

## МОДЕЛИ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 532.696 : 519.711

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАНЖЕТЫ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ ТВЁРДЫМИ СФЕРИЧЕСКИМИ ЧАСТИЦАМИ ОДИНАКОВОГО РАДИУСА<sup>1</sup>

Сдобняков Н.Ю., Соколов Д.Н., Козлова Е.М., Неверова Т.М.,  
Колосов А.Ю.

Кафедра теоретической физики

---

*Поступила в редакцию 06.02.2014, после переработки 20.03.2014.*

---

В данной работе разработана математическая модель, описывающая манжету жидкости между двумя твердыми сферическими частицами. Получены формулы для описания различных моделей – профилей манжеты, а также соотношения для вычисления их объема. Исследована корректность математической модели – соответствие геометрических размеров манжеты с физическими размерами атомов.

**Ключевые слова:** манжета жидкости, математическая модель, поверхности вращения.

*Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. №1. С. 5–19.*

#### Введение

В природе и технике широко распространены системы, в которых дисперсные твердые частицы или газовые пузыри соединены прослойками (манжетами) жидкости. Прилипая к частицам, жидкость искривляет мениск и, в зависимости от условий смачивания, стягивает или расталкивает их. Эти капиллярные силы существенно влияют на протекание многих технологических процессов и в значительной мере определяют качество готовой продукции (жидкофазное спекание порошков в металлокерамике и силикатной технологии, сцепление частиц между собой и с поверхностью изделий при нанесении защитных покрытий) [1]. Исследование зависимости удельной избыточной свободной энергии от геометрических и энергетических характеристик такой системы с одной стороны позволит выявить размерные поверхностные эффекты, с другой стороны исследовать проблему устойчивости подобных материалов. Одной из проблем в этой задаче является определение поверхности мениска.

В большинстве работ ее оценивали приближенно, не уточняя истинной конфигурации мениска при различных углах смачивания и объемах манжеты. В [2–3]

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №13-03-00119).

определили геометрические параметры мениска при конденсации паров в высокодисперсных системах в случае совершенного смачивания твердых частиц жидкостью. Авторы показали зависимость кривизны мениска от относительного давления паров жидкости. При насыщении окружающей среды парами количество конденсированной жидкости в области контакта частиц оказывается наибольшим и зависит от их формы и размеров. Мениск в этом случае соответствует поверхности нулевой кривизны ( $\Delta p = 0$ ) – катеноиду. Катеноид – это поверхность, полученная вращением цепной линии вокруг ее оси (Рис. 1). Катеноид является единственной минимальной поверхностью среди поверхностей вращения. Минимальные поверхности возникли при решении следующей задачи: среди всех поверхностей, проходящих через данную замкнутую пространственную линию, найти ту, которая имеет минимальную площадь поверхности, ограниченной данной линией.

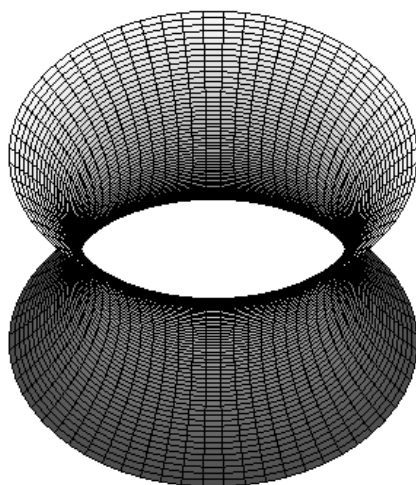


Рис. 1: Поверхность катеноида

При меньших относительных давлениях ( $\Delta p < 0$ ) поверхность мениска представляет собой нодоид (Рис. 2). Геометрическая теория нодоидного мениска при неполном смачивании предложена в [4].

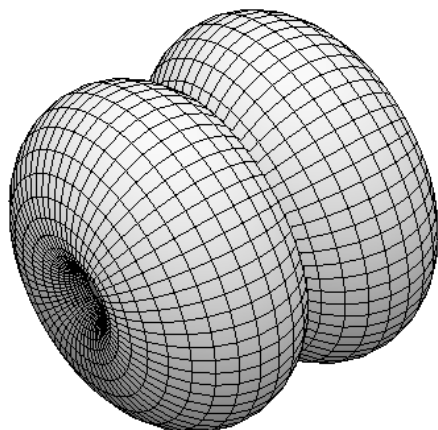
Мениск жидкости при  $\Delta p > 0$  представляет собой ундулоид (Рис. 3), получаемый вращением волнистой линии вокруг определенной оси [4].

Кроме того, имеются работы [5–8], в которых поверхность аппроксимировалась поверхностью тора (Рис. 4) и поверхностью гиперboloида [9] (Рис. 5).

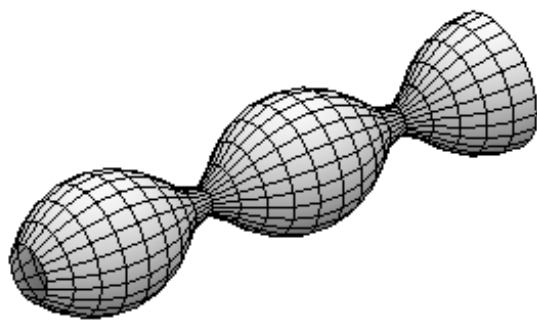
В данной работе поставлена задача нахождения параметров следующих поверхностей: поверхности, образованной вращением дуги окружности, катеноидом, параболоидом, а также поверхность, получаемую вращением функции вида  $y(x, A, B) = A + Bx^{2n}$ , а также определение объемов получаемых поверхностей.

## 1. Математическая модель поверхности

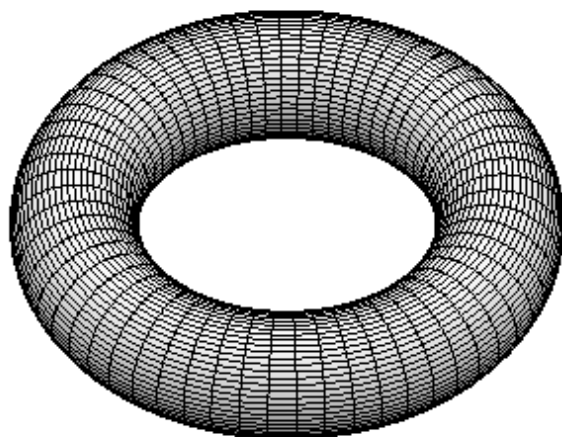
С целью расчета термодинамических характеристик мениска между двумя одинаковыми сферическими частицами радиуса  $R$ , нами была построена следующая



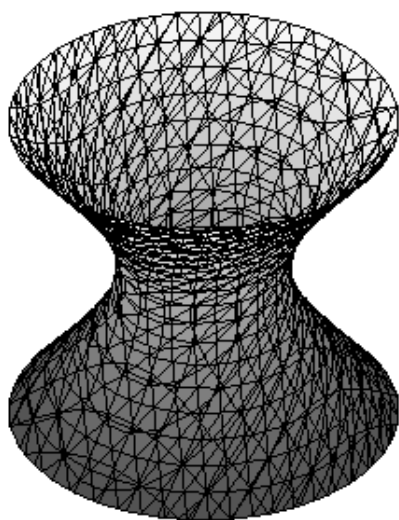
*Рис. 2: Поверхность нодоида*



*Рис. 3: Поверхность ундулоида*



*Рис. 4: Поверхность тора*



*Рис. 5: Гиперболоид вращения*

модель: поверхность определяется вращением некоторой дуги  $AA'$ , задаваемой функцией  $y(x, P, Q)$  (см. Рис. 6), где коэффициенты  $P, Q$  подлежат определению.

В качестве дуги  $AA'$  были рассмотрены следующие функции вида  $y(x, P, Q)$ :

- дуга окружности  $y(x, y_c, \rho) = y_c - \sqrt{\rho^2 - x^2}$  (роль коэффициентов  $P, Q$  играют  $y_c$  и  $\rho$ );
- цепная линия  $y(x, A, B) = A \operatorname{ch}(Bx)$  (роль коэффициентов  $P, Q$  играют  $A$  и  $B$ );
- парабола  $y(x, A, B) = A + Bx^2$  (роль коэффициентов  $P, Q$  играют  $A$  и  $B$ );
- функция вида  $y(x, A, B) = A + Bx^{2n}$  (роль коэффициентов  $P, Q$  играют  $A$  и  $B$ ).

Параметры  $P, Q$  являются функциями радиуса частиц  $R$ , углов  $\varphi, \theta$  и расстояния, задаваемого в единицах радиуса  $\lambda$ , определяемых из соотношения  $L = \lambda R$ , где  $L$  – абсолютное расстояние между частицами.

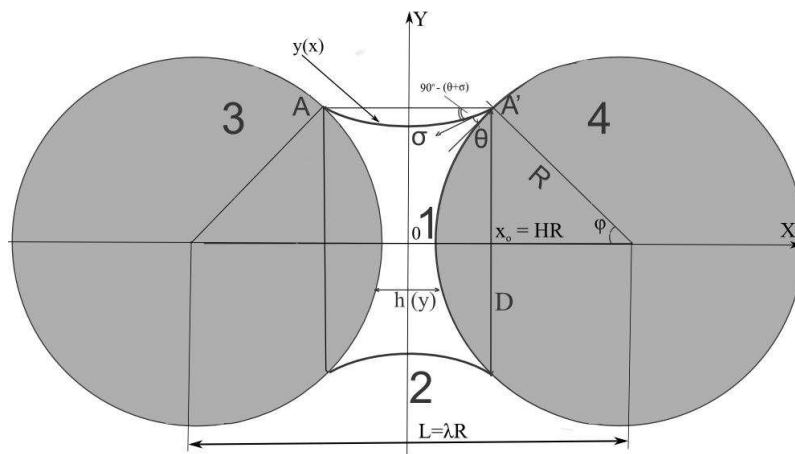


Рис. 6: К рассмотрению выбора математической модели поверхности

Уравнения для получения функций  $P(R, \varphi, \theta, \lambda)$  и  $Q(R, \varphi, \theta, \lambda)$  нужно искать из геометрических соображений. На Рис. 6. видно, что можно получить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} y(x_0) = R \sin(\varphi), \\ y'_x(x_0) = \operatorname{ctg}(\varphi + \theta). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь первое уравнение выражает собой равенство значений ординаты дуги  $AA'$  и сферы в точке  $x_0$  – точке прикосновения профиля и поверхности сферы. Второе уравнение выражает, что касательная к дуге  $AA'$  в точке  $x_0$  должна идти под углом  $\pi/2 - (\theta + \varphi)$ . Таким образом, решение  $P(R, \varphi, \theta, \lambda)$  и  $Q(R, \varphi, \theta, \lambda)$  определяется уже конкретным видом функции  $y(x, P, Q)$ . Для облегчения задачи будем считать, что угол смачивания  $\theta = 0$  (полное смачивание).

Далее нам необходимо определить объем получившейся манжеты, состоящей из двух частей. Первая часть – это объем фигуры, полученной вращением дуги  $y(x, P, Q)$  вокруг оси  $x$ . Из математического анализа известна следующая формула для определения объема

$$V_{rot} = \pi \int_{-x_0}^{x_0} y^2(x, P, Q) dx. \quad (2)$$

Вторая часть – это объем двух сегментов, вырезанного из сфер под углом  $\varphi$ , который нужно вычесть из выражения (2). Известно аналитическое выражение для объема сегмента сферы:

$$V_{seg} = \pi R^3 \left( 2 \sin^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{1}{3} (1 - \cos^3(\varphi)) \right). \quad (3)$$

Таким образом, объем манжеты запишется в следующем виде:

$$V_{neck} = \pi \int_{-x_0}^{x_0} y^2(x) dx - 2\pi R^3 \left( 2 \sin^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{1}{3} (1 - \cos^3(\varphi)) \right). \quad (4)$$

Далее нами предложено записать выражение для объема манжеты в виде  $V_{neck} = \pi R^3 W(\varphi, \lambda)$ , где функция  $W(\varphi, \lambda)$  определяется для каждой конкретной поверхности. Ясно, что общее выражение для функции  $W(\varphi, \lambda)$  следующее

$$W(\varphi, \lambda) = \frac{1}{R^3} \int_{-x_0}^{x_0} y^2(x, P, Q) dx - W_{seg}(\varphi), \quad (5)$$

где  $W_{seg}(\varphi) = 2 \left( 2 \sin^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{1}{3} \cos^3(\varphi) \right)$  – «сегментная часть» объема.

## 2. Аппроксимация профиля дугой окружности

Подставим функцию  $y(x, y_c, \rho) = y_c - \sqrt{\rho^2 - x^2}$  в уравнение (1):

$$\begin{cases} y_c - \sqrt{\rho^2 - x_0^2} = R \sin(\varphi), \\ \frac{x_0}{\sqrt{\rho^2 - x_0^2}} = \operatorname{ctg}(\varphi). \end{cases} \quad (6)$$

Далее, для решения системы (6) удобно ввести следующую функцию  $H(\varphi, \lambda) = (\lambda/2 - \cos(\varphi))$ , которая просто определяет положение точки  $x_0 = HR$ . С учетом этого, второе уравнение системы (6) запишется так

$$\frac{HR}{\sqrt{\rho^2 - (HR)^2}} = \operatorname{ctg}(\varphi). \quad (7)$$

Решая его относительно  $\rho$ , получаем  $\rho = RH \sec(\varphi)$ . Подставляем его в первое уравнение системы (6) и, решая его относительно  $y_c$ , получим

$$y_c = R \left( \sin(\varphi) + H \sqrt{\sec^2(\varphi) - 1} \right) = R (\sin(\varphi) + H \operatorname{tg}(\varphi)). \quad (8)$$

Окончательно решение системы уравнений (6) можно записать в следующем виде

$$\begin{cases} y_c(R, \varphi, \lambda) = RY(\varphi, \lambda), \\ \rho(R, \varphi, \lambda) = RH(\varphi, \lambda). \end{cases} \quad (9)$$

Здесь, для удобства, введена функция  $Y(\varphi, \lambda) = \sin(\varphi) + H(\varphi, \lambda)tg(\varphi)$ .

Используя формулы (4) и (5), объем манжеты определится выражением  $V_{neck} = \pi R^3 W(\varphi, \lambda)$ , где функция  $W(\varphi, \lambda)$  имеет вид

$$\begin{aligned} W(\varphi, \lambda) = & Y^2 H + H^3 \left( \sec^2(\varphi) - \frac{1}{3} \right) - \\ & - Y H^2 \sec^2(\varphi) \left( tg(\varphi) + \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \sec^2(\varphi) \right) - W_{seg}(\varphi). \end{aligned} \quad (10)$$

### 3. Аппроксимация манжеты цепной линией

Цепная линия определяется выражением  $y(x, A, B) = Ach(Bx)$ . Подставим его в систему (1) и получим

$$\begin{cases} Ach(Bx_0) = R \sin(\varphi), \\ ABsh(Bx_0) = ctg(\varphi). \end{cases} \quad (11)$$

Разделим второе уравнение на первое, получим следующее уравнение относительно коэффициента  $B$

$$Bth(Bx_0) = \frac{1}{R} \frac{ctg(\varphi)}{\sin(\varphi)}. \quad (12)$$

Ясно, что полученное уравнение (12) является трансцендентным и не имеет строгого решения в аналитических функциях. Разделим уравнение (12) на  $th(Bx_0)$ , тогда выражение (12) перейдет в следующий вид

$$B = \frac{1}{R} \frac{ctg(\varphi)}{\sin(\varphi)} cth(Bx_0) = \frac{1}{R} \frac{ctg(\varphi)}{\sin(\varphi)} cth(BHR). \quad (13)$$

Методом подбора для уравнения (13) было найдено следующее приближение  $B_0 \approx \frac{1}{R} \frac{ctg(\varphi)}{\sin(\varphi)}$ . Для уточнения решения нами была применена схема Ньютона решения трансцендентных уравнений. Для этого рассмотрим функцию  $f(B) = \frac{1}{R} \frac{ctg(\varphi)}{\sin(\varphi)} - B$ . Тогда  $n$ -ое приближение решения уравнения (13) будет описываться формулой

$$B_n \approx B_{n-1} - \frac{f(B_{n-1})}{f'(B_{n-1})}. \quad (14)$$

Оставляя здесь без внимания вопрос о сходимости и оценки решения уравнения (14), отметим, что уже первое приближение удовлетворительно решает уравнение (13). Таким образом, функция  $B(R, \varphi, \lambda)$  определяется следующим выражением

$$B(R, \varphi, \lambda) = \frac{1}{R} \frac{\xi}{H(\varphi, \lambda)} \left( 1 + \frac{cth(\xi) - 1}{\frac{\xi}{sh^2(\xi)} + 1} \right) = \frac{b(\varphi, \lambda)}{R}, \quad (15)$$

где для удобства записи введен параметр  $\xi = H(\varphi, \lambda) \frac{ctg(\varphi)}{\sin(\varphi)}$ , функция  $b(\varphi, \lambda)$  определяется формулой  $b(\varphi, \lambda) = \frac{\xi}{H(\varphi, \lambda)} \left( 1 + \frac{cth(\xi) - 1}{\frac{\xi}{sh^2(\xi)} + 1} \right)$ .

Подставим  $B(R, \varphi, \lambda)$  в первое уравнение (11) и, разрешая его относительно  $A$ , получим следующее выражение для функции  $A(R, \varphi, \lambda)$

$$A(R, \varphi, \lambda) = \frac{R \sin(\varphi)}{ch(B(R, \varphi, \lambda)x_0)} = \frac{R \sin(\varphi)}{ch(b(\varphi, \lambda)H(\varphi, \lambda))} = a(\varphi, \lambda)R, \quad (16)$$

где  $a(\varphi, \lambda) = \frac{\sin(\varphi)}{ch(b(\varphi, \lambda)H(\varphi, \lambda))}$ .

Вычисляя выражение (5) для катеноида, окончательно получим функцию  $W(\varphi, \lambda)$

$$W(\varphi, \lambda) = \frac{a^2}{2} \left( 2H(\varphi, \lambda) + \frac{1}{b} sh(2bH(\varphi, \lambda)) \right) - W_{seg}(\varphi, \lambda), \quad (17)$$

где функции  $a$ ,  $b$  были определены выше.

#### 4. Аппроксимация манжеты параболой

Здесь мы опустим подробные детали вычислений и сразу запишем результат для функции  $y(x, A, B) = A + Bx^2$ . Подставляя в (1), получим систему уравнений относительно  $A$  и  $B$ , разрешая которую, получим

$$\begin{cases} A(\varphi, \lambda) = a(\varphi, \lambda)R, \\ B(\varphi, \lambda) = \frac{ctg(\varphi)}{H(\varphi, \lambda)}, \end{cases} \quad (18)$$

где функция  $a(\varphi, \lambda) = \sin(\varphi) - \frac{1}{2}ctg(\varphi)H(\varphi, \lambda)$ .

Таким образом, используя соотношение (5), вычислим функцию  $W(\varphi, \lambda) = 2(a^2H + \frac{2}{3}abH^3 + \frac{1}{5}b^2H^5) - W_{seg}(\varphi, \lambda)$ .

#### 5. Аппроксимация манжеты функцией вида $y(x, A, B) = A + Bx^{2n}$

Вообще говоря, общим случаем функций, которые могут аппроксимировать манжету, являются двухпараметрические четные относительно нуля функции вида  $y(x, A, B) = A + Bx^{2n}$ , где  $n \in \mathbb{N}$ . Частный случай  $n = 1$  был рассмотрен выше и соответствует параболе. Подставив  $y(x, A, B) = A + Bx^{2n}$  в (1), получим

$$\begin{cases} A + BH^{2n}R^{2n} = R \sin(\varphi), \\ 2nBH^{2n-1}R^{2n-1} = ctg(\varphi). \end{cases} \quad (19)$$

Из второго уравнения выражение для функции  $B(R, \varphi, \lambda)$  будет иметь вид

$$B(R, \varphi, \lambda) = \frac{ctg(\varphi)}{2nH^{2n-1}R^{2n-1}} = \frac{b_n(\varphi, \lambda)}{R^{2n-1}}, \quad (20)$$



где  $b_n(\varphi, \lambda) = \frac{ctg(\varphi)}{2nH^{2n-1}}$ . Подставляя выражение (20) в первое уравнение системы (19), получим выражение для функции  $A(R, \varphi, \lambda)$

$$A(R, \varphi, \lambda) = Ra_n(\varphi, \lambda), \quad (21)$$

где  $a_n(\varphi, \lambda) = \sin(\varphi) - \frac{ctg(\varphi)}{2n}H(\varphi, \lambda)$ . Проинтегрировав выражение (5), получим

$$W(\varphi, \lambda) = 2 \left( a_n^2 H + \frac{2a_n b_n}{(2n+1)} H^{2n+1} + \frac{b_n^2}{(4n+1)} H^{4n+1} \right) - W_{seg}(\varphi, \lambda). \quad (22)$$

## 6. Оценка корректности математической модели

Здесь стоит отметить, что на функцию  $y(x, P, Q)$  необходимо наложить дополнительное условие, следующее из физических соображений:

$$\min_{x \in [-x_0, x_0]} (y(x, P, Q)) \geq d, \quad (23)$$

где  $d$  – диаметр атома, то есть сечение манжеты в самой узкой ее части не может быть меньше диаметра атома.

Для всех рассмотренных выше профилей минимум функции находится в точке  $x = 0$  и выражение (23) принимает, для каждой модели, следующий вид:

$$y_c - \rho \geq d \text{ – для дуги окружности,} \quad (24)$$

$$A \geq d \text{ – для остальных.} \quad (25)$$

Используя введенные выше соотношения, из (24) и (25) получим следующие неравенства

$$Y(\varphi, \lambda) - H(\varphi, \lambda) \geq d/R \text{ – для дуги окружности,} \quad (26)$$

$$a(\varphi, \lambda) \geq d/R \text{ – для остальных.} \quad (27)$$

Для случая, когда профиль – дуга окружности, решение (26) представлено графически на Рис. 7. Анализ Рис. 7 показывает, что при увеличении  $\lambda$  происходит уменьшение области на  $\varphi$ , в которой система будет корректной. При увеличении радиуса частиц  $R$  происходит увеличение области на  $\varphi$ , где система корректна. При  $\lambda = 2$  реализуется максимально возможный диапазон «корректных»  $\varphi$ .

Рассмотрим теперь модель, когда профиль аппроксимируется параболой. Для параболы  $a(\varphi, \lambda) = \sin(\varphi) - \frac{1}{2}ctg(\varphi)H(\varphi, \lambda) \geq d/R$  решение приведено на Рис. 8. Здесь можно сделать выводы аналогичные для профиля «дуга окружности».

Интересным представляется случай для модели  $y(x, A, B) = A + Bx^{2n}$ . Для нее  $a(\varphi, \lambda) = \sin(\varphi) - \frac{1}{2n}ctg(\varphi)H(\varphi, \lambda) \geq d/R$  и увеличивая параметр  $n$  можно добиться максимально возможного диапазона «корректных»  $\varphi$ . На Рис. 9 показан случай, когда при  $n = 1000$  функции  $a(\varphi, \lambda)$  фактически стянулись в одну.

На Рис. 10 представлено решение неравенства (27) для цепной линии. Здесь можно сделать выводы аналогичные для сферы и параболы, т.е. диапазон «корректных»  $\varphi$  уменьшается при увеличении  $\lambda$  и возрастает, когда увеличиваем радиус частиц  $R$ .

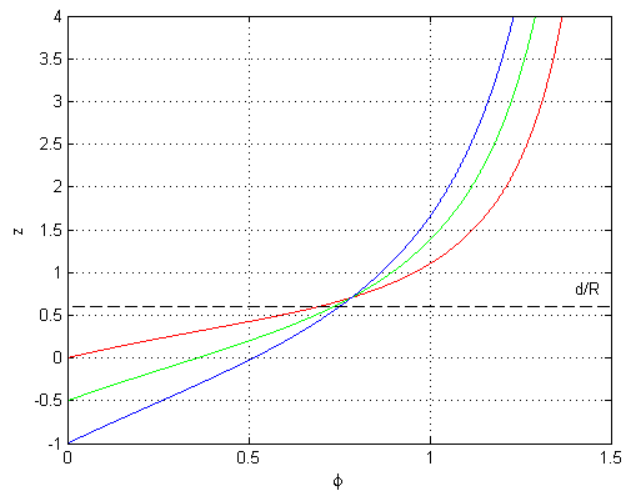


Рис. 7: Графическое решение неравенства (26). Красная линия – соответствует случаю  $\lambda = 2$ , зеленая –  $\lambda = 3$ , синяя –  $\lambda = 4$ . Штриховая линия соответствует  $d/R$

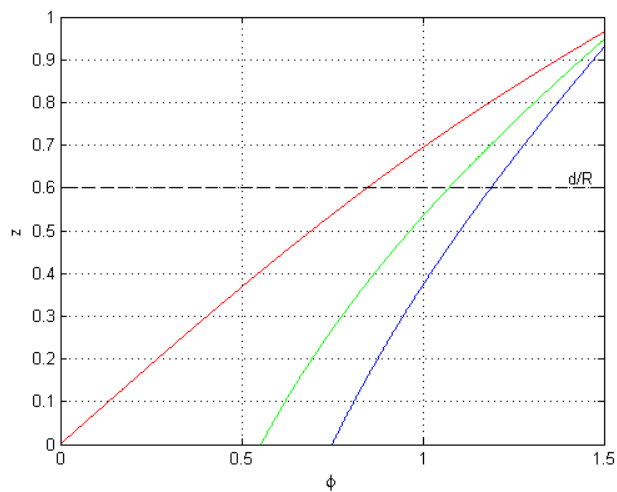


Рис. 8: Графическое решение неравенства (27) – профиль параболы. Красная линия – соответствует случаю  $\lambda = 2$ , зеленая –  $\lambda = 3$ , синяя –  $\lambda = 4$

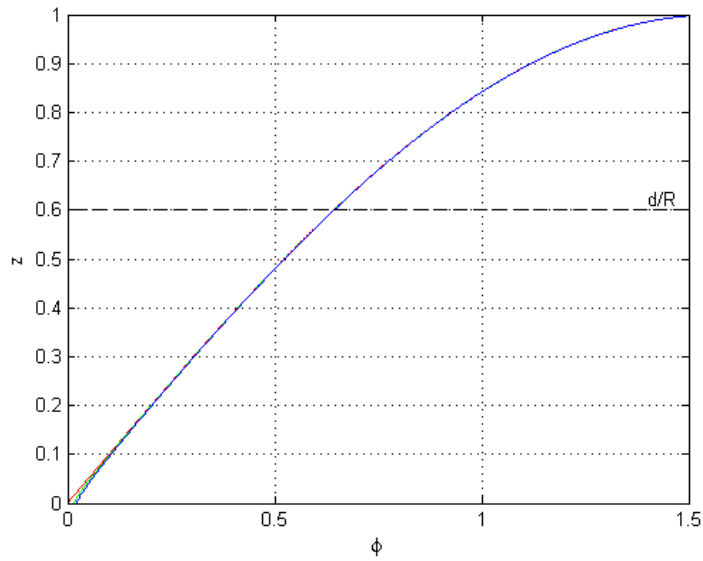


Рис. 9: Графическое решение неравенства (27) – профиль  $y(x, A, B) = A + Bx^{2^n}$ ,  $n = 1000$ . Красная линия – соответствует случаю  $\lambda = 2$ , зеленая –  $\lambda = 3$ , синяя –  $\lambda = 4$ . Все функции стянулись в одну, реализовав при этом максимально возможный диапазон «корректных»  $\varphi$

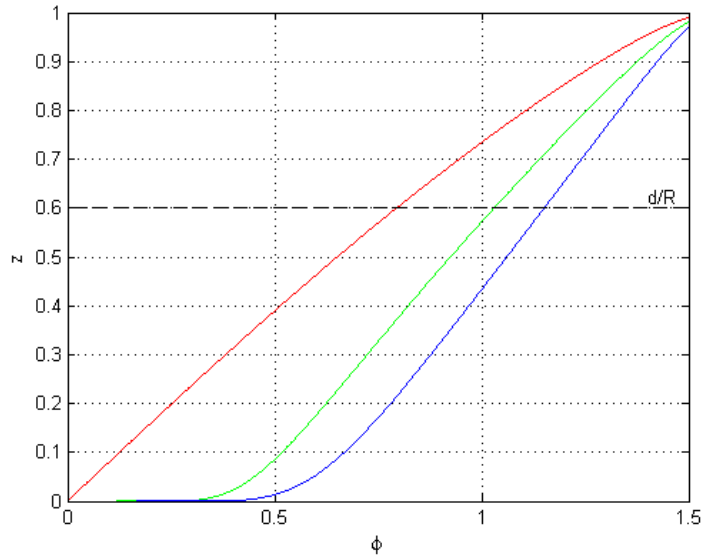


Рис. 10: Графическое решение неравенства (27) – профиль цепная линия. Красная линия – соответствует случаю  $\lambda = 2$ , зеленая –  $\lambda = 3$ , синяя –  $\lambda = 4$

## Заключение

Разработанная модель математически адекватно описывает манжету жидкости между двумя твердыми сферическими частицами. Получены формулы для нахождения параметров профилей манжеты, а так же соотношения для вычисления ее объема. Кроме того, была исследована геометрическая адекватность рассматриваемой системы – то есть размеры модели не могут быть меньше размеров атомов, составляющих ее. Во всех случаях показано, что при увеличении  $\lambda$  уменьшается область  $\varphi$ , на которых система является геометрически адекватной, а при увеличении  $R$  эта область растет. Максимально возможная реализация «корректных»  $\varphi$  возможна при  $\lambda = 2$ , то есть это соответствует случаю соприкосновения двух твердых частиц. Стоит отметить, что данная математическая модель была использована при написании программы, рассчитывающей термодинамические свойства манжеты жидкости между двумя твердыми наночастицами [10–13]. Актуальность проблемы описания формы манжеты для случая взаимодействия наночастиц обусловлена чувствительностью величины расклинивающего давления в манжете жидкости, которое позволяет установить область размеров, в которой исследуемая система должна быть устойчива [14].

## Список литературы

- [1] Степанов Ю.Н., Алымов М.И. Влияние моделирования формы перешейка спекаемых сферических частиц на точность расчета роста перешейка // *Металлы*. 2005. №1. С. 34–37.
- [2] Радужкевин Л.В. Исследование капиллярной конденсации паров в высокодисперсных системах // *Известия АН СССР. Отделение химических наук*. 1952. №6. С. 1008–1020.
- [3] Радужкевин Л.В. Капиллярная, конденсация паров в системах из сферических частиц // *Методы исследования структуры высокодисперсных и пористых тел*. М.: АН СССР, 1958. С. 60–70.
- [4] Melrose J.C. Model calculations for capillary condensation // *American Institute of Chemical Engineers Journal*. 1966. Vol. 12, №5. Pp. 986–994.
- [5] Покровский Г.И. Исследования по физике грунтов. М.-Л.: ОНТИ, 1937. 136 с.
- [6] Princen H.M. Comments on «The Effect of Capillary Liquid on the Force of Adhesion between Spherical Solid Particles» // *Journal of Colloid and Interface Science*. 1968. Vol. 26. Pp. 249–252.
- [7] Мацкевич М.К., Нерпин С.В., Резников В.В. О влиянии гидрофобизации порошков и твердых поверхностей на величину сил взаимодействия капиллярной природы // *Исследования в области поверхностных сил*. М.: Наука, 1967. С. 431–435.
- [8] Найдич Ю.В., Лавриненко И.А., Петрищев В.Я. Исследование капиллярных сил сцепления между твердыми частицами с прослойкой жидкости на контакте // *Порошковая металлургия*. 1965. №2. С. 50–56.

- [9] Kruyer S. The penetration of mercury and capillary condensation packed spheres // Transactions of the Faraday Society. 1958. Vol. 54. Pp. 1758–1767.
- [10] Сдобняков Н.Ю., Цветкова Е.А., Базулев А.Н., Кульпин Д.А., Самсонов В.М. О термодинамической устойчивости манжеты жидкости между двумя сферическими наночастицами // Мониторинг. Наука и технологии. 2010. №3. С. 98–102.
- [11] Сдобняков Н.Ю., Кульпин Д.А., Самсонов В.М., Базулев А.Н., Дмитриев Д.А., Тимофеев Д.А. Исследование проблемы термодинамической устойчивости трехфазных наносистем на основе расчета удельной избыточной свободной энергии. 2. Манжета жидкости между двумя сферическими наночастицами // Механика и физика процессов на поверхности и в контакте твердых тел, деталей технологического и энергетического оборудования. Тверь: ТГТУ, 2010. №3. С. 40–45.
- [12] Сдобняков Н.Ю., Соколов Д.Н., Кульпин Д.А., Базулев А.Н., Самсонов В.М., Цветкова Е.А. О проблеме термодинамической устойчивости манжета жидкости между двумя сферическими наночастицами металлов // Бултеровские сообщения. 2011. Т. 25, №7. С. 29–34.
- [13] Сдобняков Н.Ю., Соколов Д.Н., Кульпин Д.А., Базулев А.Н., Самсонов В.М., Цветкова Е.А. Исследование проблемы термодинамической устойчивости манжета жидкости между двумя сферическими наночастицами // Конденсированные среды и межфазные границы. 2011. Т. 13, №2. С. 196–202.
- [14] Сдобняков Н.Ю., Соколов Д.Н., Колосов А.Ю., Антонов А.С., Базулев А.Н. Зависимость избыточной свободной энергии и расклинивающего давления от формы манжеты жидкости между двумя сферическими наночастицами // Физико-химические аспекты изучения кластеров, наноструктур и наноматериалов / под общей редакцией В.М. Самсонова, Н.Ю. Сдобнякова. Тверь: ТвГУ, 2012. №4. С. 264–269.

#### Библиографическая ссылка

Сдобняков Н.Ю., Соколов Д.Н., Козлова Е.М., Неверова Т.М., Колосов А.Ю. Математическая модель манжеты жидкости между двумя твердыми сферическими частицами одинакового радиуса // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2014. №1. С. 5–19.

#### Сведения об авторах

1. **Сдобняков Николай Юрьевич**

доцент кафедры теоретической физики Тверского госуниверситета.

*Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, 33, ТвГУ, ФТФ.*

*E-mail: nsdobnyakov@mail.ru.*

**2. Соколов Денис Николаевич**

аспирант кафедры теоретической физики Тверского госуниверситета.

*Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, 33, ТвГУ, ФТФ.*

*E-mail: dnsokolov@mail.ru.*

**3. Козлова Екатерина Михайловна**

студент специализации кафедры теоретической физики Тверского госуниверситета.

*Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, 33, ТвГУ, ФТФ.*

**4. Неверова Таисия Николаевна**

студент специализации кафедры теоретической физики Тверского госуниверситета.

*Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, 33, ТвГУ, ФТФ.*

**5. Колосов Андрей Юрьевич**

аспирант кафедры теоретической физики Тверского госуниверситета.

*Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, 33, ТвГУ, ФТФ.*

*E-mail: kolosov-ai@yandex.ru.*

## MATHEMATICAL MODEL FOR THE LIQUID NECK BETWEEN TWO IDENTICAL SOLID SPHERICAL PARTICLES

**Sdobnyakov Nickolay Yuryevich**

Assistant Professor of the Department of Theoretical Physics, Tver State University  
*Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str.*  
*E-mail: nsdobnyakov@mail.ru*

**Sokolov Denis Nikolayevich**

Post-graduate student of the Department of Theoretical Physics,  
Tver State University  
*Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str.*  
*E-mail: dnsokolov@mail.ru*

**Kozlova Ekaterina Mikhailovna**

Student of the Department of Theoretical Physics, Tver State University  
*Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str.*

**Neverova Taisiya Nikolayevna**

Student of the Department of Theoretical Physics, Tver State University  
*Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str.*

**Kolosov Andrey Yuryevich**

Post-graduate student of the Department of Theoretical Physics,  
Tver State University  
*Russia, 170100, Tver, 33 Zhelyabova str.*  
*E-mail: kolosov-au@yandex.ru*

---

*Received 06.02.2014, revised 20.03.2014.*

---

In this paper, the mathematical model describing the liquid neck between two solid spherical particles has been developed. The formulas for the description of various models for the profile necks were obtained, as well as formula for calculation neck volume. The correctness of the mathematical model has been investigated, i.e. the matching between geometric dimensions of the neck and the physical dimensions of the atoms.

**Keywords:** liquid neck, mathematical model, the surface of rotation.

### Bibliographic citation

Sdobnyakov N.Yu., Sokolov D.N., Kozlova E.M., Neverova T.M., Kolosov A.Yu. Mathematical model for the liquid neck between two identical solid spherical particles. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2014, no. 1, pp. 5–19. (in Russian)