УДК 519.21

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ РАБОТЫ НЕСКОЛЬКИХ ВЗАИМОЗАМЕНЯЕМЫХ УСТРОЙСТВ

Атласов И.В.
Воронежский институт МВД Российской Федерации, г. Воронеж

Поступила в редакцию 04.12.2015, после переработки 17.12.2015.

В статье рассматривается обобщение задачи о работе системы, состоящей из двух взаимозаменяемых устройств. Рассматривается случай произвольного числа взаимозаменяемых устройств. Доказано, что, используя определенный алгоритм подключения устройств, можно построить характеристическую функцию работы системы, которая обладает более полезными свойствами, чем характеристическая функция работы системы, состоящей из двух устройств.

Ключевые слова: время работы, характеристическая функция.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 4. С. 85–101.

Введение

Эта задача появилась в результате обобщения задачи из книги «Курс теории вероятностей» Гнеденко Бориса Владимировича. Он рассматривал работу системы, состоящей из двух взаимозаменяемых устройств. Эти устройства работают в следующем порядке: сначала работает первое устройство, потом оно выходит из строя и ремонтируется, его заменяет второе устройство, потом и второе выходит из строя и также ремонтируется. Если до выхода из строя второго устройства первое успевают отремонтировать, то в систему подключается первое устройство. Если нет, то считаем, что система окончила работу и время работы системы равно времени работы первого и второго устройства. Если второе устройство успевают отремонтировать до окончания работы первого, то подключают второе устройство и так далее.

В работе эта задача обобщается на произвольное число взаимозаменяемых устройств. Рассмотрим подробнее работу системы. Пусть n — некоторое натуральное число, больше двух. Предположим, что у нас имеется n независимых устройств. Сначала в работу включается первое устройство, затем второе устройство (после поломки первого устройства, которое сразу отдается в ремонт и после ремонта ставится в резерв), затем третье устройство (поле поломки второго устройства, которое сразу отдается в ремонт и после ремонта ставится в резерв), и так далее, ..., в работу включается $k+1$ устройство (после поломки k устройства, которое сразу отдается в ремонт и после ремонта ставится в резерв), где $k = 1, \dots, n-1$.

После поломки n устройства снова подключается первое устройство (если время ремонта первого устройства меньше суммы времен работы второго, третьего,

$\ldots$, n устройств), после поломки первого в систему подключается второе устройство (если время ремонта второго устройства меньше суммы времен всех работающих, начиная с поломки второго устройства, устройств) и так далее. То есть, после поломки первого устройства в работу включается второе устройство, после поломки второго устройства в работу включается третье устройство и так далее по порядку до n устройства, после поломки n устройства в работу включается снова первое устройство и так далее. Причем устройства работают только в таком порядке $1, 2, \ldots, n, 1, 2, \ldots, n, 1, 2, \ldots, n, 1, 2, \ldots$.

В случае, если на каком-то шаге невозможно добиться такой последовательности замены устройств, то будем считать, что работа системы остановлена. Смысл такого ограничения состоит в том, что это ограничение не сильно должно сказаться на времени работы системы, так как время ремонта одного устройства с большой вероятностью должен быть меньше непрерывного времени работы $n-1$ устройств и чем больше n, тем больше вероятность того, что время ремонта одного устройства меньше непрерывного времени работы $n-1$ устройств. Ниже будет доказано, что эта вероятность стремиться к единице.

Рассмотрим условия, которым должны удовлетворять элементы системы.

Определение 1. *Предположим, что выполнены следующие условия.*

1. *Длительность безотказной работы i-го устройства после k-го ремонта является случайной величиной θ_i^k с функцией распределения $F_i^k(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Значение $k = 0$ означает, что ремонта не было. Будем считать, что для $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ все функции $F_i^k(x)$ совпадают и равны $F(x)$. Преобразование Лапласа - Стилтьеса функции $F(x)$ обозначим через $f(w) = \int\limits_0^\infty e^{-wx} dF(x)$.*

2. *Длительность k ремонта i-го устройства является случайной величиной η_i^k с функцией распределения $G_i^k(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots$. Будем считать, что для $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots$ все функции $G_i^k(x)$ совпадают и равны $G(x)$. Преобразование Лапласа - Стилтьеса функции $\int\limits_0^x G(x) dF(x)$ обозначим через*
$$g(w) = \int\limits_0^\infty e^{-wx} G(x) dF(x).$$
Обозначим
$$\gamma_n = P\left(\eta_{t+1}^s < \sum_{j=t+2}^{n} \theta_j^{s-1} + \sum_{j=1}^{t} \theta_j^s\right).$$

3. *Для всех возможных k и i случайные величины θ_i^k и η_i^k независимы в совокупности.*

4. *Отказавший элемент немедленно отдается в ремонт и после ремонта откладывается в резерв.*

В дальнейшем, если это не ведет к недоразумениям, случайные величины и их функции распределения будем писать без верхних и, если не будет недоразумений, без нижних индексов. Рассмотрим еще ряд обозначений.

1. *Обозначим через ζ_0 – случайную величину, равную времени безотказной работы системы.*

2. *Для $1 \leq k \leq n$ обозначим через ζ_k – случайную величину, равную времени безотказной работы системы, после первой поломки k устройства.*

3. *Для $1 \leq k \leq n$ и натурального s обозначим через ζ_{sn+k} – случайную величину, равную времени безотказной работы системы, после $s+1$ поломки k устройства.*

4. *Для произвольных k символом Φ_k будем обозначать функцию распределения случайной величины ζ_k и через φ_k преобразование Лапласа-Стилтьеса функции Φ_k.*

5. *В дальнейшем будем пользоваться обозначением $\overline{\phi}(x) = 1 - \phi(x)$ для произвольной функции $\phi(x)$.*

Для полноты понимания приведенных случайных величин рассмотрим небольшой чертеж 1 для случая $n = 3$ (Рис. 1). На этом рисунке рассмотрен вариант, когда величины ζ_k, $k = 3, 4, 5$ существуют, так как выполнены условия $\eta_1^1 < \theta_2^0 + \theta_3^0$, $\eta_2^1 < \theta_3^0 + \theta_1^1$ и $\eta_3^1 < \theta_1^1 + \theta_2^1$. В силу выполнения условия $\eta_1^2 > \theta_2^1 + \theta_3^1$ невозможно подключить первое устройство и величина $\zeta_6 = 0$, согласно предложенному алгоритму. Заметим, что выполнено условие $\eta_2^2 < \theta_3^1$ и можно было бы подключить к системе второе устройство, но согласно нашему алгоритму, мы этого не будем делать и считаем, система закончила свою работу.

Попытаемся задачу о работе системы из трех устройств свести к известной задаче о работе системы из двух устройств при тех же реализациях случайных величин. Для этого объединим второе и третье устройства в одно, которое назовем вторым объединенным устройством. Временем работы объединенного устройства естественно считать сумму времен работы второго и третьего устройств. Время ремонта объединенного устройства естественно считать время, когда начинают работать второе и третье устройства. Для сравнения, введем для этого случая свои обозначения, рисуя волну над случайными величинами, функциями распределения и преобразованиями Лапласа.

На Рис. 2 видно, что продолжительность работы системы уменьшилась $\left(\widetilde{\zeta}_3 = 0\right)$, так как $\widetilde{\eta}_2^1 > \widetilde{\theta}_1^1$. На примере показано, что уменьшение размерности системы уменьшает время ее непрерывной работы.

Для удобства рассмотрения результатов в [1], будем пользоваться обозначениями с волной над буквами, используемыми на Рис. 2. Применяя к обеим частям равенств вероятностную меру,

$$\left\{\widetilde{\zeta}_0 \geq x\right\} = \left\{\widetilde{\theta}_1^0 \geq x\right\} + \left\{0 < \widetilde{\theta}_1^0 < x\right\}\left\{\widetilde{\zeta}_1 \geq x - \widetilde{\theta}_1^0\right\},$$
$$\left\{\widetilde{\zeta}_1 \geq x\right\} = \left\{\widetilde{\theta}_2^0 \geq x\right\} + \left\{0 < \widetilde{\theta}_2^0 < x\right\}\left\{\widetilde{\zeta}_2 \geq x - \widetilde{\theta}_2^0\right\}\left\{\widetilde{\eta}_1^1 < \widetilde{\theta}_2^0\right\}$$

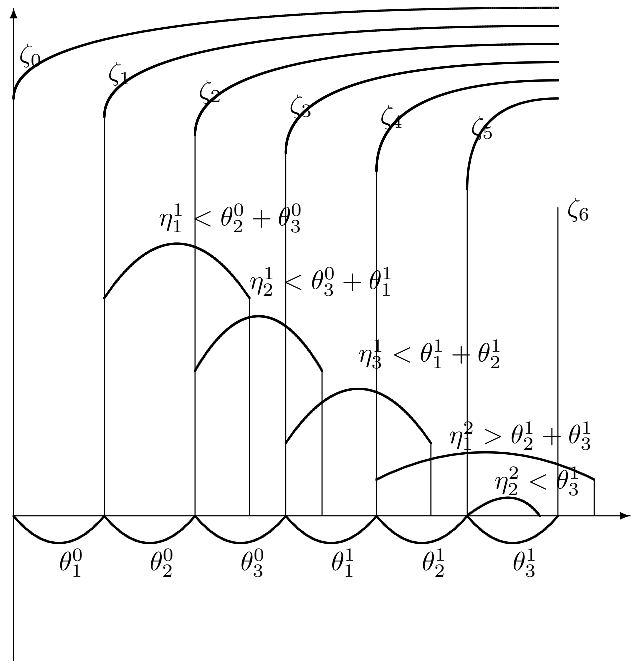

Рис. 1: Работа системы, состоящей из 3 элементов

были получены равенства

$$\overline{\widetilde{\Phi}}_0 (x) = \overline{\widetilde{F}} (x) + \int\limits_0^x \overline{\widetilde{\Phi}}_1 (x-y)\, d\widetilde{F} (y) ,$$

$$\overline{\widetilde{\Phi}}_1 (x) = \overline{\widetilde{F}} (x) + \int\limits_0^x \overline{\widetilde{\Phi}}_1 (x-y)\, \widetilde{G} (y)\, d\widetilde{F} (y) ,$$

откуда следуют равенства

$$\widetilde{\varphi}_0 (s) = \widetilde{f} (s)\, \widetilde{\varphi}_1 (s) , \qquad \widetilde{\varphi}_1 (s) = \widetilde{f} (x) - \widetilde{g} (x) + \widetilde{g} (s)\, \widetilde{\varphi}_1 (s) ,$$

$$\widetilde{\varphi}_0 (s) = \widetilde{f} (s) \frac{\widetilde{f} (s) - \widetilde{g} (s)}{1 - \widetilde{g} (s)}. \tag{1}$$

Очевидным образом, следует, что

$$\widetilde{\varphi}_0^* (0) = \widetilde{f}^* (0) \left(1 + \frac{1}{1 - \widetilde{g} (0)} \right), \qquad M \left(\widetilde{\zeta}_0 \right) = M \left(\widetilde{\theta} \right) \left(1 + \frac{1}{P \left(\widetilde{\eta} > \widetilde{\theta} \right)} \right). \tag{2}$$

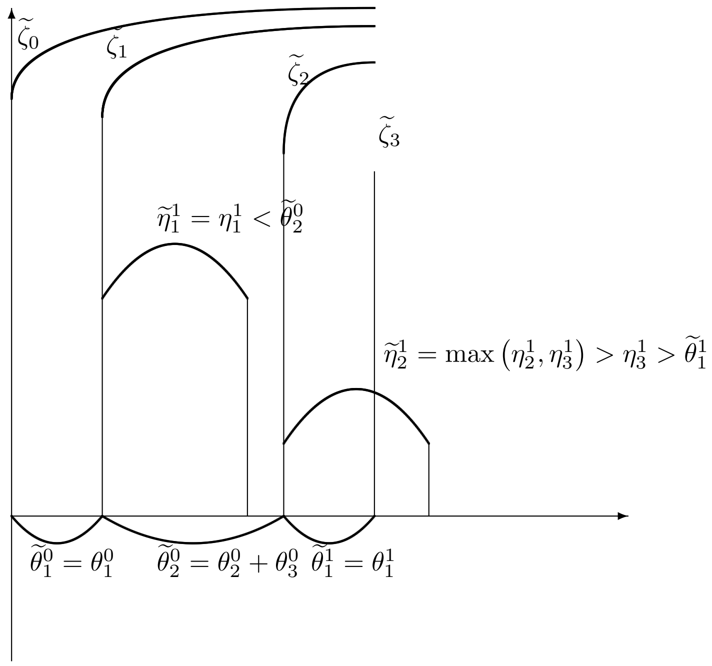

Рис. 2: Работа системы, состоящей из 2 элементов

1. Получение системы интегральных уравнений, описывающих работу системы из n устройств

Далее воспользуемся обозначениями, приведенными в определении 1. Для понятия работы всей системы рассмотрим некоторые частные случаи, которые потом объединим.

1. Рассмотрим время ζ_k, $k = 0, \ldots, n-1$.

Заметим, что одновременное выполнении двух условий $\{\zeta_k \geq x\}$ и $\left\{0 < \theta_{k+1}^0 < x\right\}$ влечет существование положительной величины $\zeta_{k+1} = \zeta_k - \theta_{k+1}^0$, смотри Рис. 1. Поэтому, имеем

$$\begin{aligned}\{\zeta_k \geq x\} &= \{\zeta_k \geq x\}\left\{\theta_{k+1}^0 \geq x\right\} + \{\zeta_k \geq x\}\left\{0 < \theta_{k+1}^0 < x\right\} = \\ &= \left\{\theta_{k+1}^0 \geq x\right\} + \left\{0 < \theta_{k+1}^0 < x\right\}\left\{\zeta_{k+1} \geq x - \theta_{k+1}^0\right\}.\end{aligned}$$

Применяя вероятностную меру P к левой и правой части равенства и пользуясь несовместимостью суммируемых событий, имеем

$$\overline{\Phi}_k(x) = \overline{F}_{k+1}^0(x) + P\left(\left\{0 < \theta_{k+1}^0 < x\right\}\left\{\zeta_{k+1} \geq x - \theta_{k+1}^0\right\}\right).$$

Рассмотрим подробнее второе слагаемое. Для этого введем обозначения

$$\begin{aligned}B_1 &= \{(x_1) : 0 < x_1 < x\}, \\ B_2 &= \{(x_1, x_2) : x_2 \geq x - x_1\}.\end{aligned}$$

Определение 2. *Для произвольного множества $B \in R^n$ обозначим символом I_B характеристическую функцию множества B. То есть, для $(x_1, \dots, x_n) \in R^n$*

$$I_B(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & (x_1, \dots, x_n) \in B, \\ 0 & (x_1, \dots, x_n) \notin B. \end{cases}$$

Заметим, что случайные величины θ^0_{k+1} и ζ_{k+1} независимы, так как являются функциями независимых случайных величин. Поэтому,

$$\begin{aligned} & P\left(\left\{0 < \theta^0_{k+1} < x\right\}\left\{\zeta_{k+1} > x - \theta^0_{k+1}\right\}\right) = \\ = & \int\limits_{-\infty}^{+\infty} I_{B_1}(x_1)\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} I_{B_2}(x_1, x_2)\, d\Phi_{k+1}(x_2)\right] dF^0_{k+1}(x_1) = \\ = & \int\limits_0^x P\left((x_1, \zeta_{k+1}) \in B_2\right) dF^0_{k+1}(x_1) = \\ = & \int\limits_0^x P\left(\zeta_{k+1} > x - x_1\right) dF^0_{k+1}(x_1) = \int\limits_0^x \overline{\Phi}_{k+1}(x - x_1)\, dF^0_{k+1}(x_1). \end{aligned}$$

Окончательно, имеем

$$\overline{\Phi}_k(x) = \overline{F}^0_{k+1}(x) + \int\limits_0^x \overline{\Phi}_{k+1}(x - x_1)\, dF^0_{k+1}(x_1). \tag{3}$$

2. Пусть s и $0 \le t \le n-1$ – целые положительные числа. Для $k = ns + t$ рассмотрим время ζ_k. Аналогично, как сделано выше доказывается, что из выполнения условий $\left\{0 < \theta^s_{t+1} < x\right\}$, $\{\zeta_k \ge x\}$ и $\left\{\eta^s_{t+1} \ge \sum\limits_{j=t+2}^{n} \theta^{s-1}_j + \sum\limits_{j=1}^{t} \theta^s_j\right\}$ следует существование $\zeta_{k+1} = \zeta_k - \theta^s_{t+1}$. Заметим, что слагаемое

$$\left\{0 < \theta^s_{t+1} < x\right\}\{\zeta_k \ge x\}\left\{\eta^s_{t+1} \ge \sum_{j=t+2}^{n} \theta^{s-1}_j + \sum_{j=1}^{t} \theta^s_j\right\}$$

исчезает, так как выполнение условия $\left\{\eta^s_{t+1} \ge \sum\limits_{j=t+2}^{n} \theta^{s-1}_j + \sum\limits_{j=1}^{t} \theta^s_j\right\}$, (означающее,что $t+1$ устройство не успевают починить до его работы в системе) эквивалентно условию $\left\{\theta^s_{t+1} = 0\right\}$, которое не совместимо с условием $\left\{0 < \theta^s_{t+1} < x\right\}$.

Поэтому,

$$\begin{aligned} &\{\zeta_k \geq x\} = \{\zeta_k \geq x\}\left\{\theta^s_{t+1} \geq x\right\} + \{\zeta_k \geq x\}\left\{0 < \theta^s_{t+1} < x\right\} = \\ = &\left\{\theta^s_{t+1} \geq x\right\} + \\ &+ \left\{0 < \theta^s_{t+1} < x\right\}\{\zeta_k \geq x\}\left\{\eta^s_{t+1} \geq \sum_{j=t+2}^{n} \theta^{s-1}_j + \sum_{j=1}^{t} \theta^s_j\right\} + \\ &+ \left\{0 < \theta^s_{t+1} < x\right\}\{\zeta_k \geq x\}\left\{\eta^s_{t+1} < \sum_{j=t+2}^{n} \theta^{s-1}_j + \sum_{j=1}^{t} \theta^s_j\right\} = \\ = &\left\{\theta^s_{t+1} \geq x\right\} + \\ &+ \left\{0 < \theta^s_{t+1} < x\right\}\left\{\zeta_{k+1} \geq x - \theta^s_{t+1}\right\}\left\{\eta^s_{t+1} < \sum_{j=t+2}^{n} \theta^{s-1}_j + \sum_{j=1}^{t} \theta^s_j\right\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Далее, случайные события $\left\{\eta^s_{t+1} < \sum\limits_{j=t+2}^{n} \theta^{s-1}_j + \sum\limits_{j=1}^{t} \theta^s_j\right\}$ и $\left\{\zeta_{k+1} \geq x - \theta^s_{t+1}\right\}$ независимы, так как независимы входящие туда случайные величины. Применим вероятностную меру к левой и правой части равенства (4). Пользуясь несовместимостью событий, стоящих в сумме, и независимостью событий, стоящих в произведении, имеем

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}_k(x) = &\overline{F}^s_{t+1}(x) + \\ &+ P\left(\left\{0 < \theta^s_{t+1} < x\right\}\left\{\zeta_{k+1} \geq x - \theta^s_{t+1}\right\}\right) P\left(\eta^s_{t+1} < \sum_{j=t+2}^{n} \theta^{s-1}_j + \sum_{j=1}^{t} \theta^s_j\right). \end{aligned}$$

Рассмотрим входящие в это равенство сомножители. Аналогично доказательству формулы (3) доказывается, что

$$P\left(\left\{0 < \theta^s_{t+1} < x\right\}\left\{\zeta_{k+1} \geq x - \theta^s_{t+1}\right\}\right) = \int_0^x \overline{\Phi}_{k+1}(x - x_1)\, dF^s_{t+1}(x_1).$$

Окончательно, имеем

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}_{ns+t}(x) = &\overline{F}^s_{t+1}(x) + \int_0^x \overline{\Phi}_{k+1}(x - x_1)\, dF^s_{t+1}(x_1) \times \\ &\times P\left(\eta^s_{t+1} < \sum_{j=t+2}^{n} \theta^{s-1}_j + \sum_{j=1}^{t} \theta^s_j\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Объединяя равенства (3) и (5), используя также определение 1, получим систему интегральных уравнений для произвольных натуральных s и произвольных целых $t = 0, \ldots, n-1$

$$\begin{cases} \overline{\Phi}_t(x) = \overline{F}(x) + \int\limits_0^x \overline{\Phi}_{t+1}(x - x_1)\, dF(x_1), \\ \overline{\Phi}_{ns+t}(x) = \overline{F}(x) + \int\limits_0^x \overline{\Phi}_{ns+t+1}(x - x_1)\, dF(x_1)\, P\left(\eta < \sum\limits_{j=1}^{n-1} \theta_j\right), \end{cases} \tag{6}$$

где, как несложно видеть, справедливо равенство

$$P\left(\sum_{j=1}^{n-1} \theta_j < \eta\right) = \int\limits_0^{+\infty} dG(x_1) \prod_{k=2}^{n-1} \int\limits_0^{x_1 - \sum\limits_{i=2}^{k} x_i} dF(x_k). \tag{7}$$

2. Исследование величины $P\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \theta_k < \eta_1\right)$

Теорема 1. *Пусть случайные величины θ_i одинаково распределены и независимы, пусть все случайные величины θ_i и η_1 независимы в совокупности и имеют конечные положительные математические ожидания. В этом случае*

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} \theta_k < \eta_1\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Пусть случайные величины θ_i и η_1 имеют конечные дисперсии. В этих предположениях для $0 < \varepsilon < M(\theta_1)$ и наименьшего натурального j_0, такого что

$$j_0 \geq \frac{M(\eta_1)}{M(\theta_1) - \varepsilon}$$

для произвольных натуральных n и $j \geq j_0$ справедливо неравенство

$$P\left(\sum_{k=1}^{n+j} \theta_k < \eta_1\right) \leq \frac{D(\eta_1)}{n^2 (M(\theta_1) - \varepsilon)^2} + \frac{D(\theta_1)}{(n+j)\varepsilon^2}. \tag{8}$$

Доказательство. Обозначим символом $F_{\sum\limits_{k=1}^{n} \theta_k}(x)$ функцию распределения случайной величины $\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n+j} \theta_k$ и символом $F_{\frac{\eta_1}{n}}(x)$ функцию распределения случайной величины $\frac{\eta_1}{n}$. Обозначим

$$\begin{aligned} B &= \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq x_2\}, \\ B_> &= \{(x_1, x_2) : |x_1 - M(\theta_1)| > \varepsilon\}, \\ B_< &= \{(x_1, x_2) : |x_1 - M(\theta_1)| < \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Из независимости случайных величин $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\theta_k$ и $\frac{\eta_1}{n}$ имеем

$$
\begin{aligned}
&P\left(\sum_{k=1}^{n}\theta_k<\eta_1\right)=P\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\theta_k<\frac{\eta_1}{n}\right)=\\
&=\int\left(I_{B_<}\left(x_1\right)+I_{B_>}\left(x_1\right)\right)I_B\left(x_1,x_2\right)dF_{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\theta_k}\left(x_1\right)dF_{\frac{\eta_1}{n}}\left(x_2\right)=\\
&=\int I_{B_>}\left(x_1\right)I_B\left(x_1,x_2\right)dF_{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n+j}\theta_k}\left(x_1\right)dF_{\frac{\eta_1}{n}}\left(x_2\right)+\\
&\quad+\int I_{B_<}\left(x_1\right)I_B\left(x_1,x_2\right)dF_{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\theta_k}\left(x_1\right)dF_{\frac{\eta_1}{n}}\left(x_2\right).
\end{aligned}
$$

Рассмотрим первое слагаемое

$$
\begin{aligned}
&\int I_{B_>}\left(x_1\right)I_B\left(x_1,x_2\right)dF_{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n+j}\theta_k}\left(x_1\right)dF_{\frac{\eta_1}{n}}\left(x_2\right)<\\
&<\int I_{B_>}\left(x_1\right)dF_{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\theta_k}\left(x_1\right)<P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\theta_k-M\left(\theta_1\right)\right|>\varepsilon\right).
\end{aligned}
$$

Как доказал А.Я. Хинчин [3], при выполнение условий теоремы, справедливо утверждение

$$
P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\theta_k-M\left(\theta_1\right)\right|>\varepsilon\right)\underset{n\to\infty}{\to}0.
$$

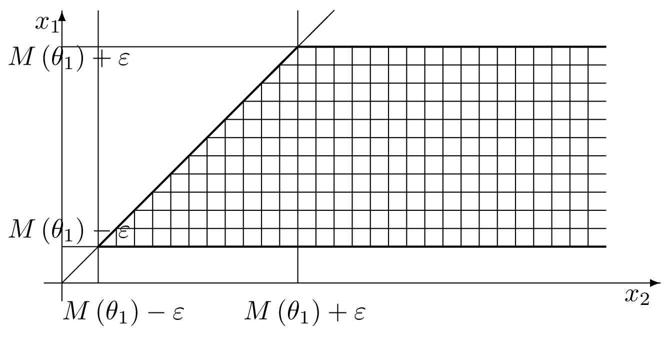

Рис. 3: Множество $B\cap B_<$

Согласно Рис. 3, имеем

$$\int I_{B_<}(x_1)\, I_B(x_1,x_2)\, dF_{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\theta_k}(x_1)\, dF_{\frac{\eta_1}{n}}(x_2) =$$

$$= \int\limits_{M(\theta_1)-\varepsilon}^{M(\theta_1)+\varepsilon} dF_{\frac{\eta_1}{n}}(x_2) \int\limits_{M(\theta_1)-\varepsilon}^{x_2} dF_{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\theta_k}(x_1) +$$

$$+ \int\limits_{M(\theta_1)+\varepsilon}^{\infty} dF_{\frac{\eta_1}{n}}(x_2) \int\limits_{M(\theta_1)-\varepsilon}^{M(\theta_1)+\varepsilon} dF_{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\theta_k}(x_1) <$$

$$< \int\limits_{M(\theta_1)-\varepsilon}^{M(\theta_1)+\varepsilon} dF_{\frac{\eta_1}{n}}(x_2) + \int\limits_{M(\theta_1)+\varepsilon}^{\infty} dF_{\frac{\eta_1}{n}}(x_2) = \int\limits_{M(\theta_1)-\varepsilon}^{\infty} dF_{\frac{\eta_1}{n}}(x_2) =$$

$$= P\left(n\left(M\left(\theta_1\right)-\varepsilon\right) < \eta_1\right).$$

Также, очевидно, слагаемое $P\left(n\left(M\left(\theta_1\right)-\varepsilon\right) < \eta_1\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Первая часть утверждения доказана.

Докажем вторую часть утверждения. Заметим, что для произвольных натуральных n и $j_0 < j$ выполнено неравенство

$$M\left(\eta_1\right) < j\left(M\left(\theta_1\right)-\varepsilon\right),$$
$$M\left(\eta_1\right) + n\left(M\left(\theta_1\right)-\varepsilon\right) < (n+j)\left(M\left(\theta_1\right)-\varepsilon\right).$$

Обозначим

$$a = M\left(\eta_1\right), \qquad \delta = n\left(M\left(\theta_1\right)-\varepsilon\right), \qquad b = (n+j)\left(M\left(\theta_1\right)-\varepsilon\right).$$

Так как $a+\delta < b$, то из Рис. 4 видно, что справедливо вложение

$$\{x : x > b\} \subseteq \{x : |x-a| > \delta\}.$$

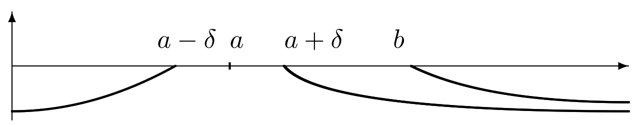

Рис. 4: Иллюстрация вложения $\{x : x > b\} \subseteq \{x : |x-a| > \delta\}$

Возвращаясь к старым переменным, получим вложение

$$\{x : (n+j)\left(M\left(\theta_1\right)-\varepsilon\right) < x\} \subset \{x : |x - M\left(\eta_1\right)| > n\left(M\left(\theta_1\right)-\varepsilon\right)\}$$

и, соответственно, неравенство

$$P\left((n+j)\left(M\left(\theta_1\right)-\varepsilon\right) < \eta_1\right) < P\left(|\eta_1 - M\left(\eta_1\right)| > n\left(M\left(\theta_1\right)-\varepsilon\right)\right).$$

Из доказательства предыдущего утверждения и последнего неравенства, имеем

$$P\left(\sum_{k=1}^{n+j}\theta_k < \eta_1\right) <$$

$$<P\left(\left|\frac{1}{n+j}\sum_{k=1}^{n+j}\theta_k - M(\theta_1)\right| > \varepsilon\right) + P\left((n+j)\left(M(\theta_1)-\varepsilon\right) < \eta_1\right) <$$

$$<P\left(\left|\frac{1}{n+j}\sum_{k=1}^{n+j}\theta_k - M(\theta_1)\right| > \varepsilon\right) + P\left(|\eta_1 - M(\eta_1)| > n\left(M(\theta_1)-\varepsilon\right)\right) <$$

$$<\frac{D(\theta_1)}{(n+j)\varepsilon^2} + \frac{D(\eta_1)}{n^2\left(M(\theta_1)-\varepsilon\right)^2}.$$

$\square$

В условиях теоремы можно получить более наглядные оценки. Если взять $n = j$, получим для

$$n > j_0 = \frac{M(\eta_1)}{M(\theta_1)-\varepsilon}$$

неравенство

$$P\left(\sum_{k=1}^{2n}\theta_k < \eta_1\right) < \frac{D(\eta_1)}{n^2\left(M(\theta_1)-\varepsilon\right)^2} + \frac{D(\theta_1)}{2n\varepsilon^2}.$$

Или, если обозначить $m = 2n$, то получим следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть функции распределения случайных величин θ_i совпадают. Пусть случайные величины θ_i и η_1 имеют конечные положительные математические ожидания и дисперсии. В этих предположениях для произвольных $\varrho > 0$, $0 < \varepsilon < M(\theta_1)$ и m, удовлетворяющего условию*

$$m > \max\left(\frac{2M(\eta_1)}{M(\theta_1)-\varepsilon}, \frac{4\varepsilon^2 D(\eta_1)}{\varrho D(\theta_1)\left(M(\theta_1)-\varepsilon\right)^2}\right)$$

справедливо неравенство

$$P\left(\sum_{k=1}^{m}\theta_k < \eta_1\right) <$$

$$< \frac{D(\theta_1)}{m\varepsilon^2}\left(1 + \frac{4\varepsilon^2 D(\eta_1)}{mD(\theta_1)\left(M(\theta_1)-\varepsilon\right)^2}\right) < \frac{1}{m}\frac{(1+\varrho)D(\theta_1)}{\varepsilon^2}. \qquad (9)$$

2.1 Исследование величины $P\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\theta_k<\eta_1\right)$ *при условии, что случайные величины* θ_k *и* η_1 *имеют показательные законы распределения*

Далее, для получения конкретных формул, предположим, что функция распределения случайной величины θ равна $F(x)=1-\exp(-\lambda x)$ и функция распределения случайной величины η равна $G(x)=1-\exp(-\mu x)$. Согласно (7), имеем,

$$P\left(\sum_{j=1}^{2}\theta_j<x\right)=\int\limits_0^x dF(y)\int\limits_0^{x-y}dF(z)=1-e^{-\lambda x}\sum_{k=0}^{1}\frac{(\lambda x)^k}{k!}.$$

Предположим, что для n выполнено равенство

$$P\left(\sum_{j=1}^{n}\theta_j<x\right)=1-e^{-\lambda x}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda x)^k}{k!}.$$

Докажем по индукции эту формулу:

$$\begin{aligned}F_{\sum\limits_{j=1}^{n+1}\theta_j}(x)=&P\left(\sum_{j=1}^{n}\theta_j+\theta_{n+1}<x\right)=\int\limits_0^x F_{\sum\limits_{j=1}^{n}\theta_j}(x-y)\,dF_{\theta_{n+1}}(y)=\\=&\int\limits_0^x\left(1-e^{-\lambda(x-y)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda(x-y))^k}{k!}\right)d\left(1-e^{-\lambda y}\right)=\\=&1-e^{-\lambda x}-e^{-\lambda x}\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_0^{\lambda x}\frac{z^k}{k!}dz=1-e^{-\lambda x}\sum_{k=0}^{n}\frac{(\lambda x)^k}{k!}.\end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned}&P\left(\sum_{j=1}^{n}\theta_j<\eta\right)=\\&=\int\limits_0^\infty F_{\sum\limits_{j=1}^{n}\theta_j}(x)\,dG(x)=\int\limits_0^\infty\left(1-e^{-\lambda x}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda x)^k}{k!}\right)d\left(1-e^{-\mu x}\right)=\\&=1-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\mu\lambda^k}{(\lambda+\mu)^{k+1}}\int\limits_0^\infty e^{-(\lambda+\mu)x}\frac{((\lambda+\mu)x)^k}{k!}d((\lambda+\mu)x)=\\&=1-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\mu\lambda^k}{k!\,(\lambda+\mu)^{k+1}}\int\limits_0^\infty y^{(k+1)-1}e^{-y}dy=\\&=1-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k!\lambda^k}{k!\,(\lambda+\mu)^k}=1-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^n}{1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}}=\\&=\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^n.\end{aligned}$$

3 Алгебраическая система для характеристических функций

Систему (6) удобнее решать, если воспользоваться методами преобразования Лапласа. Обозначим $\gamma_n = P\left(\eta < \sum\limits_{j=1}^{n-1} \theta_j\right)$.

Из первого уравнения системы (6), имеем

$$\begin{aligned} 1 - \Phi_t\left(x\right) =& 1 - F^0_{t+1}\left(x\right) + \int\limits_0^x dF^0_{t+1}\left(x_1\right) - \int\limits_0^x \Phi_{t+1}\left(x - x_1\right) dF^0_{t+1}\left(x_1\right), \\ \Phi_t\left(x\right) =& F^0_{t+1}\left(x\right) - \int\limits_0^x dF^0_{t+1}\left(x_1\right) + \int\limits_0^x \Phi_{t+1}\left(x - x_1\right) dF^0_{t+1}\left(x_1\right), \\ \Phi_t\left(x\right) =& \int\limits_0^x \Phi_{t+1}\left(x - x_1\right) dF^0_{t+1}\left(x_1\right), \\ \varphi_t\left(s\right) =& f^0_{t+1}\left(s\right) \varphi_{t+1}\left(s\right). \end{aligned}$$

Из второго уравнения системы (6), имеем

$$\begin{aligned} 1 - \Phi_{ns+t}\left(x\right) =& 1 - F^s_{t+1}\left(x\right) + \gamma_n \int\limits_0^x dF^s_{t+1}\left(x_1\right) - \gamma_n \int\limits_0^x \Phi_{ns+t+1}\left(x - x_1\right) dF^s_{t+1}\left(x_1\right), \\ \Phi_{ns+t}\left(x\right) =& \left(1 - \gamma_n\right) F^s_{t+1}\left(x\right) + \gamma_n \int\limits_0^x \Phi_{ns+t+1}\left(x - x_1\right) dF^s_{t+1}\left(x_1\right), \\ \varphi_{ns+t}\left(s\right) =& \left(1 - \gamma_n\right) f^s_{t+1}\left(x\right) + \gamma_n f^s_{t+1}\left(s\right) \varphi_{ns+t+1}\left(s\right). \end{aligned}$$

Для $t = 0, \ldots, n-1$ получим систему уравнений

$$\begin{cases} \varphi_t\left(s\right) = f\left(s\right) \varphi_{t+1}\left(s\right), \\ \quad \ldots \\ \varphi_{ns+t}\left(s\right) = \left(1 - \gamma_n\right) f\left(x\right) + \gamma_n f\left(s\right) \varphi_{ns+t}\left(s\right). \end{cases} \tag{10}$$

Отсюда несложно получить

$$\begin{aligned} \varphi_n\left(s\right) =& f\left(s\right) \frac{1 - \gamma_n}{1 - \gamma_n f\left(s\right)}, \\ \varphi_0\left(s\right) =& f^{n+1}\left(s\right) \frac{1 - \gamma_n}{1 - \gamma_n f\left(s\right)}. \end{aligned} \tag{11}$$

Обозначим

$$\alpha\left(x, y\right) = x^{n+1}\left(\frac{1 - y}{1 - xy}\right).$$

Найдем первую и вторую производные по x

$$\frac{\partial}{\partial x}\alpha(x,y) = (1-y)\,x^n\left(\frac{n}{1-xy} + \frac{1}{(1-xy)^2}\right),$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\alpha(x,y) = (1-y)\,x^{n-1}\left[\frac{n(n-1)}{(1-xy)} + \frac{2(n-1)}{(1-xy)^2} + \frac{2}{(1-xy)^3}\right].$$

Так как

$$\varphi^*(s) = (1-\gamma_n)\,f^n(s)\left(\frac{n}{1-\gamma_n f(s)} + \frac{1}{(1-\gamma_n f(s))^2}\right)f^*(s),$$

то

$$M(\zeta_0) = -\varphi^*(0) = \left(n + \frac{1}{1-\gamma_n}\right)(-f^*(0)) = M(\theta)\left[n + \frac{1}{P(\eta > \theta^{n-1})}\right]. \qquad (12)$$

Так как

$$\varphi^{**}(s) = \frac{\partial}{\partial x}\alpha(f(s),\gamma_n)\,f^{**}(s) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\alpha(f(s),\gamma_n)\,(f^*(s))^2,$$

то

$$\begin{aligned} D(\zeta_0) =& \varphi^{**}(0) = \frac{\partial}{\partial x}\alpha(1,\gamma_n)\,D(\theta) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\alpha(1,\gamma_n)\,M^2(\theta) = \\ &= \left(n + \frac{1}{1-\gamma_n}\right)D(\theta) + \left(n(n-1) + \frac{2(n-1)}{1-\gamma_n} + \frac{2}{(1-\gamma_n)^2}\right)M^2(\theta). \end{aligned} \qquad (13)$$

4. Нахождение плотности вероятности случайной величины φ_0

Предположим, что функция распределения случайной величины θ равна $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$ и функция распределения случайной величины η произвольна. Найдем плотность вероятностей случайной величины φ_0. Так как $f(w) = \frac{\lambda}{\lambda+w}$, то

$$\varphi_0(w) = f(w)^{n+1}\,\frac{1-\gamma_n}{1-f(w)\,\gamma_n} = \frac{\lambda^{n+1}(1-\gamma_n)}{(w+\lambda)^n\left((w+\lambda) - \lambda\gamma_n\right)}.$$

Согласно методу неопределенных коэффициентов, имеем

$$\frac{1}{x^n(x-a)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{x^k} + \frac{B}{x-a} = \frac{(A_1+B)\,x^n + \sum\limits_{k=1}^{n-1}(A_{k+1} - aA_k)\,x^{n-k} - A_n a}{x^n(x-a)}.$$

Отсюда несложно найти все неопределенные коэффициенты и получить равенство

$$\frac{1}{x^n(x-a)} = \frac{1}{a^n}\frac{1}{x-a} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!a^{n-k+1}}\frac{(k-1)!}{x^k} = \frac{1}{a^n}\frac{1}{x-a} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!a^{n-k}}\frac{k!}{x^{k+1}}.$$

Поэтому,

$$\begin{aligned}\varphi_0(w) =& \frac{\lambda^{n+1}(1-\gamma_n)}{(w+\lambda)^n((w+\lambda)-\lambda\gamma_n)} = \\ =& \lambda^{n+1}(1-\gamma_n)\left(\frac{1}{(\lambda\gamma_n)^n}\frac{1}{(w+\lambda)-\lambda\gamma_n} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!\,(\lambda\gamma_n)^{n-k}}\frac{k!}{(w+\lambda)^{k+1}}\right).\end{aligned}$$

Отсюда, очевидным образом, вытекает

$$\begin{aligned}&\Phi_0^*(t) = \lambda^{n+1}(1-\gamma_n)\left(\frac{1}{(\lambda\gamma_n)^n}e^{-\lambda t}e^{\lambda\gamma_n t} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!\,(\lambda\gamma_n)^{n-k}}t^k e^{-\lambda t}\right) = \\ =& \frac{\lambda(1-\gamma_n)}{\gamma_n^n}e^{-\lambda t}\left(e^{\lambda\gamma_n t} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda\gamma_n t)^k}{k!}\right) = \\ =& \frac{\lambda P\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}\theta_k < \tau_1\right)e^{-\lambda t}}{P^n\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}\theta_k > \tau_1\right)}\left(e^{\lambda P\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}\theta_k > \tau_1\right)t} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(\lambda P\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}\theta_k > \tau_1\right)t\right)^k}{k!}\right).\end{aligned} \tag{14}$$

Заключение

В работе рассмотрен алгоритм работы нескольких устройств. При условии выполнения этого алгоритма, удалось построить характеристическую функцию работы системы (11), принципиально отличающуюся от характеристической функции работы системы, состоящей из двух устройств (1). В формуле (11) отсутствует слагаемое $g(w)$, являющее частью формулы (1) и вместо него появляется константа γ_n.

Это позволяет для произвольного числа устройств найти произвольный момент порядка m случайной величины ζ_0, который существует, если существуют все моменты до порядка m включительно для случайной величины θ_1 и этот момент порядка m случайной величины ζ_0 не зависит от характеристик случайной величины η_1, что для двух устройств неверно. Также несложно получить аналитические выражения для момента порядка m случайной величины ζ_0, используя только константу γ_n и все моменты до порядка m включительно для случайной величины θ_1. Эти выражения получены для матожидания и дисперсии – формулы (12) и (13).

Если сравнить формулы для математических ожиданий (2) и (12), то в книге [1] для увеличения математического ожидания ζ_0 наиболее эффективным способом является уменьшение вероятности $P\left(\widetilde{\eta} > \widetilde{\theta}\right)$. В работе доказано, что в формуле (12) аналог выражения $P\left(\widetilde{\eta} > \widetilde{\theta}\right)$ – выражение γ_n всегда стремится к нулю при стремлении n к бесконечности. Также доказано, что для конкретных выражений величина γ_n стремится к нулю со скоростью показательной функции.

В предположении, что функция распределения случайной величины θ равна $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$ и произвольном выборе функции распределения случайной величины η, получено явное выражение для плотности вероятностей случайной величины ζ_0 (формула (14)), что вряд ли можно сделать для двух устройств, используя формулу (1).

Список литературы

[1] Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: УРСС, 2001.

[2] Боровков А.А. Теории вероятностей. М.: Наука, 1986.

[3] Хинчин А.Я. Понятие энтропии в теории вероятностей // Успехи математических наук. 1953. Т. 8, № 6. С. 1126–1135.

[4] Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука, 1980.

Библиографическая ссылка

Атласов И.В. Об эффективности работы нескольких взаимозаменяемых устройств // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 4. С. 85–101.

Сведения об авторах

1. **Атласов Игорь Викторович**
профессор кафедры высшей математики Воронежского института Министерства внутренних дел Российской Федерации.

Россия, 394065, г. Воронеж, пр-т Патриотов, д. 53.

ABOUT EFFICIENCY OF WORK OF SEVERAL INTERCHANGEABLE DEVICES

Atlasov Igor Victorovich
Professor at Higher Mathematics department,
Voronezh Institute of the Ministry of the Interior of the Russian Federation.
Russia, 394065, Voronezh, 53 Patriotov av.

Received 04.12.2015, revised 17.12.2015.

Investigated problem is a result of a generalization of the problem of work of a system consisting of two interchangeable devices. In the article this task is summarized on the unlimited amount of interchangeable devices. It is proved that by using special algorithm to connect the devices, one can build a characteristic function of the system, which has more useful properties than the characteristic function of the system consisting of two devices.

Keywords: the period of work, the characteristic function.

Bibliographic citation

Atlasov I.V. About efficiency of work of several interchangeable devices. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2015, no. 4, pp. 85–101. (in Russian)