

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 539.3

О ВЛИЯНИИ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ВБЛИЗИ ВЯЗКОУПРУГОГО ВКЛЮЧЕНИЯ В ВЯЗКОУПРУГОМ ТЕЛЕ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ¹

Шавырин Д.А., Зингерман К.М.
Кафедра вычислительной математики

Поступила в редакцию 19.10.2015, после переработки 24.10.2015.

Найдено приближенное аналитическое решение плоской квазистатической задачи теории вязкоупругости о напряженно-деформированном состоянии бесконечно протяженного вязкоупругого тела, в котором имеется круговое вязкоупругое включение с другими свойствами, когда на бесконечности заданы напряжения, при конечных деформациях с учетом физической нелинейности. При решении используются метод малого параметра, метод интегральных преобразований Лапласа и комплексные потенциалы Колосова-Мусхелишвили. Исследовано влияние физической нелинейности на напряженно-деформированное состояние вблизи вязкоупругого включения и внутри него с использованием аналитических методов.

Ключевые слова: плоская задача, вязкоупругое включение, аналитическое решение, комплексные потенциалы, компьютерная алгебра, конечные деформации, физическая нелинейность.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 4. С. 5–16.

Введение

Расчет напряженно-деформированного состояния (НДС) в композиционных материалах является одной из важных задач механики деформируемого твердого тела [1–3, 10–13, 15–17]. Учет физической нелинейности при расчете НДС позволяет более точно по сравнению с физически линейной теорией моделировать процесс деформирования полимерных вязкоупругих материалов [1, 10–13, 15–17]. В данной статье предложено решение плоской задачи нелинейной теории вязкоупругости о распределении НДС в бесконечно протяженном вязкоупругом теле с вязкоупругим включением при конечных деформациях с использованием приближенных аналитических методов. Решение строится на основе методики, приведенной в [4, 5] и

¹Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект № 14-08-01191) и Министерства образования и науки России в рамках базовой части Государственного задания в сфере научной деятельности (Задание 2014/220, проект 1153).

обобщенной на случай физической нелинейности с использованием системы компьютерной алгебры. Физическая нелинейность определяется записью определяющих соотношений в виде нелинейной зависимости между вторым тензором напряжений Пиолы-Кирхгофа и тензором деформаций Грина, обобщающей на случай вязкоупругости определяющие соотношения для потенциала Мурнагана. В этих соотношениях упругие постоянные заменены интегральными операторами вида свертки по времени.

1. Постановка задачи

Исследуется напряженно-деформированное состояние бесконечно протяженного вязкоупругого тела (матрицы) с круговым вязкоупругим включением. Механические характеристики материалов матрицы и включения могут отличаться. На бесконечности заданы нормальные и касательные напряжения. Эта задача решается в квазистатической постановке при конечных плоских деформациях. Материалы матрицы и включения считаются сжимаемыми, их математическая модель описывается определяющими соотношениями, обобщающими на случай вязкоупругости соотношения для пятиконстантного потенциала Мурнагана [8, 9]. Эта модель обобщена на случай вязкоупругих материалов и конечных деформаций. Предполагается, что на границе между включением и матрицей выполнены условия идеального контакта. Требуется решить задачу о квазистатическом деформировании тела при заданных напряжениях на бесконечности.

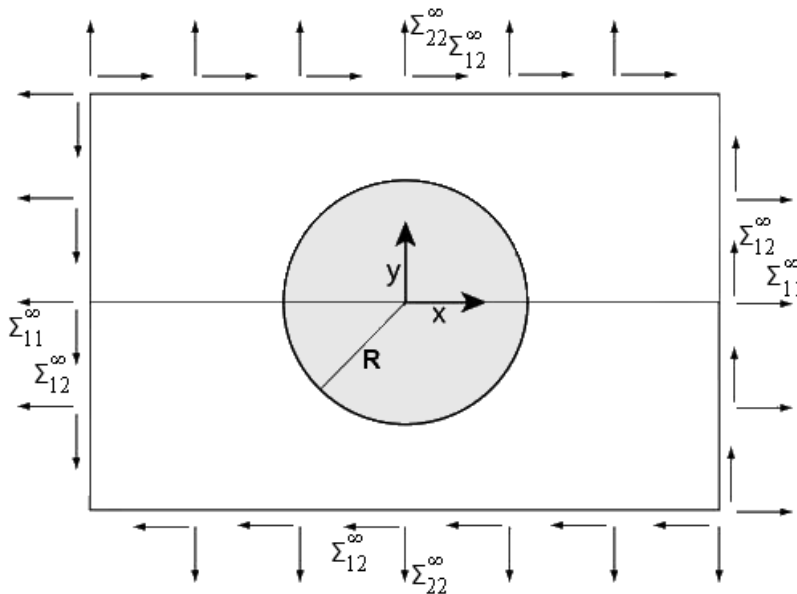


Рис. 1: Схема нагружения тела с включением

Здесь и в дальнейшем индексом M отмечаются величины, относящиеся к матрице, а индексом B – к включению. Если индексы не указаны, то выражения

относятся как к матрице, так и к включению. Система координат выбрана таким образом, чтобы направления нагружений совпали с осями x и y , а начало координат совпало с центром включения.

Математическая постановка задачи описывается в координатах недеформированного состояния. Далее использованы следующие обозначения: u — вектор перемещений, Ψ — аффинор деформаций, $\overset{0}{E}$ — тензор деформаций Грина, $\overset{0}{\Sigma}$ — тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа второго рода, σ — тензор истинных напряжений, $\overset{0}{\nabla}$ — градиент, I — единичный тензор, N — нормаль к исходной границе включения.

Уравнение равновесия имеет вид

$$\overset{0}{\nabla} \cdot \left[\overset{0}{\Sigma} \cdot \Psi \right] = 0, \quad (1)$$

здесь

$$\overset{0}{\Sigma} = (1 + \Delta) \Psi^{*-1} \cdot \sigma \cdot \Psi^{-1}. \quad (2)$$

Закон вязкоупругости записывается в форме:

$$\begin{aligned} \overset{0}{\Sigma}(t) = I \int_{-\infty}^t & \left\{ \lambda(t - \tau) \left(\frac{\partial \overset{0}{E}(\tau)}{\partial \tau} : I \right) + 3C_3(t - \tau) \left(\frac{\partial [\overset{0}{E}(\tau) : I]^2}{\partial \tau} \right) + \right. \\ & + C_4(t - \tau) \left(\frac{\partial [\overset{0}{E}(\tau)]^2}{\partial \tau} : I \right) \left. \right\} d\tau + \int_{-\infty}^t \left\{ 2G(t - \tau) \frac{\partial \overset{0}{E}(\tau)}{\partial \tau} + \right. \\ & \left. + 2C_4(t - \tau) \left(\frac{\partial [(\overset{0}{E}(\tau) : I) \overset{0}{E}(\tau)]}{\partial \tau} \right) + 3C_5(t - \tau) \left(\frac{\partial [\overset{0}{E}(\tau)]^2}{\partial \tau} \right) \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь ядра релаксации λ — объемное и G — сдвиговое, а C_3 , C_4 , C_5 — нелинейные ядра релаксации.

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \lambda_0 + \lambda_1 e^{-\alpha t}, \quad G(t) = G_0 + G_1 e^{-\beta t}, \\ C_j(t) &= C_{j0} e^{-f_j t} \quad (j = 3, 4, 5). \end{aligned} \quad (4)$$

Модули λ_i , G_i при $i = 0, 1$, а также α , β , C_{30} , C_{40} и C_{50} , f_3 , f_4 и f_5 могут принимать различные значения в матрице и во включении.

Кинематические соотношения имеют вид

$$\overset{0}{E} = \frac{1}{2} (\Psi \cdot \Psi^* - I), \quad \Psi = I + \overset{0}{\nabla} u. \quad (5)$$

В постановку задачи входят также условия на бесконечности

$$\overset{0}{\Sigma}_M \Big|_{\infty} = \overset{0}{\Sigma}_M^{\infty}, \quad (6)$$

а также условия непрерывности вектора перемещений u и вектора нормальных напряжений $\overset{0}{N} \cdot \overset{0}{\Sigma} \cdot \Psi$ на границе матрицы и включения

$$\begin{aligned} \overset{0}{N} \cdot \overset{0}{\Sigma}_M \cdot \Psi_M \Big|_{\Gamma} &= \overset{0}{N} \cdot \overset{0}{\Sigma}_B \cdot \Psi_B \Big|_{\Gamma}, \\ u_M \Big|_{\Gamma} &= u_B \Big|_{\Gamma}. \end{aligned} \quad (7)$$

2. Метод решения

Для решения задачи применяется метод возмущений (малого параметра) [1, 8, 10–12]. Выбирается малый параметр μ в виде

$$\mu = \max_{i,j} \left| \sum_{ij}^{\infty} \right| / G_0^M \quad (8)$$

и для всех величин, входящих в постановку задачи, записывается разложение в ряд по этому параметру. Например, для вектора перемещений u такое разложение может быть записано в форме

$$u = u^{(0)} + u^{(1)} + \dots, \quad u^{(j)} \sim \mu^{j+1}. \quad (9)$$

В результате решение нелинейной задачи сводится к последовательному решению линеаризованных задач. Решение линеаризованной задачи для каждого приближения определяется методом Колосова–Мусхелишвили [6, 7] с использованием алгоритмов, изложенных в [10–12]. Метод нахождения нулевого приближения подробно описан в [4, 5] и применяется в данной статье.

Для первого приближения решение находится следующим образом. Тильдой помечены те части первого приближения соответствующих величин, которые определяются нулевым приближением. Если в качестве аргумента функции используется s , то предполагается, что речь идет об изображении по Лапласу.

1. Определяется аффинор деформаций $\Psi^{(0)}$:

$$\Psi^{(0)} = \overset{0}{\nabla} u^{(0)}. \quad (10)$$

2. Определяется тензор деформаций Грина $\overset{0}{\tilde{E}}^{(1)}$:

$$\overset{0}{\tilde{E}}^{(1)} = \frac{1}{2} \Psi^{(0)} \cdot \Psi^{(0)*}. \quad (11)$$

3. Применяя к тензору Грина преобразование Лапласа, определяется в изображениях поправка от учета эффектов второго порядка для тензора Пиолы–Кирхгофа второго рода $\overset{0}{\tilde{\Sigma}}^{(1)}$. В следующих выражениях под \mathcal{L} понимается прямое преобразование Лапласа:

$$\begin{aligned} & \overset{0}{\tilde{\Sigma}}^{(1)}(s) = \\ & = I \left\{ \lambda(s) \left(\overset{0}{\tilde{E}}^{(1)}(s) : I \right) + 3C_3(s) \mathcal{L} \left(\left[\overset{0}{\tilde{E}}^{(0)} : I \right]^2 \right) + C_4(s) \mathcal{L} \left(\left[\left(\overset{0}{\tilde{E}}^{(0)} \right)^2 : I \right] \right) \right\} + \\ & + \left\{ 2G(s) \overset{0}{\tilde{E}}^{(1)}(s) + 2C_4(s) \mathcal{L} \left(\left[\overset{0}{\tilde{E}}^{(0)} : I \right] \overset{0}{\tilde{E}}^{(0)} \right) + 3C_5(s) \mathcal{L} \left(\left(\overset{0}{\tilde{E}}^{(0)} \right)^2 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

4. Определяется тензор Пиола $\tilde{P}^{(1)}$:

$$\tilde{P}^{(1)}(s) = \tilde{\Sigma}^{(1)}(s) + \mathcal{L} \left(\overset{0}{\Sigma}^{(0)} \cdot \Psi^{(0)} \right). \quad (13)$$

5. Определяется вектор фиктивных массовых сил $f^{(1)}$:

$$f^{(1)}(s) = -\overset{0}{\nabla} \cdot \tilde{P}^{(1)}(s). \quad (14)$$

6. Определяется тензор напряжений на бесконечности $\sigma^{\infty(1)}$:

$$\sigma^{\infty(1)}(s) = -\tilde{P}^{(1)}(s) \Big|_{\infty}. \quad (15)$$

7. Из вектора $f^{(1)}$ находим частное решение неоднородного уравнения:

$$u_{\text{н.}}^{(1)}(s) = \frac{1}{4G(s)(\lambda(s) + 2G(s))} \cdot \left[(\lambda(s) + 3G(s)) \iint f^{(1)}(s) dz d\bar{z} - (\lambda(s) + G(s)) \iint \overline{f^{(1)}(s)} dz d\bar{z} \right]. \quad (16)$$

8. Находим тензор деформаций с учетом поправки от неоднородного решения $\overset{0}{E}^{(1)}$:

$$\overset{0}{E}^{(1)}(s) = \overset{0}{\tilde{E}}^{(1)}(s) + \frac{1}{2} \left(\overset{0}{\nabla} u_{\text{н.}}^{(1)}(s) + \overset{0}{\nabla} u_{\text{н.}}^{(1)*}(s) \right). \quad (17)$$

9. Находим тензор обобщенных напряжений $\overset{0}{\Sigma}^{(1)}$:

$$\overset{0}{\Sigma}^{(1)}(s) = \overset{0}{\tilde{\Sigma}}^{(1)}(s) + \lambda(\overset{0}{\nabla} \cdot u_{\text{н.}}^{(1)}(s))I + G(\overset{0}{\nabla} u_{\text{н.}}^{(1)}(s) + u_{\text{н.}}^{(1)}(s)\overset{0}{\nabla}). \quad (18)$$

10. Используя комплексные потенциалы, находим решение однородной системы уравнений по аналогии с нулевым приближением. Эти потенциалы представляются в виде:

$$\begin{aligned} \varphi_M^{(1)}(z) &= \sum_{k=-1}^{\infty} a_k^{(1)} z^{-k}, & \psi_M^{(1)}(z) &= \sum_{k=-1}^{\infty} b_k^{(1)} z^{-k}, \\ \varphi_B^{(1)}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} z^k, & \psi_B^{(1)}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(1)} z^k. \end{aligned} \quad (19)$$

Подставляя потенциалы в граничные условия и решая систему линейных алгебраических уравнений, находим выражения для коэффициентов рядов через нагрузки и ядра релаксации. Расчеты показали, что в данном случае в суммах (19) можно ограничиться конечным числом слагаемых до $k = 9$ включительно без потери точности.

Подставляя выражения для потенциалов (19) в формулы из [5–7], связывающие потенциалы с напряжениями и перемещениями, получаем выражения в изображениях для напряжений и перемещений. Применяя обратное преобразование Лапласа, находим решение в оригиналах.

Решение найдено в аналитической форме, но учитывая громоздкость выражений, ограничимся только численными результатами.

3. Результаты расчетов

Для решения задачи было разработано программное обеспечение в среде системы компьютерной алгебры Maple [14]. Были вычислены первые два приближения.

Были выполнены расчеты при следующих значениях вязкоупругих констант: $\alpha_M = \beta_M = \alpha_B = \beta_B$, $\lambda_0^M/G_0^M = 1.5$, $\lambda_1^M/G_0^M = 14$, $G_1^M/G_0^M = 4$, $C_{30}^M/G_0^M = -6$, $C_{40}^M/G_0^M = -8$, $C_{50}^M/G_0^M = -3$, $\lambda_0^B/G_0^M = 15$, $\lambda_1^B/G_0^M = 140$, $G_0^B/G_0^M = 10$, $G_1^B/G_0^M = 40$, $C_{30}^B/G_0^M = -60$, $C_{40}^B/G_0^M = -80$, $C_{50}^B/G_0^M = -30$, $f_3^M = f_4^M = f_5^M = f_3^B = f_4^B = f_5^B = \alpha_M/10$. В данном случае включение более жесткое, чем матрица. На бесконечности в момент $t = 0$ прикладываются растягивающая нагрузка величины вдоль оси x и одновременно сжимающая нагрузка вдоль оси y величины $0.5G_0^M$.

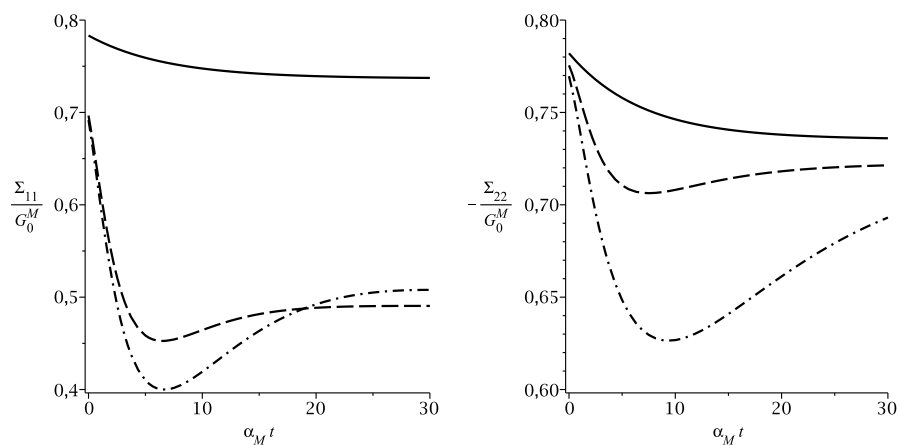


Рис. 2: Изменение напряжений Σ_{11} и Σ_{22} вблизи центра включения

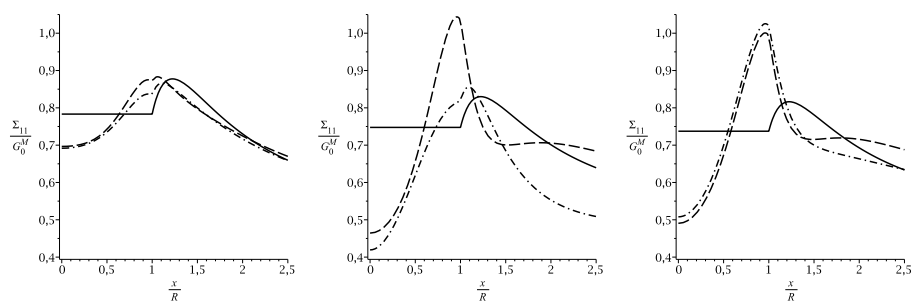


Рис. 3: Распределение напряжений Σ_{11} вдоль оси x в моменты времени $t = 0$, $t = 10/\alpha_M$ и $t = 30/\alpha_M$

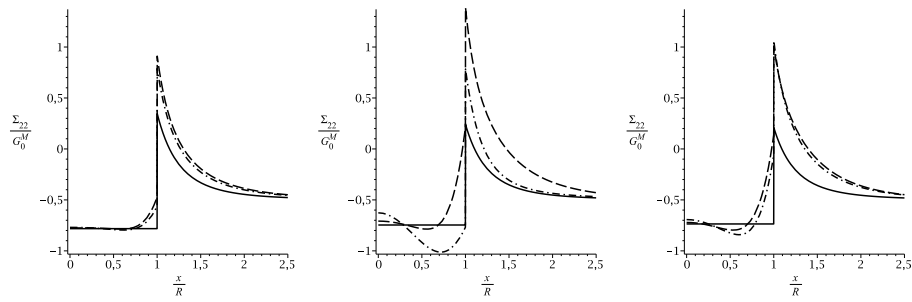


Рис. 4: Распределение напряжений Σ_{22} вдоль оси x в моменты времени $t = 0$, $t = 10/\alpha_M$ и $t = 30/\alpha_M$

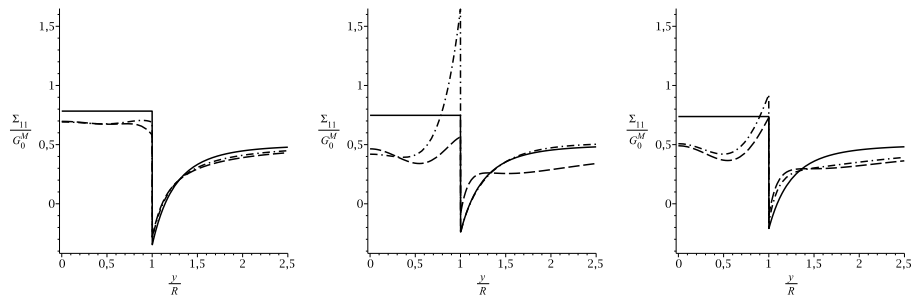


Рис. 5: Распределение напряжений Σ_{11} вдоль оси y в моменты времени $t = 0$, $t = 10/\alpha_M$ и $t = 30/\alpha_M$

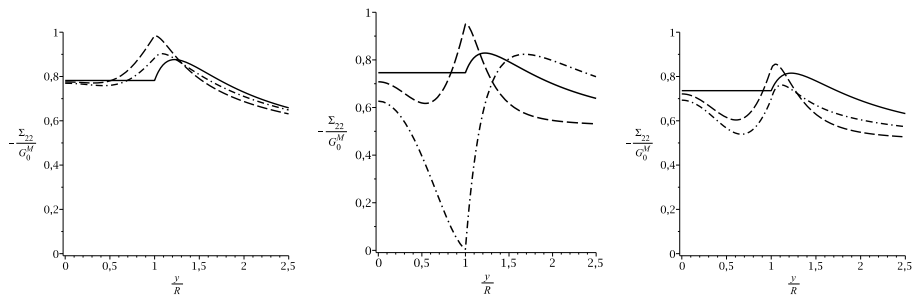


Рис. 6: Распределение напряжений Σ_{22} вдоль оси y в моменты времени $t = 0$, $t = 10/\alpha_M$ и $t = 30/\alpha_M$

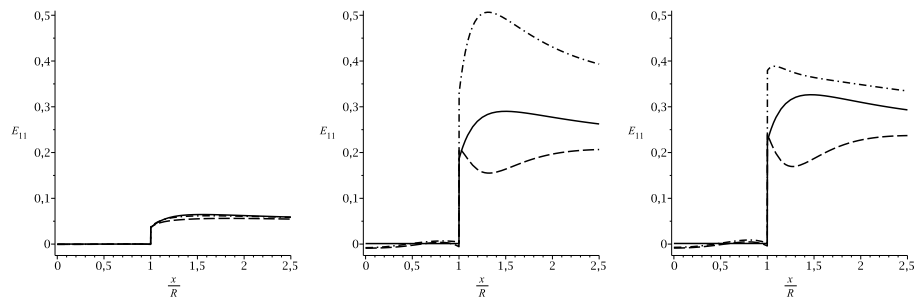


Рис. 7: Распределение деформаций E_{11} вдоль оси x в моменты времени $t = 0$, $t = 10/\alpha_M$ и $t = 30/\alpha_M$

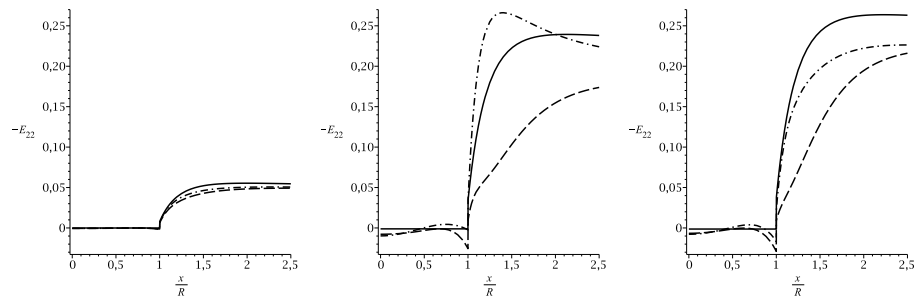


Рис. 8: Распределение деформаций E_{22} вдоль оси x в моменты времени $t = 0$, $t = 10/\alpha_M$ и $t = 30/\alpha_M$

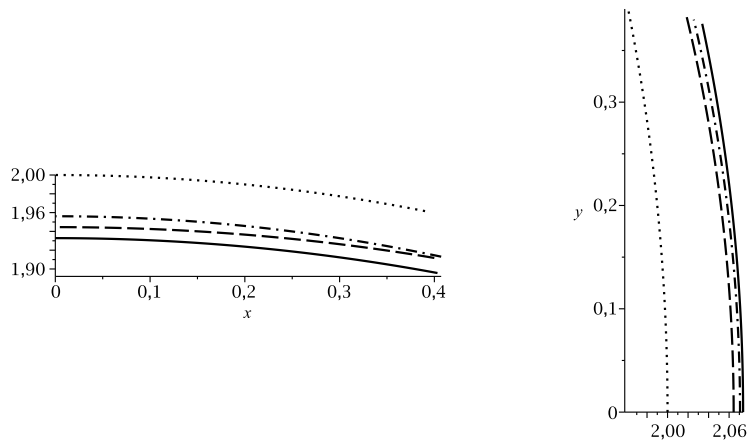


Рис. 9: Фрагменты формы включения в момент времени $t = 10/\alpha_M$

На Рис. 2 представлен график изменения напряжений со временем вблизи центра включения. На Рис. 3–6 показано распределение напряжений Σ_{11} и Σ_{22} вдоль осей x и y в моменты времени $t = 0$, $t = 10/\alpha_M$ и $t = 30/\alpha_M$. На Рис. 7–8 показано распределение деформаций E_{11} и E_{22} вдоль оси x в те же моменты времени $t = 0$, $t = 10/\alpha_M$ и $t = 30/\alpha_M$. На Рис. 9 изображены фрагменты формы включения в момент времени $t = 10/\alpha_M$ вблизи осей нагружения. Форма включения симметрична относительно осей нагружения для каждого из решений.

Сплошная линия на графиках соответствует линейному решению, штриховая – решению с учетом геометрической нелинейности, штихпунктирная – решению с учетом физической нелинейности. На Рис. 9 пунктирной линией изображена исходная форма включения – окружность.

При заданных нагрузках поправка от учета нелинейных эффектов для компонент тензора напряжений не превосходит 38%, а для вектора перемещений – 5%. Для деформаций имеют место значительные поправки. Такие поправки к линейному решению возникают при достаточно больших задаваемых нагрузках. Интересно отметить, что зависимость нелинейного решения от осей не монотонна.

Заключение

Оценено влияние физической нелинейности на решение плоской задачи о квазистатическом деформировании бесконечно протяженного вязкоупругого тела с круговым вязкоупругим включением при заданных напряжениях на бесконечности при конечных деформациях. Исследовано распределение напряжений в различные моменты времени. Разработано программное обеспечение для системы компьютерной алгебры Maple демонстрирующее результаты расчетов [18]. Результаты решения этой задачи могут использоваться для того, чтобы описывать эффективные характеристики вязкоупругих композитов на основе методики из [12], а также для анализа и уточнения численных решений.

Список литературы

- [1] Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
- [2] Колтунов М.А., Майборода В.П., Зубчанинов В.Г. Прочностные расчеты изделий из полимерных материалов. М.: Машиностроение, 1983. 239 с.
- [3] Мошев В.В. и др. Структурные механизмы формирования механических свойств зернистых полимерных композитов. Екатеринбург: УрО РАН, 1997. 508 с.
- [4] Шавырин Д.А. Аналитическое решение плоской задачи о квазистатической деформации бесконечно протяженного вязкоупругого тела с круговым вязкоупругим включением средствами компьютерной алгебры // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. 2013. № 1(28). С. 45–54.

- [5] Шавырин Д.А., Зингерман К.М. Расчет напряженного состояния в полимерном вязкоупругом теле с круговым вязкоупругим включением с учетом геометрической нелинейности // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. 2014. № 2. С. 5–16.
- [6] Колосов Г.В. Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче теории упругости. Юрьев: Маттисен, 1908. 187 с.
- [7] Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 709 с.
- [8] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980. 512 с.
- [9] Murnaghan F.D. Finite deformation of an elastic solid. John Wiley & Sons, Inc., 1951. 140 p.
- [10] Левин В.А., Калинин В.В., Зингерман К.М., Вершинин А.В. Развитие дефектов при конечных деформациях. Компьютерное и физическое моделирование. М.: Физматлит, 2007. 392 с.
- [11] Levin V.A., Zingerman K.M. A class of methods and algorithms for the analysis of successive origination of holes in a pre-stressed viscoelastic body. Finite strains // Communications in Numerical Methods in Engineering. 2008. Vol. 24, no. 12. Pp. 2240–2251.
- [12] Levin V.A., Zingerman K.M., Vershinin A.V., Yakovlev M.Ya. Numerical analysis of effective mechanical properties of rubber-cord composites under finite strains // Composite Structures. 2015. Vol. 131. Pp. 25–36. doi: 10.1016/j.compstruct.2015.04.037
- [13] Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.
- [14] Матросов А.В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. СПб.: БХВ-Петербург, 2001. 528 с.
- [15] Свистков А.Л. Структурно-феноменологическое моделирование механического поведения резин // Высокомолекулярные соединения. 2008. Т. 50, № 5. С. 892–902.
- [16] Федоров А.Е., Адамов А.А. Моделирование поведения кожи человека при больших деформациях // Российский журнал биомеханики. 2007. Т. 11, № 1. С. 76–84.
- [17] Wollscheid D., Lion A. The benefit of fractional derivatives in modelling the dynamics of filler-reinforced rubber under large strains: a comparison with the Maxwell-element approach // Computational Mechanics. 2014. Vol. 53. Pp. 1015–1031. doi:10.1007/s00466-013-0946-4
- [18] Шавырин Д.А., Зингерман К.М. Расчет напряженного состояния вблизи вязкоупругого включения в вязкоупругом сжимаемом теле при конечных деформациях. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015618583, 12.08.2015 г.

Библиографическая ссылка

Шавырин Д.А., Зингерман К.М. О влиянии физической нелинейности на напряженное состояние вблизи вязкоупругого включения в вязкоупругом теле при конечных деформациях // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 4. С. 5–16.

Сведения об авторах**1. Шавырин Дмитрий Алексеевич**

аспирант кафедры вычислительной математики Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, 33, ТвГУ, факультет ПМиК.

2. Зингерман Константин Моисеевич

зав. кафедрой вычислительной математики Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ, факультет ПМиК.

E-mail: zingerman@rambler.ru.

**ON THE INFLUENCE OF PHYSICAL NONLINEARITY ON THE
STRESS STATE NEAR THE VISCOELASTIC INCLUSION IN THE
VISCOELASTIC BODY UNDER FINITE DEFORMATIONS**

Shavyrin Dmitriy Alekseevich

PhD student of Computational Mathematics department, Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str.

Zingerman Konstantin Moiseevich

Head of Computational Mathematics department, Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str.
E-mail: zingerman@rambler.ru

Received 19.10.2015, revised 24.10.2015.

Approximate analytical solution for a specific plane quasistatic problem of the theory of viscoelasticity is found. This is the problem of the stress-strain state in infinitely extended body with circular viscoelastic inclusion when the stresses at infinity are fixed at finite strains. The impact of material nonlinearity is considered. Solution uses perturbation technique, Laplace transform and complex Kolosov-Muskhelishvili potentials. The influence of material nonlinearity on the stress-strain state near the inclusion is analyzed on the basis of the obtained solution.

Keywords: plane problem, viscoelastic inclusion, analytical solution, complex potentials, computer algebra, finite strain, material nonlinearity.

Bibliographic citation

Shavyrin D.A., Zingerman K.M. On the influence of physical nonlinearity on the stress state near the viscoelastic inclusion in the viscoelastic body under finite deformations. *Vestnik Tvgu. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2015, no. 4, pp. 5–16. (in Russian)