F}, \mathcal{H}_i, G_i); p^i_j; h^i_j; J\}$ относительно их $\tau_w(G)$ и $\{\tau_w(G_i); p^i_j; h^i_j; J\}$ топологий.

24. Теорема. *Пусть выполнены предположения теоремы 23, где* $PQ^+_\sigma(X_i, \mathbf{F}, \mathcal{B}_i, G_i) := \{m_i : m_i \in Q^+_\sigma(X_i, \mathbf{F}, \mathcal{B}_i, G_i), m_i(X_i) = 1\}$ *задано на алгебре* $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}_i(X_i)$ *для любого* $i \in J$. *Пусть также* $(X_i, \mathcal{B}_i)$ *является радоновым пространством для всякого* $i \in J$. *Если множество* J *счетно, то существует вложение* $PQ^+_\sigma(X, \mathbf{F}, \mathcal{B}, G)$ *в* $\lim\{PQ^+_\sigma(X_i, \mathbf{F}, \mathcal{B}_i, G_i); h^i_j; p^i_j; J\}$ *относительно слабой* $\tau_w(G)$ *и* $\{\tau_w(G_i); p^i_j; h^i_j; J\}$ *топологий.*

Доказательство. Каждая σ-гладкая мера m заданная на $\mathcal{H}$ имеет естественное продолжение на $\mathcal{B}$ и аналогично для любого m_i [1, 3, 5]. В силу теоремы 23, если $m \in PQ^+_\sigma(X, \mathbf{F}, \mathcal{B}, G)$, то

$$\{m_i; p^i_j; J\} \in \{PQ^+_\sigma(X_i, \mathbf{F}, \mathcal{B}_i, G_i); h^i_j; p^i_j; J\},$$

так как условия $A_{i,k} \in \mathcal{B}_i$ и $A_{i,k} \cap A_{i,n} = \varnothing$ для любого $k \neq n \in \mathbf{N}$ влекут то, что $(p^i)^{-1}(A_{i,k}) \in \mathcal{B}$ и $(p^i)^{-1}(A_{i,k}) \cap (p^i)^{-1}(A_{i,n}) = \varnothing$ для любого $k \neq n \in \mathbf{N}$.

Предположим, что дан обратный спектр мер $\{m_i; p^i_j; J\}$, причем $m_i \in PQ^+_\sigma(X_i, \mathbf{F}, \mathcal{B}_i, G_i)$ для любого $i \in J$. Данная система индуцирует квазимеру q на

$$\mathcal{H} := \bigcup_{i \in J} (p^i)^{-1}(\mathcal{B}_i)$$

такую, что $m_i((p^i_j)^{-1}(B)) = q((p^j)^{-1}(B)) = m_j(B)$ для любых $i > j \in J$ и $B \in \mathcal{B}_j$.

Более того, $q(X) = 1$, так как $m_i(X_i) = 1$ для любого $i \in J$. Алгебра цилиндрических подмножеств $\mathcal{H}$ содержится в алгебре $\mathcal{B}$, так как $(p^i)^{-1}(\mathsf{Z}_i) \subset \mathsf{Z}$ и $(p^i)^{-1}(\mathsf{U}_i) \subset \mathsf{U}$ для любого $i \in J$. Таким образом, q является ограниченной неотрицательной квазимерой. В силу теоремы Колмогорова I.1.3 и предложений I.1.7, и I.1.8 [9] (или см. их в [6]) она имеет единственное σ-гладкое продолжение q на минимальную σ-алгебру $\sigma\mathcal{H}$ содержащую $\mathcal{H}$.

Имеется база топологии у X состоящая из открытых подмножеств вида $\bigcap_{l=1}^{n}(p^{i(l)})^{-1}(A_{i(l)})$ с $A_{i(l)} \in \mathsf{U}_{i(l)}$ для любых $i(l) \in J$, $l = 1, ..., n$ и $n \in \mathbf{N}$. Поскольку J счетно, то $\mathcal{B} = \sigma\mathcal{H}$. Таким образом, q и m совпадают на $\mathcal{B}$, если $\{m_i; p^i_j; J\}$ построена из $m \in PQ^+_\sigma(X, \mathbf{F}, \mathcal{B}, G)$. Итак, отображение из $PQ^+_\sigma(X, \mathbf{F}, \mathcal{B}, G)$ в $\lim\{PQ^+_\sigma(X_i, \mathbf{F}, \mathcal{B}_i, G_i); h^i_j; p^i_j; J\}$ инъективно.

Поэтому, для любой $f \in C_b(X, [0, \infty))$ существует направленность $f_i \in C_b(X_i, [0, \infty))$ такая, что

$$\int_X f(x)m(dx) = \lim_i \int_{X_i} f_i(x_i)m_i(dx_i), \tag{1}$$

$$\text{где } f((p^i)^{-1}(x_i)) \leqslant f_i(x_i) \tag{2}$$

для любых $x_i \in X_i$ и $i \in J$. В частности, если $f : X \to [0, 1]$, то можно выбрать

$$f_i : X_i \to [0, 2] \tag{3}$$

для любого $i \in J$.

Отсюда мы выводим, что

$$\int_X f(x)m^g(dx) = \lim_i \int_{X_i} f_i(x_i)m_i^{g_i}(dx_i) = \lim_i \int_{X_i} f_i(g_i y_i)m_i(dy_i) = \int_X f(gy)m(dy) \tag{4}$$

для любого $g \in G$. Если $m(A) = 0$ для некоторого $A \in \mathcal{B}$, то $m^g(A) = 0$ для всякого элемента группы $g \in G$. Тогда для любых $t > 0$ и $g_1 \in G, ..., g_n \in G$, $n \in \mathbf{N}$, существует функция $f \in C_b(X, [0, 1])$ такая, что

$$f|_A = 1 \text{ и } \int_X f(x)m^{g_l}(dx) < t \text{ для любого } l = 1, ..., n.$$

Следовательно, существует направленность $\{f_i : i\}$, удовлетворяющая условиям $(1 - 3)$, приведенным выше, и существует $k \in J$ такие, что

$$\int_X f(x)m^{g_l}(dx) \leqslant \int_{X_i} f_i(x_i)m_i^{h^i(g_l)}(dx_i) < 2t$$

для любых $i \geqslant k \in J$ и $l = 1, ..., n$.

Из предложения 2.5.5 и теоремы 2.5.8 [29], формул $(1 - 4)$ и теоремы 2 мы выводим, что вложение $PQ^+_\sigma(X, \mathbf{F}, \mathcal{B}, G)$ в $\lim\{PQ^+_\sigma(X_i, \mathbf{F}, \mathcal{B}_i, G_i); h^i_j; p^i_j; J\}$ непрерывно и открыто относительно слабой $\tau_w(G)$ и $\{\tau_w(G_i); p^i_j; h^i_j; J\}$ топологий, где $PQ^+_\sigma(X, \mathbf{F}, \mathcal{B}, G)$ и все $PQ^+_\sigma(X_i, \mathbf{F}, \mathcal{B}_i, G_i)$ рассматриваются относительно их $\tau_w(G)$ и $\tau_w(G_i)$ топологий соответственно.

Заключение

Результаты данной статьи могут быть использованы при работе с квазиинвариантными мерами в теории вероятностей и функциональном анализе, для исследований групповых алгебр, представлений групп и алгебр, а также для дальнейшего изучения пространств квазиинвариантных мер.

Список литературы

[1] Александров А.Д. Additive set-functions in abstract spaces // Математический сборник. (1) 1940. Т. 8, № 2. С. 307–312. (2) 1941. Т. 9, № 3. С. 563–628. (3) 1943. Т. 13, № 3. С. 169–238.

[2] Belopolskaya Ya.I., Dalecky Yu.L. Stochastic equations and differential geometry. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1989.

[3] Bogachev V.I. Measure theory. Vol. 1, 2. Berlin: Springer-Verlag, 2007.

[4] Bourbaki N. Intégration. Livre VI. Fasc. XIII, XXI, XXIX, XXXV. Ch. 1-9. Paris: Hermann, 1963, 1965, 1967, 1969.

[5] Варадарьян В.С. Меры на топологичеких пространствах // Математический сборник. 1961. Т. 55. С. 35–100.

[6] Вахания Н.Н., Тариеладзе В.И., Чобанян С.А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1985.

[7] Constantinescu C. Spaces of measures. Berlin: Walter de Gruyter, 1984.

[8] Го Х.-С. Гауссовские меры в банаховых пространствах. М.: Мир, 1979.

[9] Dalecky Yu.L., Fomin S.V. Measures and Differential Equations in Infinite-Dimensional Spaces. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1991.

[10] Далецкий Ю.Л., Шнайдерман Я.Л. Диффузия и квазиинвариантные меры на бесконечномерных группах Ли // Функциональный анализ и его приложения. 1969. Т. 3. С. 156–158.

[11] Ferrando J.C., López Pellicer M., Sánches Ruiz L.M. Metrizable barrelled spaces // Pitman Research Notes in Mathematics Series. Vol. 332. New York: John Wiley and Sons Inc., Longman, 1995.

[12] Fidaleo F. Continuity of Borel actions of Polish groups on standard measure algebras // Atti del Seminario Matematico e Fisico dell'Universita di Modena. 2000. Vol. 48. Pp. 79–89.

[13] Ludkovsky S.V. Quasi-invariant and pseudo-differentiable measures with values in non-archimedean fields on a non-archimedean Banach space // Journal of Mathematical Sciences. 2005. Vol. 128, № 6. Pp. 3428–3460.

[14] Людковский С.В. Квазиинвариантные и псевдодифференцируемые действительнозначные меры на неархимедовых банаховых пространствах // Analysis Mathematica. 2002. Vol. 28. Pp. 287–316.

[15] Ludkovsky S.V. Quasi-invariant and pseudo-differentiable measures in Banach spaces. New York: Nova Science Publishers, Inc., 2009.

[16] Ludkovsky S.V. Operators on a non locally compact group algebra // Bulletin des Sciences Mathematiques. 2013. Vol. 137, № 4. Pp. 557–573. doi:10.1016/j.bulsci.2012.11.008

[17] Ludkovsky S.V. Meta-centralizers of non locally compact group algebras // Glasgow Mathematical Journal. 2015. Vol. 57. Pp. 349–364. doi:10.1017/S0017089514000330

[18] Ludkovsky S.V. Topological transformation groups of manifolds over non-Archimedean fields, representations and quasi-invariant measures // Journal of Mathematical Sciences. (I) 2008. Vol. 147, № 3. Pp. 6703–6846. (II) 2008. Vol. 150, № 4. Pp. 2123–2223.

[19] Ludkovsky S.V. Stochastic processes on geometric loop groups, diffeomorphism groups of connected manifolds, associated unitary representations // Journal of Mathematical Sciences. 2007. Vol. 141, № 3. Pp. 1331–1384.

[20] Ludkovsky S.V. Irreducible unitary representations of a diffeomorphisms group of an infinite-dimensional real manifold // Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Universita di Trieste. Nuova Serie. 1998. Vol. 30. Pp. 21–43.

[21] Ludkovsky S.V. Quasi-invariant measures on a group of diffeomorphisms of an infinite-dimensional real manifold and induced irreducible unitary representations // Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Universita di Trieste. Nuova Serie. 1999. Vol. 31. Pp. 101–134.

[22] Людковский С.В. Квазиинвариантные меры на группах петель римановых многообразий // Доклады Академии наук. 2000. Т. 370, № 3. С. 306–308.

[23] Ludkovsky S.V. Stochastic processes in non-archimedean Banach spaces, manifolds and topological groups. New York: Nova Science Publishers, Inc., 2010.

[24] Ludkovsky S.V. Properties of quasi-invariant measures on topological groups and associated algebras // Annales Mathematiques Blaise Pascal. 1999. Vol. 6, № 1. Pp. 33–45.

[25] Narici L., Beckenstein E. Topological vector spaces. New York: Marcel Dekker, Inc., 1985.

[26] Скороход А.В. Интегрироввание в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1975.

[27] Смолянов О.Г., Фомин С.В. Меры на топологических линейных пространствах // Успехи математических наук. 1976. Т. 31, № 4. С. 3–56.

[28] Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 1, 2. М.: Наука, Мир, 1975.

[29] Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.

Библиографическая ссылка

Людковский С.В. Пространства квазиинвариантных мер и сходимость в них // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 3. С. 59–83.

Сведения об авторах

1. **Людковский Сергей Викторович**
профессор кафедры прикладной математики Московского государственного технического университета МИРЭА.

Россия, 119454, г. Москва, пр-т Вернадского, 78, МИРЭА.
E-mail: ludkowski@mirea.ru.

QUASI-INVARIANT MEASURE TOPOLOGICAL SPACES AND CONVERGENCE IN THEM

Ludkovsky Sergey Victorovich
Professor at Applied Mathematics department,
Moscow State Technical University MIREA,
Russia, 119454, Moscow, 78 av. Vernadsky. E-mail: ludkowski@mirea.ru

Received 07.09.2015, revised 15.09.2015.

Spaces of quasi-invariant measures supplied with different topologies are studied. Their embeddings, projective decompositions, conditions for their metrizability are investigated. Theorems about convergence of nets of quasi-invariant measures and their extensions are proved as well. Moreover, associated with them uniform spaces are studied.

Keywords: measure, quasi-invariant, space, metric, convergence.

Bibliographic citation

Ludkovsky S.V. Quasi-invariant measure topological spaces and convergence in them. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2015, no. 3, pp. 59–83. (in Russian)