УДК 519.21

ПРОЦЕСС ДВИЖЕНИЯ ЦЕНЫ, ПОРОЖДЕННЫЙ НЕПРЕРЫВНОЙ МОДЕЛЬЮ КНИГИ ЗАКАЗОВ

Лаврентьев В.В., Назаров Л.В.
МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва

Поступила в редакцию 27.08.2015, после переработки 10.09.2015.

Рассматривается модель книги заказов, в которой заказ на покупку или продажу может быть выставлен по любой цене. Предложен механизм влияния поступающих заказов на цену актива. Получена предельная теорема для процесса цены при высокой интенсивности входящего потока заказов.

Ключевые слова: модель книги заказов, процесс цены, функциональная предельная теорема.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 4. С. 55–63.

1. Введение

Книга заказов на бирже представляет собой список всех не исполненных к настоящему моменту заказов на покупку и продажу некоторого торгуемого актива. Она содержит важную информацию на основе которой участники торгов делают прогнозы возможного движения цены данного актива. Важность этой информации значительно возросла с развитием высокочастотной торговли [1]. Именно этим вызван большой интерес исследователей к построению моделей книги заказов. Обзор последних исследований в этой области и обширную библиографию можно найти в диссертации А. Куканова [2].

Целью настоящей работы является построение модели, описывающей влияние книги заказов на цену актива. Была взята модель книги заказов, близкая к рассмотренной в [2], но с одним существенным отличием. Обычно на бирже сделки происходят не по произвольной цене, а по цене вида nh, где n – некоторое целое число, а h – минимальное изменение цены (тик). Это число как правило мало по сравнению со стоимостью актива. Так например сейчас при стоимости фьючерса на S&P около 2000 и среднем изменении цены в течение дня в 2014 году более 16 тик h равен 0.25. Поэтому сетка $\{nh, n \geqslant 1\}$ является достаточно частой и мы можем для упрощения вычислений допустить возможность проведения сделок и выставления заказов по произвольной цене.

Далее в этой модели вводится следующий механизм влияния поступающих заказов на цену. Представим себе точку массой m, которая может двигаться без трения по числовой оси. Текущее положение точки на оси это текущая цена $X(t)$. Каждый заказ на продажу (поступающий по цене A_i не ниже, чем $X(t)$) вызывает появление силы F, действующей по направлению от A_i к $X(t)$. Сила эта постоянна и действует пока данный заказ присутствует в книге. Аналогично с заказами на покупку. Заказы живут экспонециальное время после чего уходят из книги (за счет исполнения или отмены), прекращая свое воздействие на цену.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы выяснить какой процесс движения цены порождает такая система при интенсивном потоке приходящих заказов.

2. Описание модели

Предположим, что в начальный момент времени книга заказов пуста. Поток заказов N является процессом Кокса

$$\{N(t) = N_1(\Lambda(t)),\ t \geqslant 0\},$$

где N_1 – пуассоновский процесс с единичной интенсивностью, а Λ – стартующий из нуля процесс с неубывающими и непрерывными справа траекториями, не зависящий от N_1 и удовлетворяющий условию $\mathbb{P}(\Lambda(t) < \infty)$ для любого $t \geqslant 0$. Заказы находятся в книге случайное время, и по окончании этого времени уходят из системы (за счет исполнения или отмены). Если говорить более строго, то заказ с номером i приходит со следующим набором параметров:

- $\chi_i = 0$, если это заказ на продажу и $\chi_i = 1$ в противном случае;
- h_i – разность между ценой заказа и текущей ценой актива;
- η_i – время пребывания заказа в книге.

Случайные величины $\{\chi_i, h_i, \eta_i, i = 1, 2, ...\}$ независимы в совокупности и не зависят от входящего потока. При этом $\mathbb{P}(\chi_i = 0) = b$, $\mathbb{P}(h_i < x) = A(x)$, а η_i распределены экспоненциально с параметром μ для любого $i \geqslant 1$.

Пришедший заказ с номером i начинает действовать на цену с силой $F_0(h_i)$ $(\operatorname{sgn} F_0(h) = -\operatorname{sgn} h)$. На функции F_0 и A мы наложим следующие ограничения

$$\mathbb{E}F_0(h_i) = 0, \mathbb{E}[F_0(h_i)]^2 = \overline{F} < \infty. \tag{1}$$

Первое из них означает, что заказы на покупку действуют на цены в среднем с той же силой, что и заказы на продажу; второе – чисто техническое.

Логично считать F_0 возрастающей на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$ функцией, поскольку воздействие заказа на цену тем больше, чем ближе его цена к текущей, но мы этого не требуем.

3. Процесс цены

Предположим, что в начальный момент времени книга заказов пуста и цена имеет нулевую начальную скорость. Пусть i-й заказ приходит в момент времени τ_{i0} и уходит в τ_{i1}. Сила, действующая на цену, является случайным процессом $\{F(t), t \geqslant 0\}$ с кусочно постоянными траекториями. Она равна

$$F(t) = \sum_{i=1}^{N_1(\Lambda(t))} F_0(h_i)\, 1_{[\tau_{i0}, \tau_{i1})}(t).$$

Соответственно, изменение цены за время T равно

$$X(T) = \frac{1}{m}\int_0^T \int_0^t F(u)\,dudt = \sum_{i=1}^{N_1(\Lambda(T))} X_i(T), \tag{2}$$

где

$$X_i(T) = \frac{1}{m}\int_0^T \int_0^t F_0(h_i)\,1_{[\tau_{i0},\tau_{i1})}(u)\,dudt.$$

Таким образом, изменение цены за время T складывается из индивидуальных изменений $X_i(T)$, порожденных приходом соответствующих заказов.

Изучим свойства суммы в (2). Внутренний интеграл в выражении для $X_i(T)$ считается явно

$$\begin{aligned} X_i(T) &= \frac{F_0(h_i)}{m}\int_0^T [t\wedge\tau_{i1} - t\wedge\tau_{i0}]\,dt = \\ &= \frac{F_0(h_i)}{m}\int_0^T [t\wedge(\tau_{i0}+\eta_i) - t\wedge\tau_{i0}]\,dt. \end{aligned}$$

Случайные величины $\{X_i(T),\ i=1,2,...\}$ не являются независимыми, но суммы в (2) можно представить в виде сумм независимых случайных величин. В самом деле, по известному свойству пуассоновского потока распределение вектора $\{\tau_{10},...,\tau_{n0}\}$ при условии $N_1(\Lambda(T)) = n$ есть распределение вариационного ряда выборки из n независимых случайных величин, равномерно распределенных на $[0,\Lambda(T)]$. Ну, а поскольку от перемены мест слагаемых сумма не меняется, будем далее считать, что в каждой из сумм (2) τ_{i0} независимы, равномерно распределенны на $[0,\Lambda(T)]$. Тогда $\{X_i(T),\ i=1,2,...\}$ также независимы.

Следующая лемма устанавливает асимптотические свойства моментов $X_i(T)$ которые нам потребуются в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть с.в. ξ равномерно распределена на $[0,T]$, η_0 не зависит от ξ и имеет экспоненциальное распределение с параметром μ, $\eta = min(\xi,\eta_0)$,*

$$s = \int_0^T [t\wedge(\xi+\eta_0) - t\wedge\xi]\,dt. \tag{3}$$

Тогда

$$s \stackrel{d}{=} \eta\left(\xi - \frac{\eta}{2}\right)$$

и

$$\lim_{\mu\to\infty}\mu\mathbb{E}s = \frac{T}{2},\ \lim_{\mu\to\infty}\mu^2\mathbb{E}s^2 = \frac{2}{3}T^2,\ \lim_{\mu\to\infty}\mu^2\mathbb{D}s^2 = \frac{5}{12}T^2.$$

Доказательство. Положим $\widehat{\eta} = \min(T-\xi,\eta_0)$. Тогда непосредственное вычисление интеграла (3) дает

$$s = \frac{1}{2}\widehat{\eta}^2 + \widehat{\eta}(T-\xi-\widehat{\eta}) = \widehat{\eta}\left(T-\xi-\frac{\widehat{\eta}}{2}\right).$$

Заметим, что ξ и $T-\xi$ распределены одинаково и не зависят от η_0. Поэтому одновременная замена $T-\xi$ на ξ в определении $\widehat{\eta}$ и последней формуле не изменит распределения s, а $\widehat{\eta}$ перейдет в η. Получаем

$$s \stackrel{d}{=} \eta\left(\xi - \frac{\eta}{2}\right),$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\xi^k\eta^n &= \frac{1}{T}\int_0^T x^k dx\left[\int_x^\infty x^n\mu e^{-\mu y}dy + \int_0^x y^n\mu e^{-\mu y}dy\right] = \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T x^k dx\left[x^n e^{-\mu x} - \mu e^{-\mu y}\left(\sum_{i=0}^n \frac{i!C_n^i}{\mu^{i+1}}y^{n-i}\right)\Bigg|_0^x\right] = \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T x^k dx\left[x^n e^{-\mu x} - \mu e^{-\mu x}\left(\sum_{i=0}^n \frac{i!C_n^i}{\mu^{i+1}}x^{n-i}\right) + \frac{n!}{\mu^n}\right] = \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T x^k\left[\frac{n!}{\mu^n} - \mu\left(\sum_{i=1}^n \frac{i!C_n^i}{\mu^{i+1}}x^{n-i}\right)e^{-\mu x}\right]dx = \\
&= \frac{n!}{\mu^n}\frac{T^k}{k+1} - \frac{\mu}{T}\int_0^T x^k\left(\sum_{i=1}^n \frac{i!C_n^i}{\mu^{i+1}}x^{n-i}\right)e^{-\mu x}dx = \frac{n!}{\mu^n}\frac{T^k}{k+1} + o\left(\frac{1}{\mu^n}\right).
\end{aligned}$$

Следовательно

$$\frac{n!}{\mu^n}\frac{T^k}{k+1}\mathbb{E}s = \mathbb{E}\eta\left(\xi - \frac{\eta}{2}\right) = \frac{T}{2\mu} + o\left(\frac{1}{\mu}\right), \mu\to\infty,$$

$$\mathbb{E}s^2 = \mathbb{E}\eta^2\left[\xi^2 - \xi\eta + \frac{\eta^2}{4}\right] = \frac{2}{3}\frac{T^2}{\mu^2} + o\left(\frac{1}{\mu^2}\right), \mu\to\infty,$$

$$\mathbb{D}s = \left[\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right)\frac{T^2}{\mu^2} + o\left(\frac{1}{\mu^2}\right)\right] = \frac{5}{12}\frac{T^2}{\mu^2} + o\left(\frac{1}{\mu^2}\right), \mu\to\infty,$$

откуда и следует утверждение леммы. □

Рассмотрим теперь последовательность введенных выше процессов (2)

$$\left\{X_n(t) = \sum_{i=1}^{N_1(\Lambda_n(t))} X_{ni}(t), 0\leqslant t\leqslant T\right\}. \tag{4}$$

Каждому члену последовательности $\{X_n\}$ соответствует свой процесс $\{\Lambda_n(t), 0\leqslant t\leqslant T\}$, параметр μ_n и функция F_{n0}, задающая силу воздействия заказа на цену. При увеличении n будем увеличивать интенсивность входящего потока заказов ($\Lambda_n(T)\Rightarrow\infty$), уменьшать время пребывания заказа в книге ($\mu_n\to\infty$) и влияние отдельного заказа на цену $(F_{n0} = \alpha_n F_0, \alpha_n > 0, \alpha_n \to 0)$. Следующая лемма описывает асимптотические свойства моментов с.в. $X_{n1}(T)$ при указанном изменении параметров. Аргумент T у них одинаков и, для краткости, будем его опускать.

Лемма 2. *Пусть $\mu_n \to \infty$, $\alpha_n \to 0$ и $k_n = \frac{\mu_n^2}{\alpha_n^2}$. Тогда*

1. $k_n \mathbb{E} X_{n1} \to 0$, $k_n \mathbb{D} X_{n1} \to \frac{2}{3}\frac{\overline{F}}{m^2} T^2 \, (n \to \infty)$;
2. *(Условие Линдеберга) для любого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} k_n \mathbb{E}\left[X_{n1}^2 \mathbb{I}\left(|X_{n1}| > \varepsilon\right)\right] = 0,$$

где $\mathbb{I}(A)$ – индикатор события A.

Доказательство. В силу условия (1) $\mathbb{E} X_{n1} = 0$ для любого n, так что в первом утверждении леммы надо проверить лишь соотношение для дисперсий. По лемме 1 X_{n1} представимо в виде $X_{n1} = m^{-1} F_{n0}(h_1) s_n$, где

$$s_n \stackrel{d}{=} \eta_n \left(\xi - \frac{\eta_n}{2}\right), \eta_n = min\left(\xi, \eta_{n0}\right),$$

η_{n0} распределена экспоненциально с параметром μ_n, а h_1, ξ и η_{n0} независимы. Тогда

$$\begin{aligned} k_n \mathbb{D} X_{n1} &= \frac{\mu_n^2}{\alpha_n^2} \mathbb{E} X_{n1}^2 = \mathbb{E}\left[\frac{F_{n0}(h_1)}{m\alpha_n}\right]^2 \mu_n^2 \mathbb{E} s_n^2 = \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{F_0(h_1)}{m}\right]^2 \mu_n^2 \mathbb{E} s_n^2 \to \frac{\overline{F}}{m^2}\frac{2}{3} T^2, \ n \to \infty. \end{aligned}$$

Докажем справедливость второго утверждения. Воспользовавшись приведенным выше представлением для X_{n1}, получаем

$$\frac{\mu_n}{\alpha_n}|X_{n1}| \leqslant \left|\frac{F_0(h_1)}{m}\right| \mu_n \eta_n \xi \leqslant \left|\frac{F_0(h_1)}{m}\right| \mu_n \eta_{n0} \xi \stackrel{d}{=} \left|\frac{F_0(h_1)}{m}\right| \widehat{\eta} \xi,$$

где $\widehat{\eta}$ распределена экспонециально с параметром 1. Распределение случайной величины $Y_n = \left|\frac{F_0(h_1)}{m}\right| \mu_n \eta_{n0} \xi$ не зависит от n и, согласно 1, имеет конечный второй момент. Поэтому

$$\begin{aligned} k_n \mathbb{E} X_{n1}^2 \mathbb{I}\left(|X_{n1}| > \varepsilon\right) &= k_n \mathbb{E} X_{n1}^2 \mathbb{I}\left(\sqrt{k_n}\,|X_{n1}| > \sqrt{k_n}\varepsilon\right) \leq \\ &\leqslant \mathbb{E} Y_n^2 \mathbb{I}\left(|Y_n| > \sqrt{k_n}\varepsilon\right) = \mathbb{E} Y_1^2 \mathbb{I}\left(|Y_1| > \sqrt{k_n}\varepsilon\right). \end{aligned}$$

Последнее математическое ожидание стремится к нулю при $n \to \infty$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости. □

Воспользуемся теперь доказанной в работе [3] функциональной центральной предельной теоремой, устанавливающей для процессов вида (4) условия сходимости к некоторому предельному процессу X в пространстве Скорохода $\mathcal{D} = (D[0,1], d_0)$ (см. [4, Глава 3]).

Теорема 1. *([3]) Пусть для некоторой неограниченно возрастающей последовательности чисел $\{k_n\}_{n\geqslant 1}$ выполнены условия*

1. *существуют числа* $a \in \mathbb{R}$ *и* $\sigma > 0$*, такие что*

$$k_n \mathbb{E} X_{n1} \to a,\ k_n \mathbb{D} X_{n1} \to \sigma^2\ (n \to \infty)\,;$$

2. *(условие Линдеберга) для любого* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} k_n \mathbb{E}\left[(X_{n1} - a_n)^2 \mathbb{I}\left(|X_{n1} - a_n| > \varepsilon\right)\right] = 0,$$

где $\mathbb{I}\,(A)$ *индикатор события* $A,\ a_n = \mathbb{E} X_{n1}$;

3. *существует безгранично делимая случайная величина* U*, такая что* $\mathbb{P}\,(U = 0) < 1,\, \mathbb{P}\,(U \geqslant 0) = 1, \mathbb{E} U^2 < \infty$ *и*

$$k_n^{-1} \Lambda_n\,(1) \Rightarrow U, n \to \infty;$$

4. $$\sup_n k_n^{-2} \mathbb{E} \Lambda_n\,(1)^2 < \infty.$$

Тогда обобщенные процессы Кокса $\{X_n\}$ *слабо сходятся в пространстве Скорохода* $\mathcal{D}$ *к процессу Леви* X*, такому, что*

$$X\,(1) \stackrel{d}{=} \sigma \sqrt{U} N\,(0,1) + aU,$$

где $N\,(0,1)$ *– случайная величина со стандартным нормальным распределением, независимая от* U*.*

Первые два условия теоремы выполняются для последовательности $\left\{k_n = \frac{\mu_n^2}{\alpha_n^2}\right\}$ согласно лемме 2. Таким образом, достаточно наложить условия лишь на стохастическую интенсивность входящего потока заказов чтобы была справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\mu_n \to \infty,\ \alpha_n \to 0,\ k_n = \frac{\mu_n^2}{\alpha_n^2},\ \sup_n k_n^{-2} \mathbb{E} \Lambda_n\,(1)^2 < \infty$ *и существует безгранично делимая случайная величина* U*, такая что*

$$\mathbb{P}\,(U = 0) < 1, \mathbb{P}\,(U \geqslant 0) = 1, \mathbb{E} U^2 < \infty$$

и

$$k_n^{-1} \Lambda_n\,(1) \Rightarrow U, n \to \infty.$$

Тогда обобщенные процессы Кокса $\{X_n\}$ *слабо сходятся в пространстве Скорохода* $\mathcal{D}$ *к процессу Леви* X*, такому, что*

$$X\,(1) \stackrel{d}{=} \sigma \sqrt{U} N\,(0,1)\,,$$

где $\sigma = \frac{T}{m}\sqrt{\frac{2\overline{F}}{3}}$*, а* $N\,(0,1)$ *– случайная величина со стандартным нормальным распределением, независимая от* U*.*

Таким образом, если входящий поток заказов пуассоновский с интенсивностью $\Lambda_n(1) = k_n$ п.н., то последовательность процессов $\{X_n\}$ сходится к винеровскому процессу. А если U имеет гамма распределение, то мы получаем в пределе гамма дисперсионный (variance gamma) процесс [5]. Большое количество примеров входящих потоков, удовлетворяющих условиям теоремы, приведено в работе [6].

Заключение

Мы предложили модель механизма влияния поступающих заказов на цену актива. Показали, что справедлива функциональная предельная теорема, позволяющая при высокой интенсивности входящего потока аппроксимировать процесс цены процессом Леви, приращения которого являются смесью нормальных законов.

Список литературы

[1] Balasanov Y., Doynikov A., Lavrent'ev V., Nazarov L. Estimating risk of dynamic trading strategies from high frequency data flow // Proc. of the 15th Industrial Conference on Data Mining. Hamburg, Germany, 2015. (в печати)

[2] Kukanov A. Stochastic Models of Limit Order Markets. Ph.D. Thesis. Columbia University, 2013. 131 p.

[3] Кащеев Д.Е. Моделирование динамики финансовых временных рядов и оценивание производных ценных бумаг: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Тверь, 2001. 191 с.

[4] Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977. 353 с.

[5] Madan D., Carr P, Chang E. The variance gamma process and option pricing // European Finance Review. 1998. Vol. 2. Pp. 79–105.

[6] Королев В.Ю. Вероятностно-статистический анализ хаотических процессов с помощью смешанных гауссовских моделей. Декомпозиция волатильности финансовых индексов и турбулентной плазмы. М.: ИПИ РАН, 2007. 363 с.

Библиографическая ссылка

Лаврентьев В.В., Назаров Л.В. Процесс движения цены, порожденный непрерывной моделью книги заказов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 4. С. 55–63.

Сведения об авторах

1. **Лаврентьев Виктор Владимирович**
научный сотрудник лаборатории статистического анализа факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова.

Россия, 119991 ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК. E-mail: lavrent@cs.msu.ru.

2. **Назаров Леонид Владимирович**
старший научный сотрудник лаборатории статистического анализа факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова.

Россия, 119991 ГСП-1, г. Москва, Ленинские горы, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК. E-mail: nazarov@cs.msu.ru.

THE PROCESS OF PRICE MOVEMENT GENERATED BY THE CONTINUOUS ORDER BOOK MODEL

Lavrentyev Victor Vladimirovich
Researcher at Laboratory of Statistical Analysis, Computational Mathematics and Cybernetics faculty, Lomonosov Moscow State University.
Russia, 119991 GSP-1, Moscow, Leninskiye gory, Lomonosov MSU.
E-mail: lavrent@cs.msu.ru

Nazarov Leonid Vladimirovich
Senior researcher at Laboratory of Statistical Analysis, Computational Mathematics and Cybernetics faculty, Lomonosov Moscow State University.
Russia, 119991 GSP-1, Moscow, Leninskiye gory, Lomonosov MSU.
E-mail: nazarov@cs.msu.ru

Received 27.08.2015, revised 10.09.2015.

The limit order book model with the option of setting order at arbitrary price is suggested. The mechanism of the effect of incoming orders on the asset price is introduced. The functional limit theorem is derived for the price process with high intensity order flow.

Keywords: limit order book model, price process, functional limit theorem.

Bibliographic citation

Lavrentyev V.V., Nazarov L.V. The process of price movement generated by the continuous order book model. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2015, no. 4, pp. 55–63. (in Russian)