СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 519.6

МОДЕЛЬ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЭШЕЛОНИРОВАННОЙ ПРОТИВОВОЗДУШНОЙ ОБОРОНЫ

Перевозчиков А.Г.[*], Лесик И.А.[,***], Яночкин И.Е.[**]**
[*]Тверской ИнноЦентр
[**]ОАО «НПО РусБИТех», г. Тверь
[**]Кафедра математической статистики и системного анализа

Поступила в редакцию 08.12.2015, после переработки 11.12.2015.

Рассматривается простейшая модель эшелонированной системы противовоздушной обороны (ПВО). Дополнительно к предыдущей работе авторов на эту тему учитываются вероятности обстрела цели на каждом рубеже, определяемые исходя из модели системы массового обслуживания (СМО) с отказами. Количество каналов определяется числом средств ПВО, назначенных для действия на данном рубеже и их канальностью (по целям). Это позволяет избавиться от зон нечувствительности ранее предложенной кусочно-линейной (по средствам) модели определения вероятности обстрела в тех областях, где она постоянна. Известно, что полученная вероятность обстрела, выражаемая формулой Эрланга, аппроксимируется отношением двух нормальных функции распределения. В результате модель становится нелинейной, что отражает объективно нелинейный характер процесса преодоления эшелонированной ПВО.

Ключевые слова: дискретное оптимальное управление, условия дифференцируемости критерия, сопряженная система, структура градиента критерия, осреднение правых частей системы, структура производных осредненных функций, комбинированный метод проекции градиента и метод Поляка, рандомизация комбинированного метода градиентного спуска, стохастический градиент осредненной задачи, сходимость рандомизированной процедуры почти наверное.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 4. С. 65–83.

Введение

Рассматривается простейшая модель эшелонированной системы противовоздушной обороны (ПВО) на заданном направлении. Эта модель представляет собой частный случай задачи дискретного оптимального управления (ОПУ) терминального типа и может быть решена методом градиентного спуска. Главной проблемой является недифференцируемость липшицевых функций в правых частях уравнения движения и их производных по совокупности переменных, что делает некорректным использование классических результатов о дифференцируемости терминального критерия и построения его градиента на основе сопряженной системы.

В предыдущей работе авторов было предложено использовать процедуру осреднения функций в правых частях уравнения движения по совокупности переменных в малой окрестности, радиус которой h считается малым параметром. В результате указанные функции становятся дифференцируемыми по совокупности переменных и для решения полученной аппроксимирующей задачи можно использовать метод градиентного спуска. Критерий полученной задачи аппроксимирует исходный критерий с точностью $O(h)$ и, следовательно, полученная таким образом задача аппроксимирует исходную задачу по значению с такой же точностью. Для того, чтобы избежать вычисления интегралов от правых частей системы предложенную процедуру рекомендовалось рандомизировать, вводя в правую часть основной и сопряженной системы соответствующие случайные возмущения по совокупности аргументов. По вычислительной сложности предложенный метод стохастического градиентного спуска будет эквивалентен методу градиентного спуска для исходной задачи, но в отличие от него корректен.

В настоящей работе дополнительно учитываются вероятности обстрела цели на каждом рубеже, определяемые исходя из модели системы массового обслуживания (СМО) с отказами. Количество каналов определяется числом средств ПВО, назначенных для действия на данном рубеже и их канальностью (по целям). Это позволяет избавиться от зон нечувствительности ранее предложенной кусочно-линейной (по средствам) модели определения вероятности обстрела в тех областях, где она постоянна. Известно, что полученная вероятность обстрела, выражаемая формулой Эрланга, аппроксимируется отношением двух нормальных функции распределения. В результате модель становится нелинейной, что отражает объективно нелинейный характер процесса преодоления эшелонированной ПВО.

1. Постановка общей задачи управления эшелонированной ПВО

Пусть $T_{\text{нал}}$ – общая продолжительность налета, x_t – количество средств воздушного нападения (СВН) противника, прорвавшихся к $t-$му рубежу эшелонированной ПВО на заданном направлении, $t = 0, 1, ..., T - 1$. Далее, пусть u_t – число средств ПВО, которые действуют по противнику на t-м рубеже обороны,

$$\sum_{t=0}^{T-1} u_t \leqslant U, \tag{1}$$

где U – общее количество однородных в простейшем случае средств ПВО.

Предположим, что каждое средство ПВО может действовать только на одном рубеже и воздействовать лишь по одной цели, и обратно – на каждую цель на данном рубеже может назначаться только одно средство ПВО (одноканальность по целям). Более сложные случаи, когда одно средство ПВО может действовать по нескольким целям (многоканальность по целям), на нескольких рубежах и по одной цели может назначаться несколько средств ПВО, предполагается рассмотреть в последующих работах.

Пусть $\tau_{\text{Ц}}^t$ – среднее время цикла стрельбы одного средства ПВО для обстрела цели на t−ом рубеже. Тогда плотность стрельбы есть величина $\mu_t = 1/\tau_{\text{Ц}}^t$. Обозначим через $\lambda_t = x_t/T_{\text{нал}}$ – соответствующую плотность потока целей на t−ом рубеже, а через $\alpha_t = \lambda_t/\mu_t = x_t\tau_{\text{Ц}}^t/T_{\text{нал}} = x_t/r_t$ – их отношение. Здесь $r_t = T_{\text{нал}}/\tau_{\text{Ц}}^t$ – предельное количество воздействий по противнику одним средством ПВО. Тогда вероятность обстрела P_t^0 одного СВН на t-ом рубеже может при обычных предположениях пуассоновости всех потоков событий может быть получена по формуле Эрланга для u_t-канальной СМО с отказами [9]:

$$P_t^0 = \frac{R(u_t - 1, \alpha_t)}{R(u_t, \alpha_t)}.$$

Здесь

$$R(n, \alpha) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}$$

есть функция Пуассоновского распределения, табулированная в [9]. При $\alpha > 20$ функцию $R(m, \alpha)$ можно аппроксимировать нормальной функцией распределения [9]:

$$R(m, \alpha) \approx \Phi * \left(\frac{m + 0,5 - \alpha}{\sqrt{\alpha}} \right),$$

где

$$\Phi * (x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \tag{2}$$

есть функция нормального распределения, табулированная в [9].

Отсюда получаем следующую приближенную формулу для вероятности обстрела одной цели на t−ом рубеже в стохастической модели СМО (далее для краткости – стохастической модели):

$$P_t^0 = P_t^0(x_t, u_t) \approx \Phi * \left(\frac{u_t - 0,5 - x_t/r_t}{\sqrt{x_t/r_t}} \right) / \Phi * \left(\frac{u_t + 0,5 - x_t/r_t}{\sqrt{x_t/r_t}} \right). \tag{3}$$

В отличие от исходной формулы Эрланга, аппроксимирующая функция определена для нецелых значений u_t и непрерывно дифференцируема по u_t, что будет важно дальше при построении градиентных методов оптимизации.

Величина $\alpha_t = x_t/r_t$ имеет смысл минимального количества средств ПВО на t−ом рубеже, при котором все цели будут обстреляны.

Для сравнения в предыдущей работе была фактически получена формула для вероятности обстрела одной цели на t−ом рубеже в общей детерминированной модели (далее для краткости – детерминированной модели):

$$P_t^0 = P_t^0(x_t, u_t) = \min(1, \frac{r_t u_t}{x_t}) = \min(1, \frac{u_t}{\alpha_t} t). \tag{4}$$

Пример 1. Предположим, что $\alpha_t = 20$, то есть нужно не меньше 20 средств ПВО, чтобы все цели были обстреляны в детерминированной модели. Спрашивается, какова при этом будет вероятность обстрела в стохастической модели n−канального СМО? Некоторое представление об указанных вероятностях дает Таблица 1.

Таблица 1: Вероятность обстрела в стохастической модели $n-$канального СМО

количество средств ПВО u_t	0	3	5	10	20	∞
P_t^0 **в стохастической модели**	0	0,00	0,26	0,55	0,85	1
P_t^0 **в детерминированной модели**	0	0,15	0,25	0,50	1,00	1

Видно, что при $n = 20$ вероятность обстрела будет монотонной, не выпуклой и не вогнутой функцией от количества средств ПВО u_t.

Возвратимся к простейшей модели СМО системы эшелонированной ПВО. Среднее число средств, преодолевших $t-$й рубеж, можно определить теперь по формуле:

$$\begin{aligned} & x_0 = X, x_{t+1} = x_t(1 - p_t P_t^0(x_t, u_t)) \approx \\ & \approx x_t \left(1 - p_t \Phi * \left(\frac{u_t - 0{,}5 - x_t/r_t}{\sqrt{x_t/r_t}}\right) / \Phi * \left(\frac{u_t + 0{,}5 - x_t/r_t}{\sqrt{x_t/r_t}}\right)\right), t = 0, 1, ..., T-1, \end{aligned} \tag{5}$$

где X – общее количество однородных в простейшем случае СВН противника, действующих на данном направлении.

Обозначим функцию в правой части полученного уравнения через $F_t(x_t, u_t)$. Здесь p_t – вероятность поражения средства воздушного нападения противника одним воздействием t-м рубеже, $q_t = 1 - p_t$ – соответствующая вероятность непоражения. Требуется так распределить средства ПВО по рубежам, чтобы минимизировать количество x_T средств воздушного нападения (СВН) противника, преодолевших все рубежи обороны на данном направлении.

Такие задачи преодоления противовоздушной обороны с использованием функций минимума для вероятности обстрела типа (4) впервые были поставлены в [1]. Именно в [1] изучалась задача распределения ресурсов по направлениям на одном рубеже обороны, которую в наших обозначениях можно поставить следующим образом. Требуется минимизировать общее количество прорвавшихся СВН противника:

$$\sum_{t=0}^{T-1} \max\{0, x_t - p_t u_t\}$$

по всевозможным распределениям $[u_t]$ средств ПВО по направлениям, удовлетворяющих условию (1). Здесь $x_t \geqslant 0$ – количество СВН противника, действующих на направлении $t = 0, 1, ..., T-1$, так что выполняется условие:

$$\sum_{t=0}^{T-1} x_t = X,$$

где X – общее количество СВН противника.

Для этой задачи в [1] вычислены соответствующие минимакс и максимин, представляющие собой гарантированные результаты сторон и получены условия информированности сторон, при которых минимакс будет решением двусторонней игры двух лиц. Это условие состоит в том, что противник еще до удара знает распределение средств ПВО по направлениям, а оборона будет иметь информацию о распределении СВН противника лишь с началом и в ходе удара. В этих условиях противнику выгодно сосредоточить все силы на наименее защищенном направлении, а обороне – распределить их возможно более равномерно по направлениям.

Задача оптимального управления (ОПУ) (1), (5) уточняет описанную задачу распределения ресурсов обороны на заданном направлении по рубежам и использует более адекватную нелинейную модель СМО (3) для определения вероятности обстрела цели на каждом рубеже.

2. Дальнейшая формализация задачи

Введем искусственную фазовую переменную $x_t^0 = u_t$ с начальным условием:

$$x_0^0 = 0, \tag{6}$$

и уравнением движения:

$$x_{t+1}^0 = x_t^0 + u_t, t = 0, ..., T-1, \tag{7}$$

тогда ограничение (1) превращается в фазовое ограничение:

$$0 \leqslant x_T^0 \leqslant U. \tag{8}$$

Критерием служит терминальный функционал:

$$I\left([u_t]\right) = \Phi(x_T) = -x_T \to \max, \tag{9}$$

который следует максимизировать по всевозможным управлениям

$$[u_t] = (u_0, u_1, ..., u_{T-1}), u_t \in V_t = [0, v_t], t = 0, 1, ..., T-1. \tag{10}$$

Поставленная простейшая задача управления системой эшелонированной ПВО (5)-(10) является терминальной задачей дискретного оптимального управления с фазовым ограничением (8). Фазовые ограничения считаются тяжелыми для построения численным методов оптимизации. Поэтому мы предпочитаем смотреть на нее как на конечномерную задачу математического программирования. К полученной задаче математического программирования можно применить метод обобщенных градиентов [3] типа Поляка [5], который легко справляется со сложными ограничениями типа неравенств. В свою очередь условия дифференцируемости и вид градиента критерия (9) мы возьмем с учетом специфики его определения в задачах дискретного ОПУ [6].

Задача дискретного оптимального управления (ОПУ), частным случаем которой является простейшая задача управления эшелонированной системой ПВО, может быть записана в виде:

$$\begin{array}{l} I\left([u_t]\right) = \sum\limits_{t=0}^{T-1} F_t^0(x_t, u_t) + \Phi(x_T) \to \max; \\ x_{t+1} = F_t(x_t, u_t), t = 0, 1, ..., T-1; x_0 = a; \\ x_t \in E^n, [u_t] = (u_0, u_1, ..., u_{T-1}), u_t \in V_t \subset E^r, \\ t = 0, 1, ..., T-1; F_t = (F_1^1, ..., F_t^n). \end{array} \tag{11}$$

Функции $\Phi, F_t, F_t^0, t=0,1,...,T-1$, в общем случае предполагаются непрерывными вместе со своими производными по x, u, множества допустимых управляющих воздействий V_t- выпуклы, замкнуты и ограничены. Кроме того функции F_t предполагаются липшицевыми по совокупности переменных в области определения с единой константой $L>0$.

3. Метод градиентного спуска для решения поставленной задачи

Введем функцию Гамильтона:

$$H_t(x_t,\psi_t,u_t) = \langle \psi_t, F_t(x_t,u_t)\rangle\,, \tag{12}$$

где $\psi_t \in E^n$ – сопряженные переменные, $\langle .,.\rangle$ – скалярное произведение векторов в E^n.

Введем сопряженную систему:

$$\psi_{t-1} = \frac{\partial H_t(x_t,\psi_t,u_t)}{\partial x}, t=T-1,...,1; \psi_{T-1} = \frac{\partial \Phi(x_T)}{\partial x}. \tag{13}$$

Через $L_2^T[0,T]$ обозначим гильбертово пространство вектор-функций дискретной переменной $[u_t]=(u_0,u_1,...,u_{T-1})$ со скалярным произведением и нормой, заданными, соответственно, формулами:

$$\langle [u_t]\,,[v_t]\rangle_{L_2} = \sum_{t=0}^{T-1}\langle u_t,u_t\rangle_{E^r}; \|[u_t]\| = \left(\sum_{t=0}^{T-1}|u_t|_{E^r}^2\right)^{1/2}.$$

Тогда при сделанных предположениях критериальная функция в (11) непрерывна и дифференцируема в норме $L_2^T[0,T]$, причем ее градиент $I'([u_t])$ представляется в виде [6]:

$$I'([u_t]) = \{H_{\,tu}(x_t,\psi_t,u_t), t=0,1,...,T-1\} \in L_2^T[0,T], \tag{14}$$

где x_t,ψ_t – решения основной и сопряженной системы, соответствующие выбранному управлению $[u_t]$.

В частности для простейшей модели системы эшелонированной ПВО имеем:

$$\begin{aligned}&F_t^0 = 0;\\ &\Phi \equiv -x_T;\\ &x_t \in E^1, u_t\in E^1; V_t=[0,v_t]\subset E^1;\\ &t=0,1,...,T-1.\end{aligned}$$

Функция Гамильтона будет иметь вид:

$$H_t(x_t,\psi_t,u_t) = \psi_t F_t(x_t,u_t) =$$

$$= \psi_t x_t\left(1 - p_t\Phi*\left(\tfrac{u_t-0{,}5-x_t/r_t}{\sqrt{x_t/r_t}}\right)/\Phi*\left(\tfrac{u_t+0{,}5-x_t/r_t}{\sqrt{x_t/r_t}}\right)\right),\ t=0,1,...,T-1.$$

Сопряженная система будет иметь вид:

$$\psi_{t-1} = \frac{\partial H_t(x_t,\psi_t,u_t)}{\partial x} = \psi_t F_{tx}(x_t,u_t) =$$

$$= \psi_t \left(1 - p_t \Phi * \left(\frac{u_t - 0{,}5 - x_t/r_t}{\sqrt{x_t/r_t}} \right) / \Phi * \left(\frac{u_t + 0{,}5 - x_t/r_t}{\sqrt{x_t/r_t}} \right) \right) +$$
$$+ \frac{\psi_t p_t}{2\sqrt{2\pi x_t/r_t}} \left\{ \left[e^{-\frac{(u_t - 0.5 - x_t/r_t)^2}{2x_t/r_t}} (u_t - 0,5 + x_t/r_t) \Phi * \left(\frac{u_t + 0{,}5 - x_t/r_t}{\sqrt{x_t/r_t}} \right) \right] - \right.$$
$$\left. - \left[\Phi * \left(\frac{u_t - 0{,}5 - x_t/r_t}{\sqrt{x_t/r_t}} \right) e^{-\frac{(u_t + 0{,}5 - x_t/r_t)^2}{2x_t/r_t}} (u_t + 0,5 + x_t/r_t) \right] \right\} / \left(\Phi * \left(\frac{u_t + 0{,}5 - x_t/r_t}{\sqrt{x_t/r_t}} \right) \right)^2.$$

Компоненты градиента (14) имеют вид:

$$H_{tu}(x_t, \psi_t, u_t) = \psi_t F_{tu}(x_t, u_t) =$$
$$= -\frac{\psi_t x_t p_t}{\sqrt{2\pi x_t/r_t}} \left\{ \left[e^{-\frac{(u_t - 0.5 - x_t/r_t)^2}{2x_t/r_t}} \Phi * \left(\frac{u_t + 0{,}5 - x_t/r_t}{\sqrt{x_t/r_t}} \right) \right] - \right.$$
$$\left. - \left[\Phi * \left(\frac{u_t - 0{,}5 - x_t/r_t}{\sqrt{x_t/r_t}} \right) e^{-\frac{(u_t + 0{,}5 - x_t/r_t)^2}{2x_t/r_t}} \right] \right\} / \left(\Phi * \left(\frac{u_t + 0{,}5 - x_t/r_t}{\sqrt{x_t/r_t}} \right) \right)^2. \quad (15)$$

3.1 Комбинированный метод проекции градиента и Поляка

Этот метод формально применяется к задаче на минимум, поэтому изменим знак критерия (9) на противоположный. Имея градиент (15), для решения простейшей задачи можно теперь воспользоваться комбинированным методом проекции градиента и Поляка [4] с программным шагом:

$$u_t(k+1) = \begin{cases} P(u_t(k) - a_k H_{u_t}(x_t(k), \psi_t(k), u_t(k)), G(u(k)) \leqslant 0; \\ P(u_t(k) - a_k G_{u_t}(u(k)); G(u(k)) > 0; \end{cases} ; t = 0, ..., T-1,$$
$$k = 1, 2, ... \quad (16)$$

где k – номер шага; $a_k = Dk^{-s}$ – программный шаг метода, $1/2 < s < 1$, – параметр, например $s = 3/4$; D – характерный размер множества допустимых решений задачи, например оценка диаметра; $G(u) = \sum\limits_{t=0}^{T-1} u_t - U$ – функция в ограничении (1) задачи; $G_u = (G_{u_0}, ..., G_{u_{T-1}})$ – ее градиент;

$$P(u_t) = \begin{cases} u_t, u_t \geqslant 0, \\ 0, \end{cases} = \max(u_t; 0) \quad (17)$$

– оператор проектирования на неотрицательный луч пространства управляющих воздействий u^t. Предполагается для простоты, что $v_t = \infty$ в (11). В общем случае необходимо проектировать на отрезок $[0, v_t]$.

Пример 2. Сделать два шага метода Поляка для начального управления $u_t(1) \equiv 8$, считая, что $x_0 = 17,27; T = 3; D = U = 24; p_t = 0,7; b_t = 1$ и решается задача минимизации критерия $I([u_t]) = x_T$. Решение представлено в Таблице 2.

4. Устойчивость задачи дискретного ОПУ

Введем функции:

$$\begin{aligned} &F^0(U, u) = I([u_t]); u = [u_t]; \\ &F^1(U, u) = \sum_{t=0}^{T-1} u_t - U; \\ &F^j(U, u) = -u_{j-2}; j = 2, ..., T+1, \end{aligned} \quad (18)$$

Таблица 2: Решение задачи из Примера 2

№	t	0	1	2	Примечания
1	$u_t(1)$	8	8	8	$u_t(1) \equiv 8; G(u(1)) \leqslant 0$
	$\bar{u}^t_-$	-2,35	-0,98	0,69	$\bar{u}^t_- = (u_t - 0,5 - x_t/r_t)/\sqrt{x_t/r_t}$
	Φ^*_-	0,0095	0,1635	0,7549	$\Phi^*_- = \Phi * (\bar{u}^t_-)$
	$\bar{u}^t_+$	-2,11	-0,67	1,10	$\bar{u}^t_+ = (u_t + 0,5 - x_t/r_t)/\sqrt{x_t/r_t}$
	Φ^*_+	0,0175	0,2514	0,8643	$\Phi^*_+ = \Phi * (\bar{u}^t_+)$
2	x_t	17,27	10,71	5,83	$x_{t+1} = x_t(1 - p_t\Phi^*_-/\Phi^*_+)$
	$\bar{p}^t$	0,62	0,54	0,39	$\bar{p}^t = 1 - p_t\Phi^*_-/\Phi^*_+$
	$(\bar{u}^t_-)^2$	5,53	0,96	0,48	$(\bar{u}^t_-)^2 = (u_t - 0,5 - x_t/r_t)^2/(x_t/r_t)$
	u^t_-	-9,77	-3,21	1,67	$u^t_- = u_t - 0,5 - x_t/r_t$
	e^t_-	0,06	0,62	0,79	$e^t_- = \exp(-1/2(\bar{u}^t_-)^2)$
	$(\bar{u}^t_+)^2$	4,45	0,46	1,22	$(\bar{u}^t_+)^2 = (u_t + 0,5 - x_t/r_t)^2/(x_t/r_t)$
	u^t_+	-8,77	-2,21	2,67	$u^t_+ = u_t + 0,5 - x_t/r_t$
	e^t_+	0,11	0,80	0,54	$e^t_+ = \exp(-1/2(\bar{u}^t_+)^2)$
3	ψ_t	0,16	0,39	1,00	$\psi_{t-1} = \psi_t[\bar{p}^t + p_t/(2\sqrt{2\pi x_t/r_t})\times$ $\times\{e^t_-\bar{u}^t_-\Phi^*_+ - \Phi^*_-e^t_+\bar{u}^t_+\}/(\Phi^*_+)^2$
4	H_{tu}	-0,02	-0,07	-0,12	$H_{tu} = -\psi_t x_t p_t/(2\sqrt{2\pi x_t/r_t})\times$ $\times\{e^t_-\Phi^*_+ - \Phi^*_-e^t_+\}/(\Phi^*_+)^2$
5	$\bar{u}_t(2)$	8,565	9,7185	10,935	$\bar{u}_t(2) = u_t(1) - a_1H_{tu}$
6	$u_t(2)$	8,565	9,7185	10,935	$u_t(2) = \max(u_t(1); 0); G(u(2) > 0$
7	G_{ut}	1	1	1	$G_{ut} \equiv 1$
8	$\bar{u}_t(3)$	-5,71	-4,55	-3,34	$\bar{u}_t(3) = u_t(2) - a_2G_{ut}$
9	$u_t(3)$	0,00	0,00	0,00	$u_t(3) = \max(u_t(2); 0); G(u(3) \leqslant 0$

и рассмотрим функцию минимума со связанными переменными:

$$q(U) = \min_{u \in W(U)} F^0(U, u), \tag{19}$$

где

$$W(U) = \left\{ u \in E^T \left| F^j(U, u) \leqslant 0, j = 1, 2, ..., T + 1 = l \right. \right\},$$

на множестве:

$$Z = [0, V]; V > 0.$$

Тогда множество $Z \subset E_1$ будет регулярно в смысле [10], множества $Z, W(U), U \in Z$ – ограничены, функции F^j непрерывны вместе с F^j_U, F^j_u на $Z' \times E^T, j = 0, 1, ..., l$,где $Z' \supset Z$- некоторое ограниченное открытое множество. Для $j = 0$ непрерывность F^j_U, F^j_u по совокупности переменных следует из дифференцируемости по u критерия в поставленной задаче дискретного ОПУ и независимости его от U. Для остальных j это видно непосредственно из определения (18).

Кроме того выполнено условие регулярности [11]:

$$F^j_u(U, u), j \in J_0(U, u) \text{ – линейно независимы при любых } U \in Z', u \in \tilde{W}_0(U). \tag{20}$$

Здесь обозначено:

$$J_\tau(U,u) = \left\{ j \in J \left| F^j(U,u) \geqslant -\tau \right.\right\}; \tau \geqslant 0; J = \{1,2,...,l\};$$
$$\tilde{W}_\gamma(U) = \left\{ u \in W(U) \left| F^0(U,u) \leqslant \min_{u \in W(U)} F^0(U,u) + \gamma \right.\right\}; \gamma \geqslant 0.$$

Функция $F^0(U,u)$ – дифференцируема и следовательно липшицева на ограниченном множестве Z', а точечно-множественное отображение $W(U)$ непрерывно по Хаусдорфу на Z', что проверяется непосредственно из его определения. В этих условиях из результатов [11] следует существование производной по любому направлению $e \in E^T$ функции связанного минимума q на Z', причем:

$$\frac{\partial q(U)}{\partial e} = \min_{g \in G(U)} \langle g, e \rangle, \tag{21}$$

где

$$G(U) = co\left\{ g \in E^1 \left| g = F_U^0(U,u) + A*(U,u)F_u^0(U,u), u \in \tilde{W}_0(U) \right.\right\}, \tag{22}$$

co – замыкание выпуклой оболочки множества, * – знак сопряжения, $A(U,u)$: $E^1 \to E^T$ – произвольный линейный оператор (матрица при фиксированных базисах в E^1 и E^T), удовлетворяющий равенству:

$$F_U^{J_0*}(U,u) + F_u^{J_0*}(U,u)A(U,u) = 0. \tag{23}$$

Здесь

$$J_\tau = J_\tau(U,u), F^{J_\tau}(U,u) = \left(F^j(U,u), j \in J_\tau(U,u)\right).$$

Формула (21) позволяет исследовать устойчивость задачи дискретного ОПУ по значению. В [12] было установлено дополнительно к (21), что при сделанных предположениях функция связанного минимума (19) является квазивогнутой, то есть обратной к регулярной по Кларку [10] липшицевой функцией, и (22) представляет собой точное выражение для ее квазидифференциала (множества ее обобщенных градиентов – квазиградиентов).

Из условия (20) следует, что векторы $(\nabla F^j(U,u), j \in J_0(U,u))$ линейно независимы при любых $U \in Z', u \in \tilde{W}_0(U)$. Тогда в качестве оператора A можно взять, например, оператор [12]:

$$A*(U,u) = -F_U^{J_0}\left[F_u^{J_0*}F_u^{J_0}\right]^{-1}F_u^{J_0*}. \tag{24}$$

Пример 3. Вычислить оператор A по формуле (24) и соответствующий ему квазиградиент в формуле (22), считая, что $T = 2$, для двух случаев $a)J_0(U,u) = \{1,3\}, b)J_0(U,u) = \{1\}$.

Решение. В этом случае градиенты функций (18) в ограничениях задачи (19) имеют вид:

$$\nabla F^1 = (-1,1,1)*; \nabla F^2 = (0,-1,0)*; \nabla F^3 = (0,0,-1)*.$$

Оператор A по формуле (24) в случае а) равен:

$$A*(U,u) = -(-1,0)\left[\begin{pmatrix} 1+0 \\ 1-1 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 1+0 \\ 1-1 \end{pmatrix}\right]^{-1} \begin{pmatrix} 1+0 \\ 1-1 \end{pmatrix}^* =$$

$$= -\left(-1,0\right)\begin{pmatrix} +2-1 \\ -1+1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1+1 \\ 0-1 \end{pmatrix} =$$

$$= -(-1,0)\begin{pmatrix} 11 \\ 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = -(-1,0)\begin{pmatrix} 1+0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = -(-1,0) = (1,0).$$

Соответствующий ему квазиградиент в формуле (22) имеет вид:

$$g = F_U^0(U,u) + A*(U,u)F_u^0(U,u) = 0 + (1,0)\begin{pmatrix} H_{0u} \\ H_{1u} \end{pmatrix} = H_{0u}.$$

Оператор A по формуле (24) в случае b) равен:

$$A*(U,u) = -(-1)\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^*\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^* = -\left(-1\right)\left(2\right)^{-1}\left(1,1\right) =$$
$$= -(-1)\,(1/2)\,(1,1) = \tfrac{1}{2}(1,1).$$

Соответствующий ему квазиградиент в формуле (22) имеет вид:

$$g = F_U^0(U,u) + A*(U,u)F_u^0(U,u) = 0 + \frac{1}{2}(1,0)\begin{pmatrix} H_{0u} \\ H_{1u} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}H_{0u} + \frac{1}{2}H_{1u}.$$

5. Задача синтеза группировки ПВО по направлениям

Пусть все параметры, переменные и функции поставленной задачи дискретного ОПУ группировкой ПВО на данном направлении $k = 0,1,...,K-1$ имеют дополнительно соответствующий верхний индекс.

Далее, пусть

$$\sum_{k=0}^{K-1} U^k \leqslant V, U^k \geqslant 0, k = 0,1,...,K-1, \tag{25}$$

где V – общее количество однородных в простейшем случае средств ПВО группировки, а U^k – их количество на k-м направлении.

Введем функции:

$$\begin{aligned} &P^1(U) = \sum_{k=0}^{K-1} U^k - V; \\ &P^i(U) = -U^{i-2}; i = 2,...,K+1; \\ &P(U) = \max_{i=1,...,K+1} P^i(U). \end{aligned} \tag{26}$$

Тогда функция $P : E^K \to E^1$ тоже будет очевидно липшицевой и квазивыпуклой, то есть регулярной по Кларку [10] . Последнее означает, что она дополнительно дифференцируема по направлениям $e \in E^K$, причем справедлива формула:

$$\frac{\partial P(U)}{\partial e} = \max_{r \in \partial P(U)} \langle r, e \rangle\,,$$

где $\partial P(U)$ – дифференциал Кларка (множество квазиградиентов) липшицевой функции $P(.)$ в точке U, которое для функции конечного максимума имеет вид [10]:

$$\partial P(U) = co\left\{r \in E^K \left| r = P_U^i(U), i \in I_0(U)\right.\right\}. \tag{27}$$

Здесь обозначено:

$$I_\nu(U) = \left\{i \in I \left| P^i(U) \geqslant -\nu\right.\right\}; \nu \geqslant 0; I = \{1, 2, ..., K+1\}.$$

Рассмотрим задачу синтеза (в смысле [13]) группировки ПВО:

$$Q(U) = \max_{k=0,..,K-1} q^k(U^K) \to \min_{U \in \Omega}, \tag{28}$$

где $q^k(U^k)$ – функция связанного минимума (19) определенная для каждого направления $k = 0, 1, ..., K$, а Ω – множество решений системы неравенств (25), которое можно представить в форме:

$$\Omega = \left\{U = (U^0, ..., U^{K-1}) \in E^K \left| P(U) \leqslant 0\right.\right\}. \tag{29}$$

Очевидно, что ограниченное и замкнутое множество Ω, заданное условиями (25), удовлетворяет условию регулярности на границе:

$$0 \notin \partial P(U).$$

Замечание 1. Для того, чтобы гарантированный результат обороны представлял минимаксимин (28), достаточно [1] лишь условий информированности сторон, согласно которым оборона знает общее число СВН X (см. (5)) на театре военных действий, но не знает на каком направлении противник будет прорывать оборону и вынуждена равномерно распределять свои силы по направлениям. Зато может оптимально организовать эшелонированную оборону на каждом направлении в расчете на известное максимальное количество средств X, которые могут на нем действовать. При этом нападение знает распределение средств ПВО по направлениям и рубежам и прорывает оборону всеми силами X на одном, наиболее слабом направлении.

6. Сглаживание задачи синтеза

Функции $q^k(U) = q^k(U^k)$ при сделанных предположениях будут липшецевыми функциями от U в некоторой замкнутой окрестности $\bar{\Omega}$ множества Ω с некоторой константой $L > 0$, но вообще говоря, не дифференцируемыми. Поэтому вместе с (28) рассмотрим сглаженную задачу:

$$Q_h(U) = \max_{k=0,..,K-1} q_h^k(U^K) \to \min_{U \in \Omega}. \tag{30}$$

Величина $h > 0$ задает точность аппроксимации функции $q^k(U^k)$ ее осредненной функцией:

$$q_h^k(U^k) = \int\limits_{E^1} q^k(U^k + h\rho)\omega_1\left(|\rho|\right) d\rho. \tag{31}$$

Ядро осреднения здесь определяется, например, по формуле [4]:

$$\omega_1(|\rho|) = \begin{cases} 2^{-1}, \rho \in O_1, \\ 0, \upsilon \notin O_1. \end{cases} \tag{32}$$

Здесь

$$O_1 = \left\{ \rho \in E^1 \, ||\rho| \leqslant 1 \right\}. \tag{33}$$

Известно [4], что осредненная функция от липшицевой функции будет дифференцируемой и справедлива оценка:

$$\left| q_h^k(U) - q^k(U) \right| \leqslant Lh, U \in \bar{\Omega}, \tag{34}$$

откуда следует, что

$$|Q_h(U) - Q(U)| \leqslant Lh, U \in \bar{\Omega}. \tag{35}$$

Последнее влечет за собой неравенство:

$$\left| \min_{U \in \Omega} Q_h(U) - \min_{U \in \Omega} Q(U) \right| \leqslant Lh, \tag{36}$$

то есть решение задачи (30) аппроксимирует решение задачи (28) (по значению) с точностью Lh. Поэтому зафиксируем достаточно малое $h > 0$ и далее будем рассматривать только аппроксимирующую задачу (30).

В результате осреднения функции $q_h^k(U^k)$ становятся дифференцируемыми по U^k, причем производные от средних функций равны среднему от производных:

$$q_{hU}^k(U^k) = \int\limits_{E^1} q_U^k(U^k + h\rho)\omega_1(|\rho|)\, d\rho. \tag{37}$$

Замечание 2. Заметим, что производные от липшицевых функций под интегралами здесь существуют почти всюду и измеримы по теореме Радемахера и, следовательно, интегрируемы в силу ограниченности соответствующей константой Липшица $L > 0$. В точках дифференцируемости они совпадают с обобщенными квазиградиентами (22) квазивогнутой функции минимума со связанными переменными (19), которые будут в этом случае единственными. Поэтому $g^k(U^k + h\rho^k) \in G^k(U^k + h\rho^k)$ будет стохастическим градиентом (в смысле [4]) дифференцируемой функции $q_h^k(U^k)$ в точке U^k. Здесь ρ^k – очередная независимая случайная реализация случайной величины (с.в.), равномерно распределенной (р.р.) на отрезке $[-1, 1]$. Это связано с тем, что множество точек $U^k + h\rho^k$ для которых множество квазиградиентов $G^k(U^k + h\rho^k)$ (22) квазивогнутой функции минимума со связанными переменными (19) не единственно совпадает с множеством точек недифференцируемости функции $q^k(U^k)$[10] и, следовательно, имеет меру нуль на отрезке $[-1, 1]$. И в частности не имеет значения, какой именно обобщенный квазиградиент из множества $G^k(U^k + h\rho^k)$ в этом случае выбрать.

Известно [14], что при сделанных предположениях функция максимума $Q_h(U)$ будет квазивыпуклой, причем ее дифференциал Кларка (множество обобщенных квазиградиентов) определяется формулой:

$$\partial Q_h(U) = co \left\{ \nabla q_h^k(U), k \in \tilde{K}_0(U) \right\}, \tag{38}$$

где

$$\tilde{K}_\varepsilon(U) = \left\{ k \in \{0, ..., K-1\} \middle| q_h^k(U) \geqslant \max_{k=0,...,K-1} q_h^k(U) - \varepsilon \right\}, \varepsilon \geqslant 0. \tag{39}$$

Здесь

$$\nabla q_h^k(U) = q_{hU}^k(U^k) e_k, \tag{40}$$

где $\{e_k, k = 0, ..., K-1\}$ – фиксированный ортонормированный базис в E^K.

Замечание 3. Таким образом, в качестве обобщенных градиентов в методе о.г.с. можно брать любую выпуклую комбинацию градиентов (40):

$$g(U) = \sum_{k \in \tilde{K}_0(U)} \lambda_k q_{hU}^k(U^k) e_k.$$

Наибольший интерес представляет метод скорейшего спуска, когда движение осуществляется по направлению обратному к ближайшему к нулю обобщенному градиенту. Крайние точки (40) дифференциала Кларка лежат на осях и отсекают на них величины:

$$a_k = q_{hU}^k(U^k) < 0, k \in \tilde{K}_0(U). \tag{41}$$

В этом случае можно найти ближайший к нулю обобщенный градиент

$$g*(U) = \sum_{k \in \tilde{K}_0(U)} \lambda_k^* a_k e_k, \tag{42}$$

в аналитическом виде. Действительно, уравнение в отрезках соответствующей гиперплоскости, содержащей дифференциал Кларка, будет иметь вид:

$$\sum_{k \in \tilde{K}_0(U)} U_k / a_k = 1.$$

Соответствующее нормальное уравнение плоскости записывается в виде:

$$\sum_{k \in \tilde{K}_0(U)} U_k n_k - 1 / \sqrt{\sum_{k \in \tilde{K}_0(U)} 1/a_k^2} = 0,$$

где

$$n_k = \frac{1}{a_k} / \sqrt{\sum_{k \in \tilde{K}_0(U)} 1/a_k^2}, k = 0, ..., K-1,$$

есть координаты нормали:

$$n = \sum_{k \in \tilde{K}_0(U)} n_k e_k.$$

Теперь расстояние от начала координат до соответствующей гиперплоскости равно:

$$\rho = 1 / \sqrt{\sum_{k \in \tilde{K}_0(U)} 1/a_k^2},$$

а искомая ближайшая точка имеет вид:

$$g*(U) = \rho n = \sum_{k \in \tilde{K}_0(U)} \frac{e_k}{a_k} / \sum_{k \in \tilde{K}_0(U)} \frac{1}{a_k^2}.$$

Это означает, что весовые коэффициенты угловых точек равны соответственно:

$$\lambda_k^* = \frac{1}{a_k^2} / \sum_{k \in \tilde{K}_0(U)} 1/a_k^2, k \in \tilde{K}_0(U), \tag{43}$$

то есть обратно пропорциональны квадратам величин производных $a_k = q_{hU}^k(U^k) < 0, k \in \tilde{K}_0(U)$.

В [14] (см. также [16],[17]) было показано, что в методе обобщенного градиентного спуска (о.г.с.) для решения задачи (30) множество обобщенных градиентов $\partial Q_h(U)$на $s-$м шаге можно заменить множеством:

$$\partial^{(\varepsilon)} Q_h(U) = co\left\{\nabla q_h^k(U), k \in \tilde{K}_\varepsilon(U)\right\}, \tag{44}$$

при $\varepsilon = \varepsilon_s \to +0$ без потери сходимости метода (по значению) к стационарному множеству задачи (30):

$$A_0^h(0) = \{U \in \Omega \,|0 \in L(U)\},$$

где

$$L(U) = \begin{cases} co[\partial Q_h(U) \cup \partial P(U), U \in Fr\Omega, \\ \partial Q_h(U), U \in Int\Omega. \end{cases} \tag{45}$$

Замечание 4. Если в (39) заменить усредненные функции $q_h^k(U)$ на не усредненные $q^k(U)$, чтобы избежать вычисления интегралов, то мы тем самым добавляем к ε ошибку Lh, то сходимость (по значению) будет иметь место лишь к $Lh-$стационарному множеству задачи (30):

$$A_{Lh}^h(0) = \left\{U \in \Omega \,\middle|\, 0 \in L^{(Lh)}(U)\right\},$$

где

$$L^{(Lh)}(U) = \begin{cases} co[\partial^{(Lh)} Q_h(U) \cup \partial P(U), U \in Fr\Omega, \\ \partial^{(Lh)} Q_h(U), U \in Int\Omega. \end{cases} \tag{46}$$

Если градиенты (40) вычисляются с конечной погрешностью Δ, то алгоритм о.г.с. будет сходится (по значению) к $(Lh, \Delta)-$стационарному множеству задачи (30):

$$A_{Lh}^h(\Delta) = \left\{U \in \Omega \,\middle|\, 0 \in B_\Delta(L^{(Lh)}(U))\right\},$$

где $B_\Delta(.)$ – замкнутая Δ-окрестность множества.

Под сходимостью по значению функции $Q_h(.)$ последовательности $\{U_s\}$ в E^K к множеству $A \subset E^K$ или $Q_h(.)$-притяжением $\{U_s\}$ к A [15] будем понимать выполнение следующих свойств $\{U_s\}$ по отношению к $Q_h(.)$ и A:

1. $Q_H(U_s) \to Q_h(A) = \left\{Q \in E^1 \,|Q = Q_h(U), U \in A\right\};$

2. для любой точки $Q \in \overline{lt}\{Q_h(U_s)\}$ существует подпоследовательность $\{U_{s^k}\}$ последовательности $\{U_s\}$, для которой $Q_h(U_{s^k}) \to Q$ и $U_{s^k} \to A$ при $s \to +\infty$;

3. для любой подпоследовательности $\{U_{s^k}\}$ последовательности $\{U_s\}$, удовлетворяющей условию:

$$\lim_{k\to+\infty} Q_h(U_{s^k}) = \liminf_{s\to+\infty} Q_h(U_s)$$

   или условию:

$$\lim_{k\to+\infty} Q_h(U_{s^k}) = \limsup_{s\to+\infty} Q_h(U_s),$$

   справедливо включение $\overline{lt}\{U_{s^k}\} \subseteq A$.

   Здесь $\overline{lt}\{A_s\} = \left\{U \in E^K \,|\exists\{U_s\} : U_s \in A_s s = 1, 2, ..., U_s \to U\right\}$ – верхний топологический предел последовательности множеств $\{A_s\}$ в E^K.

7. Итерационный метод решения задачи синтеза

Для решения полученной аппроксимирующей задачи можно использовать метод обобщенного градиентного спуска. Критерий полученной задачи аппроксимирует исходный критерий с точностью Lh при сделанных предположениях и, следовательно, полученная таким образом задача аппроксимирует исходную задачу по значению с такой же точностью. Для того, чтобы избежать вычисления интегралов предложенную процедуру следует рандомизировать, вводя случайные возмущения ρ^k по совокупности аргументов $U^k, k = 0, ..., K-1$.

Для решения задачи (30) рассмотрим следующий стохастический метод типа Поляка [5]:

$$U_1 \in \Omega; U_{s+1} = U_s - \mu_s \overline{n}^s, s = 1, 2, ... \tag{47}$$

Здесь U_1 – произвольное первое приближение к решению, $\overline{n}^s$ – единичный вектор, определяемый равенством:

$$\overline{n}^s = \frac{n_s}{\|n_s\|}; n_s = \begin{cases} g_s, P(U_s) \leqslant 0, \\ p_s, P(U_s) > 0, \end{cases} \tag{48}$$

где

$$g_s = g * (U_s + h\bar{\rho}_s) = \sum_{k\in\hat{K}_0(U_s)} \lambda_k^* g^k(U_s + h_s^k) e_k; \tag{49}$$

$$\lambda_k^* = 1/a_k^2 / \sum_{k\in\hat{K}_0(U_s)} 1/a_k^2, k \in \hat{K}_0(U_s); \tag{50}$$

$$a_k = g^k(U_s^k + h\rho^k) \in G^k(U_s^k + h\rho_s^k), k \in \hat{K}_0(U_s); \tag{51}$$

$$\hat{K}_0(U_s) = \left\{k \in \{0, ..., K-1\} \,\middle|\, q^k(U_s) \geqslant \max_{k=0,...,K-1} q^k(U_s) - \varepsilon\right\}, \varepsilon \geqslant 0, \tag{52}$$

$$p(U_s) \in \partial P(U_s), s = 1, 2, ... \tag{53}$$

Здесь $G^k(.)$ – точечно-множественные отображения, определенные в (22) для каждого направления $k = 0, 1, ..., K-1$, $\bar{\rho}_s = (\rho_s^0, ..., \rho_s^{K-1})$ - вектор, компоненты которого ρ_s^k представляют собой независимые наборы независимых реализаций с.в. ρ р.р. на $O_1 = [-1, 1]$.

Параметры алгоритма подчиним условиям:

$$\mu_{ы} \to +0, \sum_{s=1}^{\infty} \mu_s = \infty, \sum_{s=1}^{\infty} \mu_s^2 < \infty. \tag{54}$$

В силу сделанных предположений имеют место включения:

$$M(g_s \,|\bar{\rho}_1, U_1; ...; \bar{\rho}_s, U_s\,) \in B_\Delta(\partial^{(Lh)} Q_h(U_s)), s = 1, 2, ... \tag{55}$$

Обозначим через В множество борелевских подмножеств $O_K = \overset{K-1}{\underset{k=0}{\otimes}} O_1$ и положим $\nu = 2^{-K} d\rho$, где $d\rho$ – лебегова мера на O_K. Обозначим:

$$\Gamma = \overset{\infty}{\underset{s=1}{\otimes}} O_K, \mathrm{A} = \overset{\infty}{\underset{s=1}{\otimes}} \mathrm{B}, \mathrm{P} = \overset{\infty}{\underset{s=1}{\otimes}} \nu.$$

Из (55) в силу результатов [14] вытекает следующая теорема сходимости.

Теорема 1. *При сделанных предположениях случайная реализация $\{U_s\}$ алгоритма с вероятностью единица (*$\mathrm{P}-$*п.н.) $Q_h(.)$-притягивается к некоторой $Q_h(.)$-связной компоненте $(Lh, \Delta)-$стационарному множеству задачи (30).*

Из результатов [15] следует, что для выпуклых задач $Q_h(.)-$притяжение в утверждении теоремы можно заменить обычной сходимостью.

Заключение

В настоящей работе дополнительно к предыдущим работам авторов на эту тему учитываются вероятности обстрела цели на каждом рубеже, определяемые исходя из модели системы массового обслуживания (СМО) с отказами. В результате функции в правых частях уравнения движения системы становятся дифференцируемыми. Это позволяет непосредственно использовать градиент критерия в соответствующей задаче управления без ее предварительного усреднения.

На основе полученной таким образом задачи управления ставится минимаксиминная задача синтеза системы по направлениям возможного действия воздушного противника и предлагается стохастический метод обобщенного градиента для ее решения типа метода Поляка [5], хорошо справляющегося со сложными ограничениями типа неравенств.

Список литературы

[1] Гермейер Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971.

[2] Демьянов В.Ф, Малоземов В.Н. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.

[3] Федоров В.В. Численные методы максимина. М.: Наука, 1979.

[4] Михалевич В.С., Гупал А.М., Норкин В.И. Методы невыпуклой оптимизации. М.: Наука, 1987.

[5] Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.

[6] Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.

[7] Завриев С.К., Перевозчиков А.Г. Стохастический конечно-разностный алгоритм минимизации функции максимина // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1991. Т. 30, № 4. С. 629–633.

[8] Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие. М.: Высшее образование, 2006.

[9] Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1973.

[10] Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.

[11] Минченко Л.И. Дифференциальные свойства функции максимума при связанных ограничениях // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1984. Т. 24, № 2. С. 210–217.

[12] Завриев С.К., Перевозчиков А.Г. Метод стохастического обобщенного градиента для решения минимаксных задач со связанными переменными // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1990. Т. 30, № 4. С. 491–500.

[13] Карманов В.Г., Федоров В.В. Моделирование в исследовании операций. М.: Твема, 1996.

[14] Завриев С.К., Перевозчиков А.Г. Стохастический квазиградиентный метод оптимизации параметров динамических систем // Кибернетика. 1990. № 4. С. 45–52.

[15] Завриев С.К., Перевозчиков А.Г. Прямой метод Ляпунова в исследовании притяжения траекторий конечно-разностных включений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1990. Т. 30, № 1. С. 22–28.

[16] Завриев С.К., Перевозчиков А.Г. Об аппроксимации обобщенных стохастических градиентов случайных регулярных функций // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1991. Т. 31, № 5. С. 681–688.

[17] Завриев С.К., Перевозчиков А.Г. Об одном способе аппроксимации псевдоградиентного отображения функции связанного максимума // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1991. Т. 31, № 3. С. 353–362.

[18] Перевозчиков А.Г., Лесик И.А. Простейшая модель системы эшелонированной противовоздушной обороны // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2013. № 3(30). С. 83–95.

Библиографическая ссылка

Перевозчиков А.Г., Лесик И.А., Яночкин И.Е. Модель массового обслуживания для системы эшелонированной противовоздушной обороны // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 4. С. 65–83.

Сведения об авторах

1. **Перевозчиков Александр Геннадьевич**
старший научный сотрудник ИнноЦентра Высшей школы им. Е.А. Лурье ТвГУ.

Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, д. 33, ТвГУ, ИнноЦентр.
E-mail: pere501@yandex.ru

2. **Лесик Илья Александрович**
старший инженер отдела автоматизации бизнес-процессов и документооборота Центра разработки и внедрения технологий управления ОАО «НПО РусБИТех»; аспирант кафедры математической статистики и системного анализа Тверского государственного университета.

Россия, 170020, г. Тверь, ул. Жигарева, д. 50, Обособленное подразделение «РусБИТех-Тверь».

3. **Яночкин Игорь Евгеньевич**
начальник отдела проектирования Центра моделирования сложных систем ОАО «НПО РусБИТех».

Россия, 170020, г. Тверь, ул. Жигарева, д. 50, Обособленное подразделение «РусБИТех-Тверь». E-mail: i-yanochkin@yandex.ru

MODEL OF THE ECHELONED AIR DEFENSE QUEUING SYSTEM

Perevozchikov Aleksandr Gennadievich
Senior Researcher at InnoCenter, Tver State University.
Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str., TSU. E-mail: pere501@yandex.ru

Lesik Ilia Aleksandrovich
Senior engineer at the department of Business Process and Workflow Automation,
Center of Development and Deployment of Technology Management,
JSC "NPO RusBITeh".
Russia, 170100, Tver, 50 Zhigareva str., JSC "NPO RusBITeh".

Yanochkin Igor Evgenyevich
Head of the Design department at Complex Systems Modeling center,
JSC "NPO RusBITeh".
Russia, 170100, Tver, 50 Zhigareva str., JSC "NPO RusBITeh".
E-mail: i-yanochkin@yandex.ru

Received 08.12.2015, revised 11.12.2015.

The general model of the echeloned Air Defense is regarded. In addition to our previous work on this subject we consider probability of firing the target on each turn, determined on the model queuing system with refusals. The number of channels is determined by the number of air defense systems, designated to act on their turn and their channel targets. It gets rid of dead zones of the previously proposed piecewise-linear model for determining the probability of fire in the areas where it is constant. It is known that the resulting probability of firing expressed by Erlang formula is approximated by the ratio of two normal distribution functions. As a result, the model becomes nonlinear, reflecting objectively the nonlinear nature of the process of overcoming echeloned Air Defense.

Keywords: discrete optimal control, conditions for the differentiability of criterion, adjoint system, structure of criterion gradient, averaging of the right parts of the system, combined method of gradient projection and Polyak method, randomization of the combined method of gradient descent, stochastic gradient of averaged problem, the convergence almost surely randomized procedure.

Bibliographic citation

Perevozchikov A.G., Lesik I.A., Yanochkin I.Ye. Model of the echeloned Air Defense queuing system. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2015, no. 4, pp. 65–83. (in Russian)