ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

УДК 510.652

ОБ ЭЛИМИНАЦИИ ОПЕРАТОРА ФИКСИРОВАННОЙ ТОЧКИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ФОРМУЛ В ТЕОРИИ ОДНОГО СЛЕДОВАНИЯ[1]

Золотов А.С.
Кафедра информатики

Поступила в редакцию 15.10.2015, после переработки 25.10.2015.

Мы рассматриваем вопрос об эффективной элиминации оператора фиксированной точки для некоторых формул специального вида, содержащих равенства, в теории целых чисел с функцией следования.

Ключевые слова: разрешимость, оператор фиксированной точки.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 4. С. 27–37.

Введение

Вопрос о разрешимости теорий является одной из центральных проблем математической логики. К настоящему моменту в этой области получен целый ряд как положительных, так и отрицательных результатов (см. [2–4, 9]).

Язык SQL является наиболее универсальным и распространенным средством построения запросов к БД. В первых своих редакциях он по сути дела представлял собой некоторый диалект языка математической логики первого порядка [5,6]. При этом существенно ограничивалась выразительная сила (хорошо известен результат о неполноте логики первого порядка для класса $PTIME$, нельзя выразить, скажем, транзитивное замыкание, см [1]).

Чтобы преодолеть это ограничение, в «новом» стандарте появилась возможность построения рекурсивных запросов, что соответствует языку логики первого порядка, обогащенному оператором инфляционной фиксированной точки. Но вместе с повышением выразительной силы данное новшество привело к тому, что запрос может «зацикливаться». Проблеме безопасности рекурсивных запросов посвящены работы [10, 11].

Обогащениям языка логики первого порядка итеративными операторами посвящен ряд работ. Так, в [7] рассматривается выразительная сила различных итеративных операторов для конечных систем. В [8, 14] можно найти результаты об эквивалентности логики фиксированной точки для конечных систем и класса $PTIME$. Также в [8] можно найти результаты о связи логики частичной фиксированной точки и класса $PSPACE$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты № 13-01-00382 и № 13-01-00643.

В работе [12] рассматривается вопрос о разрешимости теории одного следования с оператором транзитивного замыкания, а в [13] доказывается неразрешимость арифметики Пресбургера и арифметики Сколема, обогащенных этим оператором.

В данной работе мы рассматриваем формулы специального вида в фрагменте теории одного следования, содержащем под оператором фиксированной точки дизъюнкцию конъюнкций равенств. Мы показываем, что для формул этого фрагмента, в которых новая точка добавляется всегда справа (или всегда слева) от уже построенных, допустима эффективная элиминация оператора фиксированной точки.

1. Основные определения

Считаем, что формулы строятся по обычным для логики первого порядка правилам, за исключением оператора фиксированной точки.

Определение 1 (см. [7]). *Формулой* FP*-логики называется формула, построенная по правилам логики первого порядка, а также с помощью оператора инфляционной фиксированной точки* FP*: если $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ — формула со свободными переменными $\bar{x}$ и $\bar{y}$, содержащая несигнатурный предикатный символ Q, входящий в ϕ только положительно, то $\mathrm{FP}_{Q(\bar{y})}(\phi)$ — формула исходной сигнатуры со свободными переменными $\bar{x}$ и $\bar{y}$.*

Семантика атомных формул, булевых связок и кванторов определяется как в логике первого порядка. Дадим определение семантики FP-формул.

Определение 2. *Пусть $\mathfrak{A}$ — это алгебраическая система, $\phi(\bar{x}, \bar{y})$ — формула, с новым предикатным символом Q, m — количество элементов набора $\bar{y}$. Зафиксируем значение переменных $\bar{x}$ — $\bar{a} \in |\mathfrak{A}|$. Определим семейство множеств $\{Q_i^{\bar{a}}\}_{i\in\omega}$ следующим образом:*

$$Q_0^{\bar{a}} = \emptyset; \quad Q_{i+1}^{\bar{a}} = \{\bar{y} \in |\mathfrak{A}| : (\mathfrak{A}, Q_i^{\bar{a}}) \models \phi(\bar{a}, \bar{y})\}, \ \textit{для } i \in \omega.$$

Считаем формулу $\mathrm{FP}_{Q(\bar{y})}(\phi)(\bar{a}, \bar{y})$ истинной, если существует такой номер $n \in \omega$, что $\bar{y} \in Q_n^{\bar{a}}$, и ложной в противном случае.

Замечание 1. Так как символ Q входит в ϕ положительно, то $Q_i^{\bar{a}} \subseteq Q_{i+1}^{\bar{a}}$.

В данной работе будем рассматривать следующую интерпретацию I. Ее областью являются целые числа. Здесь и далее $I(x)$ — элемент интерпретации, приписываемый переменной x. Интерпретация I приписывает символу 0 нуль, символу s — функцию прибавления единицы. Также I предписывает, что $x < y$ должно быть истинно тогда и только тогда, когда $I(x)$ меньше $I(y)$, $x = y$ должно быть истинно тогда и только тогда, когда $I(x)$ равно $I(y)$. Также $I \models D_m(x)$ тогда и только тогда, когда $I(x)$ делится на m для всякого натурального $m > 0$.

Определение 3. *Будем обозначать через $s^k(x)$ k-кратное применение s: $\underbrace{s(s(\ldots s}_{k \text{ раз}}(x)\ldots)$.*

Замечание 2. Несложно видеть, что если допускать хотя бы двухместный символ Q из определения 2, то можно выразить сложение и умножение натуральных чисел, что означает неразрешимость такой теории. Далее будем рассматривать только одноместный символ Q.

2. Экзистенциальные формулы с равенствами

В данном разделе мы рассмотрим вопрос об элиминации FP-оператора из экзистенциальных формул одного частного вида, содержащих равенства и функцию следования.

Определение 4. *Пусть* $\mathrm{FP}_{Q(y)}(\phi)$ *—* FP-*формула. Пусть* $false$ *—какая-либо ложная в нашей системе формула. Определим семейство формул* $\{FP^i_{Q(y)}(\phi)\}_{i\in\omega}$ *индукцией по* i*:*

$$FP^0_{Q(y)}(\phi) \equiv \phi^Q_{false}; \quad FP^{i+1}_{Q(y)}(\phi) \equiv \phi^Q_{FP^i_{Q(y)}(\phi)}.$$

Здесь ϕ^Q_{false} обозначает результат замены каждой подформулы вида $Q(t)$ в ϕ на $false$, а $\phi^Q_{FP^i_{Q(y)}(\phi)}$ – результат замены каждый подформулы вида $Q(t)$ в ϕ на $FP^i_{Q(y)}(\phi)(t)$. Содержательно говоря, формула $FP^i_{Q(y)}(\phi)$ описывает этап построения фиксированной точки с номером i. Заметим, что $FP^i_{Q(y)}(\phi)$ является формулой первого порядка для каждого i.

Определение 5. *Формулу вида*

$$\psi(x,\bar{z},\bar{y},v) \equiv \left(\bigwedge_{i=1}^{n}(y_i = s^{k_i}(x))\right) \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{m}(x = s^{t_j}(z_j))\right) \wedge (v = s^l(x)),$$

$$k_i \in \omega, t_j \in \omega, l \in \mathbb{Z}$$

будем называть шаблоном (простым шаблоном).

Величину $h(\psi)$*, равную* $K(\psi)+T(\psi)$*, где* $K(\psi) = \max\{k_i : i = \overline{1,n}\}$*,* $T(\psi) = \max\{t_j : j = \overline{1,m}\}$ *будем называть* шириной шаблона.

Будем говорить, что шаблон имеет сдвиг*, если выполнено одно и двух:* $l \geq 0$ *и* $l > K(\psi)$ *или же* $l < 0$ *и* $-l > T(\psi)$*; в противном случае, шаблон* не имеет сдвига.

При $l \geq 0$ *определим* величину сдвига шаблона $S(\psi)$ *как* $l - K(\psi)$*, в противном случае положим* $S(\psi)$ *равной* $l + T(\psi)$*. Обозначим число* l *через* $l(\psi)$*.*

Знаком *шаблона будем называть знак его величины сдвига.*

Всюду далее считаем, что под FP-оператором стоит формула, где проведена элиминация кванторов по всем переменным, кроме тех, которые стоят под символом Q. Также считаем, что формула приведена к дизъюнктивной нормальной форме.

Рассмотрим формулу $\mathrm{FP}_{Q(v)}(\phi)$ и запишем ее в виде $\mathrm{FP}_{Q(v)}(\phi_0 \vee \phi_1)$ так, чтобы ϕ_0 не содержала Q, а в каждом дизъюнктивном члене ϕ_1 было хотя бы одно вхождение Q. Далее считаем, что ϕ_0 и ϕ_1 нетривиальны.

Лемма 1. *Пусть формула* $\Phi \equiv \mathrm{FP}_{Q(v)}(\phi_0 \vee \phi_1)(\bar{z}, x)$ *такова, что*

$$\phi_0 \equiv \bigvee_{i=1}^{n} (v = z_i), \quad \phi_1 \equiv \bigvee_{i=1}^{m} (\exists v_1) \dots (\exists v_{k_i})(Q(v_1) \wedge \dots \wedge Q(v_{k_i}) \wedge \psi_i(v_1, \dots, v_{k_i}, v)),$$

где ψ_i *— шаблоны одного знака. Тогда существует формула, эквивалентная* Φ*, и не содержащая* FP*-оператора.*

Доказательство. Для определенности будем полагать, что все шаблоны положительны. Случай с отрицательными шаблонами рассматривается аналогично.

Существует конечное число вариантов упорядочений для переменных $z_1, \dots, z_n$, их можно перебрать, записав конечную дизъюнкцию.

Пусть фиксирован некоторый такой вариант упорядочения, для удобства записи пусть он имеет вид $z_1 < z_2 < \dots < z_n$.

Пусть $H = \max_i h(\psi_i)$. Определим вспомогательные формулы:

$$\rho_{\leq H}(x, y) \equiv \bigvee_{i=0}^{H} (x = s^i(y) \vee y = s^i(x)); \quad \rho_{>H}(x, y) \equiv x > s^H(y) \vee y > s^H(x).$$

Как нетрудно заметить, первая формула утверждает, что расстояние между x и y не превосходит H, вторая формула утверждает противоположное.

Будем говорить, что множество точке образует H*-кластер*, если расстояние между соседними из них не превосходит H. При фиксированном упорядочении переменных $z_1, \dots, z_n$ существует конечное число вариантов того, какие из значений этих переменных образуют H-кластеры, поэтому все варианты расположения H-кластеров можно перебрать, записав конечную дизъюнкцию.

Сначала рассмотрим случай, когда выполняется $\rho_{\leq H}(z_1, z_2) \wedge \dots \wedge \rho_{\leq H}(z_{n-1}, z_n)$. Тогда истинна формула $\rho_{\leq (n-1)H}(z_1, z_n)$, то есть расстояние между точками не превосходит $(n-1)H$.

Если построение FP длится дольше, чем $(n-1)H$ шагов, то непременно появятся точки, которые окажутся больше $I(z_n)$.

Положим $L = \max_i h(\psi_i) + \max_i S(\psi_i) + 1$. Начнем откладывать отрезки длины L, начиная с $I(z_n)$. Будем называть их L*-отрезками*, обозначим Z_i отрезок с номером i. Если процесс построения фиксированной точки длится достаточно долго (более $(n-1)H$ шагов), то некоторые из точек каких-то из этих отрезков попадут в множество Q.

Всего существует 2^L вариантов принадлежности точек отрезкам длины L. Поэтому если построение FP длится дольше, чем $L \cdot 2^L + (n-1)H$ шагов, то среди отрезков $\{Z_i : 1 \leq i \leq 2^L + 1\}$ найдутся такие Z_{i_1} и Z_{i_2}, на которых расположение множества Q будет одинаковым. Так как при добавлении новых точек учитываются только те из уже построенных, которые располагаются не более, чем на L левее, то далее фрагмент между Z_{i_1} и Z_{i_2} будет повторяться бесконечно. При этом минимальная длина повторяющегося фрагмента заранее неизвестна, но можно утверждать, что она не превосходит $L \cdot 2^L$ и кратна L, а значит, делит $L(2^L)!$, то есть в отрезке такой длины содержится целое число повторов.

Таким образом, при построении FP, можно выделить следующие этапы:

1. Добавляем точки, лежащие между $I(z_1)$ и $I(z_n)$. Данный этап длится не более $(n-1)H$ шагов. Построение либо завершается, либо переходит к следующему этапу.

2. Добавляем точки правее $I(z_n)$, при этом повторов L-отрезков может не быть. Данный этап не может длиться дольше $L \cdot 2^L$ шагов. Построение либо завершается, либо переходит к следующему этапу.

3. Добавление точек правее $I(z_n)$, при этом L-отрезки повторяются. Можно утверждать, что фрагмент длины $L \cdot (2^L)!$ повторяется. Данный этап длится бесконечно долго, так как является циклическим.

Пронумеруем отрезки слева направо и определим формулы.

– «x и y имеют одинаковые остатки от деления на L»:

$$\alpha_L(x,y) \equiv \left(\bigvee_{i=0}^{L-1} (D_L(s^i(x)) \wedge D_L(s^i(y)) \right);$$

– «x принадлежит отрезку Z_i , если отрезки откладывать от z»:

$$\beta_i(x,z) \equiv \bigvee_{j=1}^{L} x = s^{j+i\cdot L}(z).$$

Пусть $R = (n-1)H + L \cdot 2^L + L \cdot (2^L)!$. Выбор данной константы обусловлен следующими фактами: первый этап построения не может длиться дольше $(n-1)H$ шагов, второй – не дольше $L \cdot 2^L$, а длину повторяющегося фрагмента можно считать равной $L \cdot (2^L)!$.

Теперь мы можем записать искомую формулу, описывающую точки, попавшие в FP в рассматриваемом нами случае:

$$FP^R_{Q(v)}(\phi)(\bar{z},x) \vee (\exists y)(\exists u)(FP^R_{Q(v)}(\phi)(\bar{z},u) \wedge \alpha_{L\cdot(2^L)!}(y, s^{L\cdot 2^L}(z_n)) \wedge$$
$$\wedge (z_n < x) \wedge \left(\bigvee_{i=1}^{(2^L)!} (\beta_i(x,y) \wedge \beta_{2^L+i}(u,z_n) \wedge \alpha_L(x,u)) \right).$$

Действительно, в качестве $I(y)$ можно взять начало отрезка, в котором лежит $I(x)$, а в качестве $I(u)$ – точку, которая соответствует $I(x)$ при повторении.

Далее рассмотрим случай, когда H-кластеров несколько, положим их количество равным N. По индукционному предположению, можно считать, что уже построена формула $\Phi'(\bar{z},x)$, эквивалентная FP при наличии $N-1$ H-кластера слева направо. Заметим, что поскольку есть только положительные сдвиги, правые кластеры не влияют на построение FP для левых кластеров.

Пусть в последний H-кластер входят точки $z_{i_1}, \dots, z_{i_k}$, причем $z_{i_1} < \dots < z_{i_k}$. Отличия в построении FP для N кластеров от построения для $N-1$ могут начаться на участке не левее $I(z_{i_1}) - L$. Так как $z_{i_1}, \dots, z_{i_k}$ принадлежат одному и тому же H-кластеру, то $I(z_{i_k}) - I(z_{i_1}) \le (k-1)H$. Таким образом, для взаимного расположения $z_{i_1}, \dots, z_{i_k}$ относительно друг друга есть только конечно много вариантов, их можно все перебрать, записав конечную дизъюнкцию.

Пусть фиксирован некоторый вариант этого расположения, такой, что $I(z_{i_k}) - I(z_{i_1}) = d, d \le (k-1)H$. В силу выбора константы L дальнейшее построение FP для точек больше $I(z_{i_1})$ не будет зависеть от того, какие точки левее $I(z_{i_1}) - L$ были добавлены. При этом, на участке от $I(z_{i_1}) - L$ до $I(z_{i_k})$ могут появиться точки, добавленные при построении FP для $N-1$ кластеров. Возможных вариантов этого участка существует $2^{L+(k-1)H-k}$, их можно перебрать, записав конечную дизъюнкцию, где члены будут состоять из конъюнкций формул вида $\Phi'(\bar{z}, t)$, где t – терм, чье значение равно некоторой точке рассматриваемого участка. Все такие термы имеют вид $s^p(z_{i_1})$ для подходящего p.

Пусть термы $t_1, \dots, t_r$ таковы, что истинна $\Phi'(\bar{z}, t_1) \wedge \dots \wedge \Phi'(\bar{z}, t_r)$. В этом случае рассмотрим формулу

$$\mathrm{FP}_{Q(v)}(\phi_0' \vee \phi_1), \quad \phi_0' \equiv \left(\bigvee_{i=1}^{r} (v = t_i) \right) \vee \left(\bigvee_{i=1}^{k} (v = z_{i_k}) \right).$$

Она описывает построение FP как раз при условии, что дополнительно добавленными в множество оказываются значения термов $t_1, \dots, t_r$. При этом, в силу выбора L и того факта, что символ Q входит в ϕ_1 только положительно, дальнейшее построение однозначно определяется точками $I(z_{i_1}), \dots, I(z_{i_k}), I(t_1), \dots, I(t_r)$. Заметим, что данные точки образуют $(L+d)$-кластер, к ним применимы рассуждения, приведенные выше.

Построим аналогичные формулы для всех вариантов взаимного расположения точек кластера и термов, описанных выше, объединим их в дизъюнкцию, обозначим полученную формулу $\Theta(\bar{z}, x)$. Тогда $\mathrm{FP}_{Q(v)}(\phi_0 \vee \phi_1)(\bar{z}, x)$ истинна тогда и только тогда, когда $\Phi'(\bar{z}, x) \vee \Theta(\bar{z}, x)$. $\square$

Замечание 3. Аналогичные рассуждения можно провести для случая, когда ни один шаблон имеет сдвига. Нужно только заметить тот факт, что для построения фиксированной точки H-кластера из n точек достаточно $(n-1)H$ шагов.

Определение 6. *Формулу вида*

$$\psi(x, \bar{u}, \bar{z}, \bar{y}, v) \equiv \psi'(\bar{u}) \wedge \psi''(x, \bar{z}, \bar{y}, v),$$

где ψ'' – шаблон, ψ' – произвольная Q-положительная формула, а среди переменных из $\bar{u}$ нет ни x, ни v, ни переменных, входящих в $\bar{z}$ или $\bar{y}$, будем называть расширенным шаблоном. *Формулу ψ' будем называть* дополнительной формулой *расширенного шаблона, а набор $\bar{u}$ –* набором дополнительных переменных. *Все определения для шаблонов (ширины, знака и проч.) распространяются и на расширенные шаблоны.*

Замечание 4. Всякий простой шаблон можно считать расширенным шаблоном с тривиальной (тождественно истинной) дополнительной формулой.

Содержательно расширенный шаблон отличается от обычного шаблона наличием подформулы, переменные которой (набор дополнительных переменных) не оказывают влияния на значение той точки, которая будет добавлена в результате применения данного шаблона. Заметим, что если такой расширенный шаблон был использован хоть раз, то его дополнительная формула на данном шаге стала истинной, а значит, она и после будет оставаться истинной. Сформулируем данное замечание формально.

Теорема 1. *Пусть формула* $\Phi \equiv \mathrm{FP}_{Q(v)}(\phi_0 \vee \phi_1)(\bar{z}, x)$ *такова, что*

$$\phi_0 \equiv \bigvee_{i=1}^{n}(v = z_i), \quad \phi_1 \equiv \bigvee_{i=1}^{m}(\exists v_1)\dots(\exists v_{k_i})(Q(v_1) \wedge \dots \wedge Q(v_{k_i}) \wedge \psi_i(v_1, \dots, v_{k_i}, v)),$$

где ψ_i *— расширенные шаблоны одного знака. Тогда существует формула, эквивалентная* Φ*, и не содержащая* FP*-оператора.*

Доказательство. Покажем, что можно уменьшить количество расширенных шаблонов с нетривиальными дополнительными формулами в формуле ϕ_1, перейдя от них к простым шаблонам.

Рассмотрим дизъюнктивный член

$$\eta \equiv (\exists v_1)\dots(\exists v_{k_1})(Q(v_1) \wedge \dots \wedge Q(v_{k_1}) \wedge \psi_1(v_1, \dots, v_{k_1}, v)).$$

Пусть в расширенном шаблоне ψ_1 набор дополнительных переменных имеет вид $v_1, \dots, v_r$, то есть $\psi_1 \equiv \psi_1'(v_1, \dots, v_r) \wedge \psi_1''(v_{r+1}, \dots, v_{k_1}, v)$, где ψ_1'' – шаблон. Заметим, что если на некотором этапе построения FP формула ψ_1 была истинна для некоторой оценки J_1 переменных $v_1, \dots, v_k, v$, то и формула ψ_1' была истинна для этих же оценок переменных, а значит, и для последующих шагов построения FP найдется такая оценка J_2, при которой ψ_1' истинна (достаточно, чтобы $J_1(v_i) = J_2(v_i), i = \overline{1, r}$).

Пусть

$$\Theta(\bar{z}, x) \equiv \mathrm{FP}_{Q(v)}(\phi_0 \vee \phi_2)(\bar{z}, x),$$
$$\phi_2 \equiv \bigvee_{i=2}^{m}(\exists v_1)\dots(\exists v_{k_i})(Q(v_1) \wedge \dots \wedge Q(v_{k_i}) \wedge \psi_i(v_1, \dots, v_{k_i}, v)).$$

Возможны следующие варианты:

1. При построении FP формула η ни разу не становилась истинной ни на одном шаге. При этом условии исходная формула эквивалентна $\Theta(\bar{z}, x)$.

2. При построении FP на некотором этапе η стала истинной. При этом условии исходная формула эквивалентна следующей:

$$\begin{gathered}(\exists v_1)\dots(\exists v_r)(\Theta(\bar{z}, v_1) \wedge \dots \wedge \Theta(\bar{z}, v_r) \wedge \psi_1'(v_1, \dots, v_r)) \wedge \\ \wedge \mathrm{FP}_{Q(v)}(\phi_0 \vee \phi_3)(\bar{z}, x), \\ \phi_3 \equiv (\exists v_{r+1})\dots(\exists v_{k_1})(Q(v_{r+1}) \wedge Q(v_{k_1}) \wedge \psi_1''(v_{r+1}, \dots, v_{k_1})) \vee \\ \vee \bigvee_{i=2}^{m}(\exists v_1)\dots(\exists v_{k_i})(Q(v_1) \wedge \dots \wedge Q(v_{k_i}) \wedge \psi_i(v_1, \dots, v_{k_i}, v)).\end{gathered} \tag{1}$$

   Обозначим построенную формулу Γ.

Докажем эквивалентность, утверждающуюся в пункте 2.

В силу монотонности всякая точка, попавшая в отношение при построении FP для Φ, попадет и в отношение для Γ.

Обозначим последовательность отношений, возникающих при построении FP для Φ через $\{Q_i^\Phi\}$, для Γ – через $\{Q_i^\Gamma\}$, а для Θ – через $\{Q_i^\Theta\}$.

Теперь покажем, что если $a \in Q_i^\Gamma \setminus Q_{i-1}^\Gamma$ для некоторого i, то $a \in Q_j^\Phi$ для некоторого j индукцией по i.

Базис при номере шага 0 очевиден. Пусть $a \in Q_i^\Gamma \setminus Q_{i-1}^\Gamma$. При этом, в силу индукционного предположения, для всякой точки $b \in Q_{i-1}^\Gamma$ найдется такое $j(b)$, что $b \in Q_{j(b)}^\Phi \setminus Q_{j(b)-1}^\Phi$. Пусть $j_{max} = \max\limits_{b \in Q_i^\Gamma} j(b)$. Тогда $b \in Q_{i-1}^\Gamma \to b \in Q_{j_{max}}^\Phi$.

Рассмотрим то, как она могла быть добавлена в отношение.

Точка a могла быть добавлена как значение переменной v при оценке I такой, что

$$I \models (\exists v_1) \dots (\exists v_{k_i})(Q(v_1) \wedge \dots \wedge Q(v_{k_i}) \wedge \psi_i(v_1, \dots, v_{k_i}, v))$$

для некоторого $i = \overline{2, m}$, а $I(Q) = Q_{i-1}^\Gamma$. Но тогда $a \in Q_{j_{max}+1}^\Phi$, так как все требуемые для этого точки уже есть в $Q_{j_max}^\Phi$.

Остается рассмотреть вариант, когда точка a добавлена как значение переменной v при оценке I такой, что

$$I \models (\exists v_1) \dots (\exists v_r)(\Theta(\bar{z}, v_1) \wedge \dots \wedge \Theta(\bar{z}, v_r) \wedge \phi_1'(v_1, \dots, v_r)),$$

а $I(Q) = Q_{i-1}^\Gamma$. Так как формула (1) истинна, то найдутся такие номер l и интерпретация J,что $J(Q) = Q_l^\Theta$, $I(v_i) \in Q_l^\Theta, i = \overline{1, r}$ и $J \models \phi_1'(v_1, \dots, v_r)$. Тогда $Q_{i-1}^\Gamma \subseteq Q_{\max\{l, j_{max}\}}^\Phi, Q_l^\Theta \subseteq Q_{\max\{l, j_{max}\}}^\Phi$. Тогда для оценки I' такой, что $I'(Q) = Q_{\max\{l, j_{max}\}}^\Phi$ и $I'(v) = a$ будет выполнено $I' \models \eta$. Таким образом, $a \in Q_{\max\{l, j_{max}\}+1}^\Phi$.

Таким образом, записав дизъюнкцию формул из пунктов 1 и 2, мы получим формулу, где под FP-операторами стоит меньше расширенных шаблонов с нетривиальными дополнительными формулами, чем в исходной формуле. Проведя такие преобразования нужное число раз, получим формулу, где под FP-операторами стоят формулы, содержащие только простые шаблоны. К таким формулам можно применить результат леммы 1. □

Заключение

В данной работе мы рассмотрели формулы одного специального вида в фрагменте теории с одним следованием и оператором фиксированной точки. Мы показали, что если при построении фиксированной точки новый элемент добавляется всегда справа (всегда слева) от уже построенных, и процесс построения длится достаточно долго (дольше константы, зависящей только от вида формулы под FP-оператором), то расположение элементов множества Q имеет циклический характер. Это позволяет эффективно построить формулу первого порядка без оператора фиксированной точки, эквивалентную в рассматриваемой теории исходной формуле. Также показано, как перейти от расширенных шаблонов, содержащих нетривиальные дополнительные условия, к простым.

Интерес представляют вопросы о возможности элиминации FP-оператора для формул, содержащих шаблоны разных знаков и шаблоны без знака одновременно, предикаты делимости и знаки неравенств.

Список литературы

[1] Aho A.V., Ullman J.D. Universality of data retrieval languages // Proc. of 6th Symp. on Principles of Programming Languages, 1979. Pp. 110–120.

[2] Boolos G.S., Jefferey R.C. Computability and logic. Cambridge University Press, 1994.

[3] Church A. A note on the Entscheidungs problem // Journal of Symbolic Logic. 1936. No. 1. Pp. 40–41.

[4] Church A. An unsolvable problem of elementary number theory // American Journal of Mathematics. 1936. Vol. 58. Pp. 345–363.

[5] Codd E.F. A relational model for large shared data banks // Association for Computing Machinery. Communications of the ACM. 1970. Vol. 13. Pp. 377–387.

[6] Codd E.F. Relational completeness of data base sublanguages // In: Database Systems / Ed. by R. Rustin. Prentice-Hall, 1972. Pp. 33–64.

[7] Gurevich Y., Shelah S. Fixed-point extensions of first-order logic // Annals of Pure and Applied Logic. 1986. Vol. 32. Pp. 265–280.

[8] Gradel E. Finite Model Theory and Descriptive Complexity. Aachen, RWTH University, 2007.

[9] Presburger M. Uber die Vollstandigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt // Comptes Rendus du I congres de Mathematiciens des Pays Slaves. Warszawa, 1929. Pp. 92–101.

[10] Дудаков С.М. О безопасности рекурсивных запросов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2012. № 4(27). С. 71–80.

[11] Дудаков С.М. О безопасности IFP-операторов и рекурсивных запросов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2013. № 2(29). С. 5–13.

[12] Золотов А.С. Применение оператора транзитивного замыкания для формул с одной функцией следования и предикатами делимости // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2013. № 1(28). С. 101–117.

[13] Золотов А.С. О неразрешимости аддитивных и мультипликативных теорий натуральных чисел с оператором транзитивного замыкания // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. № 3. С. 117–124.

[14] Тайцлин М.А. Языки запросов для баз данных. Тверь: ТвГУ, 1999. 57 с.

Библиографическая ссылка

Золотов А.С. Об элиминации оператора фиксированной точки для некоторых формул в теории одного следования // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 4. С. 27–37.

Сведения об авторах

1. **Золотов Александр Сергеевич**
аспирант кафедры информатики Тверского государственного университета.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ.

ON THE ELIMINATION OF FIXED POINT OPERATOR FOR SOME FORMULAS IN A THEORY OF SINGLE SUCCESSOR FUNCTION

Zolotov Alexander Sergeyevich
PhD student of Computer Science department, Tver State University
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU.

Received 15.10.2015, revised 25.10.2015.

We investigate effective elimination of the fixed point operator in a theory of integers with a single successor function. We show that effective elimination is possible for some formulas containing equalities.

Keywords: decidability, fixed point operator.

Bibliographic citation

Zolotov A.S. On the elimination of fixed point operator for some formulas in a theory of single successor function. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2015, no. 4, pp. 27–37. (in Russian)